This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, иринадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.

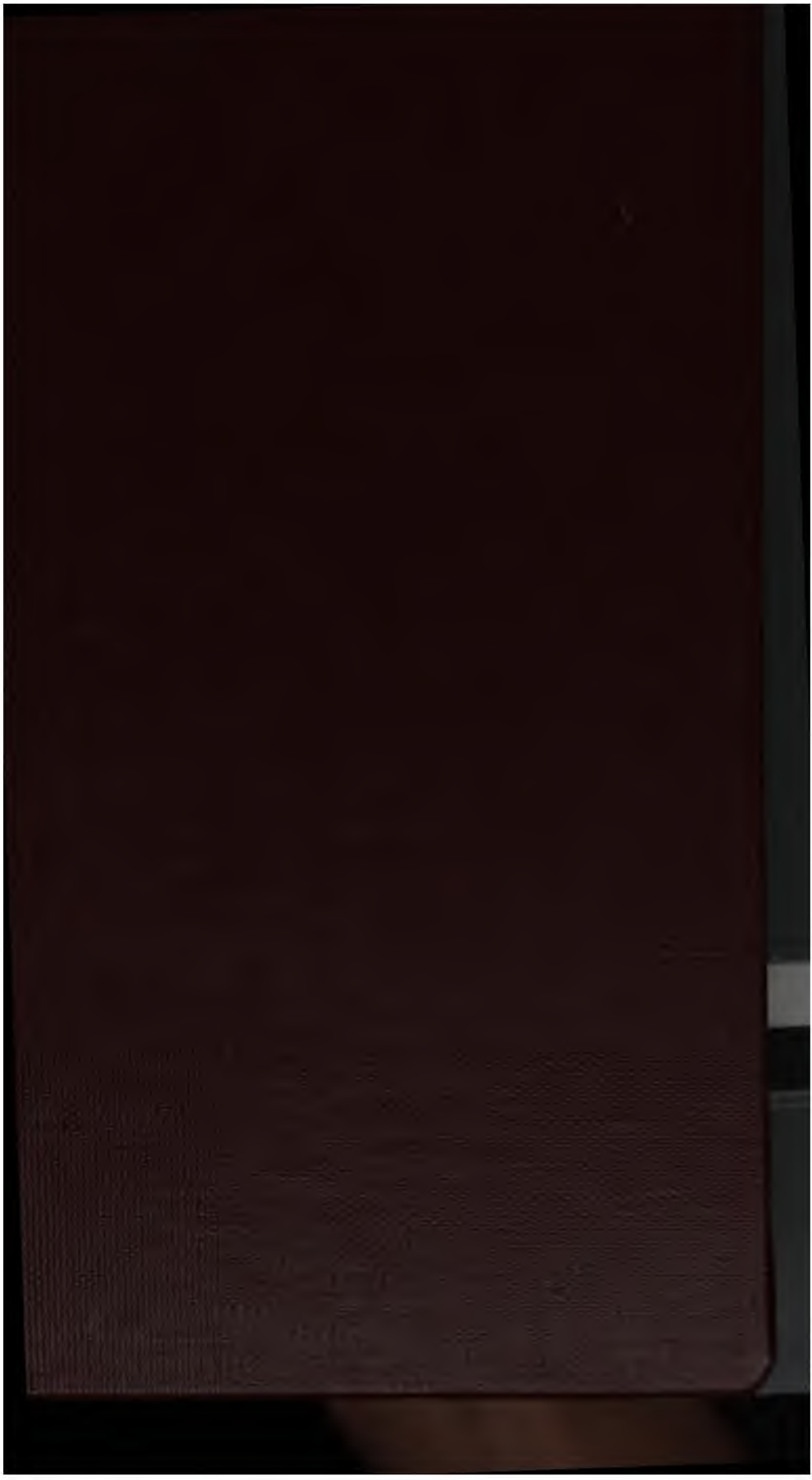
- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.

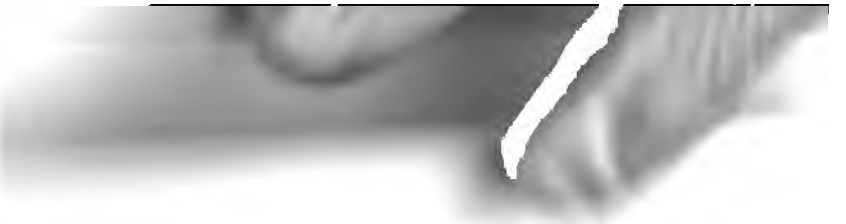
- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.

- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице `http://books.google.com/`





STORAGE AREA

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

3. KÖTET

1894

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES
MATHEMATICAL-SCIENCES LIBRARY
OCT 12 1976

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT

BUDAPEST 1968

„KULTURA" Budapest, Offers Mathematical and Physical Sets

International ACTA Journals from Hungary

publish original scientific treatises in English, German, French or Russian.

ACTA MATHEMATICA Academiae Scientiarum Hungaricae

Vols 1-18, 1950-1967 with „Hungarica Acta Mathematica" Vol. 1. (1949) and Suppl. to Vol. 5., mostly reprinted

Unbound set	US $	285,-
Cloth bound set	US $	323,-

ACTA PHYSICA Academiae Scientiarum Hungaricae

Vols. 1-23, 1952-1967 with „Hungarica Acta Physica" Vol. 1. (1949) mostly reprinted

Unbound set	US $	264,-
Cloth bound set	US $	312,-

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

Vols. 1-28, 1922-1967 mostly reprinted

Unbound set	US $	406,-
Cloth bound set	US $	464,-

Published by the University of SZEGED

PUBLICATIONES MATHEMATICAE

Vols. 1-14. 1949-1967 partly reprinted

Unbound set	US $	182,-
Cloth bound set	US $	210,-

Published by the University of DEBRECEN

Soviet Mathematical Reprint

TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis
Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle

Vols. 1-13, Moscow-Leningrad, 1933-1966 cloth bound — US $ 240,-

Vols. 1-4 are published chiefly in Western languages. Vol. 4 contains the proceedings of the 1st International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HARMADIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA és RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1894

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

58 105ST XL1 1310
03/92 53-005-00

A kiadásért felelős: Császár Ákos,
a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára

Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás
Minden jog fenntartva
Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published in Budapest

All rights reserved

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

68-475 Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HARMADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

VÁLYI GYULA: A másodrendű forgási felületekről 1; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (L. közl.) 5; RADOS G.: Az adjungált alakok elméletéről (L. közl.) 12; BEKE MANÓ: A biquadratikus egyenletek megoldásához 21; HORVÁTH JÓZSEF: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása 25; Megoldott feladatok (Csillag V., Grünwald J., Csehély A., Maksay Zs., Fuchs K. és Löky B. uraktól) 30; *Irodalom* (S. CARNOT: Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers, ism. CSÖGLER A. — (Középiskolai Mathematikai Lapok) 34; *Physikai laboratorium* (A chrómsavas elem és a Gülcher-féle hőoszlop. Ólomforrasztás. Az aluminium bevonása más fémekkel) 39; Kérdés 40; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (FRÖHLICH J.: A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról) 41.

Második füzet.

RADOS GUSZTÁV: Új soralakok az *e* számára 49; VÁLYI GYULA: A tetraéder magasságairól 56; BALOG MÓR: Minimum-problémák elemi tárgyalása 60; SKOPÁL ISTVÁN: A perspektiv háromszögekre vonatkozó tétel 64; *Physikai Szemle* (Görbe fénysugarakról. Az ellenállás abszolut egységének valószinű értékéről. Köralakú nyílás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól) 66; *Irodalom.* (Ostwald's Klassiker: SAUSSURE, Chem. Untersuchungen über die Vegetation. Laplace, Ivory, Gauss, Chasles und Dirichlet, Über die Anziehung homogener Ellipsoide. HUYGENS, Abhandlung über das Licht. CANIZZARO: Abriss eines Lehrganges d. theor. Chemie. LAMBERT's Photometrie. BUNSEN und ROSCOE: Photochemische Untersuchungen, ism. KÖVESLIGETHY R.) 72; *Megoldott feladatok* (Tótfalusy B. és Szabó P. uraktól) 77; *Feladatok* (Kürschák és Váli uraktól) 84; *Physikai laboratorium* (ANTOLIK KÁROLY: Az elektr. szikrarajzok előállításáról) 85; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (TANGL K.: Néhány forgási test niveau- és erőgörbéiről) 90; Helyreigazítás 96.

Harmadik füzet.

KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez 97; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés elmélete és története 102; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (II. közl.) 111; *Irodalom.* Tesla-féle kisérletek: Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. Zusammengestellt von E. de FODOR. Isin. Ebert után RATKOVSZKY 118; *Megoldott feladatok* (Szontagh G. és Maksay Zs. uraktól) 131; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (HARKÁNY BÉLA: Az É.-Amerikai observatoriumokról) 139.

Negyedik füzet.

KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (I. közlem.) 149; SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban (I. közl.) 157; KLUG LIPÓT: Tételek a paraboláról s a hiperbolikus paraboloidról 166; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés története és elmélete (VIII. közl.) 170; *Megoldott feladatok* (Csillag V. és Maksay Zs. uraktól) 181; *Feladatok* (Fuchs Károly urtól) 182; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (GRUBER N.: A Gramme-féle gyűrű elmélete) 183.

Ötödik füzet.

Értesítő a választmány jun. 22. üléséről. Érettségi vizsgálatot tett tanulók mathematikai és physikai versenye 197; NESNERA ALADÁR: Az involutorikus pontsorok 202; KOPP LAJOS: Egy tétel a sokaságok elméletéről 207; KÖVESLIGETHY RADÓ: A fogyatkozások graphikus meghatározása (II. közl.) 215; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (III. közl.) 224; KÜRSCHÁK JÓZSEF: A körmérés története és elmélete (IX. közl.) 230; *Physikai laboratorium* (KISS KÁROLY: Kis légnyomások megméréséről) 240; A *Mathematikai és Physikai Társulat második rendes közgyülése* 244; A *Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai* 255; Bólyai János siremlékére befolyt adományok kimutatása 256.

Hatodik és hetedik füzet.

SKOPÁL ISTVÁN: Egy helyzetgeometriai tétel 257; VÁLYI GYULA: Desargues tantételének térbeli analogonjáról 264; RÉTHY MÓR: A surlódás elméletéhez (IV. és befejező közlemény) 274; BEKE MANÓ: Az adjungált helyettesítések alkalmazása az adj. diff. egyenleteknél 286; BAUER MIHÁLY: A karakterisztikus egyenletek elméletéhez 293; *Physikai Szemle* (A hőmérséklet mérése elektromos úton) 299; A *Math. és Phys. Társulat ünnepélyes ülése.* (Az elnök üdvözlése. A tanulók versenyén megitélt díjak kiosztása. Dr. KLUPÁTHY előadása) 321; A *Math. és Phys. Társulat I. versenyén jutalmazott dolgozatok* (SEIDNER MIHÁLY és PAP PÁL dolgozatai) 316; *Megoldott feladatok* (Vladár

Lajos, Privorszky Alajos, Bauer Mihály és Suták József uraktól) 324; *Értesítő a Math. és Phys. Társulat* előadásairól (Dr. Hoór: A villámhárítókról) 333; A *Mathematikai és Physikai Társulat* új tagjai 352.

Nyolczadik füzet.

Szily Kálmán: A körvonal üldöző görbéje 353; Kürschák József: Az invariánsok elméletének alaptételéről 359; Bauer Mihály: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez 369; *Physikai Szemle* (A kritikus pont meghatározásáról. Folyadékok és telített gőzök sűrűségéről.) *Irodalom.* Heaviside: Electrical Papers (ism. Hallér) 382; *Megoldott feladatok* (Rados J. urtól). *Physikai laboratorium* (Kisérletek a folyadékok feszültségére. A fémek különböző kiterjedése. Kaucsuk összehúzódása). *Értesítő a Math. Phys. Társ.* előadásairól (Dr. Klupathy J.: Kisérletek elektromos oscillatiókkal).

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Lap

Balog Mór: Minimum-problemák elemi tárgyalása ... 60
Bauer Mihály: A karakterisztikus egyenletek elméletéhez ... 293
— Megjegyzések Dirichlet egyik tételéhez ... 369
Beke Manó: A biquadratikus egyenletek megoldásához ... 21
— Az adjungált helyettesítések alkalmazása az adjungált differential-egyenleteknél ... 286
Horváth József: Egy minimum-probléma elemi tárgyalása ... 25
Klimkó Mihály: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez ... 97
Klug Lipót: Tételek a paraboláról s a hiperbolikus paraboloidról ... 166
Kopp Lajos: Egy tétel a sokaságok elméletéről ... 209
Kövesligethy Radó: A fogyatkozások graphikus meghatározása (Első közl.) 149
— A fogyatkozások graphikus meghatározása (Második közl.) ... 215
Kürschák József: A körmérés elmélete és története (Hetedik közl.) ... 102
— A körmérés elmélete és története (Nyolczadik közl.) ... 170
— A körmérés elmélete és története (Kilenczedik és befejező közl.) ... 230
— Az invariánsok elméletének alaptételéről ... 359
Nemcsa Aladár: Az involutorikus pontsorok ... 202
Rados Gusztáv: Az adjungált alakok elméletéről (Első közl.) ... 12
— Uj soralakok az *e* számára ... 49
Réthy Mór: A surlódás elméletéhez (Első közl.) ... 5
— A surlódás elméletéhez (Második közl.) ... 111
— A surlódás elméletéhez (Harmadik közl.) ... 224
— A surlódás elméletéhez (Negyedik és befejező közl.) ... 274
Skopal István: A perspektiv háromszögekre vonatkozó tétel ... 64
Suták József: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban (Első közl.) ... 157
Szily Kálmán: A körvonal tüdőző görbéje állandó távolság mellett ... 353
Vályi Gyula: A másodrendű forgási felületekről ... 1
— A tetraéder magasságairól ... 56
— Desargues tantételének térbeli analogonjáról ... 264

Physikai Szemle.

Lap

BARTONIEK GÉZA: Görbe fénysugarakról (WIENER után) 66
CSEMEZ JÓZSEF: A kritikus pont meghatározásáról (PELLAT után) ... 373
STEINER LAJOS: Köralaku nyilás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól 71
TANGL KÁROLY: A hőmérséklet mérése elektromos uton 299
— Folyadékok és telített gőzök sürüségéről (AMAGAT és MATHIAS után)... 378
WITTMANN FERENCZ: Az ellenállás absolut egységének valószinü értékéről (DORN után) 69

Irodalom.

CZÓGLER ALAJOS: S. CARNOT, Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers 34
HELLER ÁGOST: HEAVISIDE, Electrical Papers 382
KÖVESLIGETHY RADÓ: Ostwald's Klassiker 72
RADOS GUSZTÁV: Középiskolai Mathematikai Lapok 38
RATKOVSZKY PÁL: FODOR, Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz (EBERT után) 118

Ismertetett művek.

ARANY DÁNIEL: Középiskolai Mathematikai Lapok (ism. RADOS) 38
BUNSEN u. ROSCOE: Photochemische Untersuchungen (ism. KÖVESLIGETHY) 76
CARNOT: Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers (ismertette CZÓGLER) 34
CANIZZARO: Abriss eines Lehrganges d. theor. Chemie (ism. KÖVESLIGETHY) 74
CHASLES l. LAPLACE stb.
DIRICHLET l. LAPLACE stb.
FODOR: Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz (ism. RATKOVSZKY) 118
GAUSS l. LAPLACE stb.
HEAVISIDE: Electrical Papers (ism. HELLER) 382
HUYGENS: Abhandlung über das Licht (ism. KÖVESLIGETHY) 73
IVORY l. LAPLACE stb.
LAPLACE, IVORY, GAUSS, CHASLES und DIRICHLET: Über die Anziehung homogener Ellipsoide (ism. KÖVESLIGETHY) 71
SAUSSURE: Chemische Untersuchungen über die Vegetation (ism. KÖVESLIGETHY) 71

Kitűzött feladatok.

	Lap
Fuchs Károly: kitűzi a 27. és 28. feladatot	182
Kürschák József: « « 23. «	84
Vályi Gyula: « « 24., 25. és 26. «	84

Megoldott feladatok.

Bauer Mihály	megoldja a	20.	feladatot	326
Cséhély Adolf	« «	14.	«	31
Csillag Vilmos	« «	14.	«	30
— —	« «	18.	«	181
Fuchs Károly	« «	14.	«	32
Grünwald István	« «	14.	«	31
Maksay Zsigmond	« «	14.	«	32
— —	« «	17.	«	136
— —	« «	18.	«	182
Pap Pál	megoldja a tanuló-verseny tételeit			319
Privorszky Alajos	megoldja a	20.	feladatot	324
Seidner Mihály	megoldja a tanuló-verseny tételeit			316
Sutár József	megoldja a	20.	feladatot	331
Szabó Péter	« «	15.	«	79
Szontagh Gusztáv	« «	16.	«	131
— —	« «	17.	«	133
Tótüssy Béla	« «	15.	«	77
Vladar Lajos	« «	19.	«	323

Physikai laboratorium.

Antolik Károly: Az elektromos szikrarajzok előállításáról	85
Bartoniek Géza: Aluminium bevonása más fémekkel	40
Edelmann Sebő: A chrómsavas elem s a Gülcher-féle hőoszlop	39
— Ólomforrasztás	39
— Szigetelő és sav-álló ragasztószer	46
Kiss Károly: Kis légnyomások méréséről	240
Klupathy Jenő: Kisérletek a folyadékok felületi feszültségére	396
— A fémek különböző kiterjedése	398
— A kifeszített kaucsuk összehuzódása	398

Előadások.

Bartoniek Géza: Az absolut nedvesség mérésére alkalmas készülékekről	41
Fröhlich Izidor: A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról	41
Fuchs Károly: A capillaritás elméletének alapjairól	399
Grüber Nándor: A Gramme-féle gyürü elmélete (közölve a 183. l.)	139

Lap

HARKÁNYI BÉLA: Észak-Amerika néhány tudományos intézetéről (közölve a 139. l.) ... 90
HOÓR MÓR: A villámhárítók elméletéről (közölve a 333. l.) ... 139
— Az elektromótorokról ... 399
KLÉG LIPÓT: A lineáris complexusról ... 399
KLUPATHY JENŐ: Az állandó elektromos áram méréséről (közgyűlési előadás) ... 244
— Kisérletek az elektromos oscillatiókkal (közölve) ... 399
— Előadási kisérletek (l. 396. l.) ... 399
KÖNIG GYULA: Az egy- és többméretű sokaságok kölcsönösen egyértelmű vonatkoztatása ... 399
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről (közölve 359. l.) 90
RADOS GUSZTÁV: Nehány soralak az e számára (közölve a 49. l.) ... 90
RÉTHY MÓR: A folyadéksugarakról ... 41
SUTÁK JÓZSEF: A végtelen determináns elméletéről ... 41
SZILY KALMÁN: A körvonal üldöző görbéje, állandó távolság mellett (közölve a 353. l.) ... 399
TANGL KÁROLY: Néhány egyszerű forgási test niveau- és erőgörbéi (közölve a 90. l.) ... 399

Társulati ügyek.

A Math. Phys. Társulat második rendes közgyűlése ... 144
Értesítő a választmány juniusi üléséről (Határozat az elnök üdvözlése és a mathematikai és physikai tanuló-versenyek tárgyában) ... 197
Érettségi vizsgálatot tett tanulókhoz ... 200
A Math. Phys. Társulat ünnepélyes ülése (Elnök üdvözlése. A tanuló-verseny eredményének kihirdetése, s a díjak kiosztása) ... 305
Indítvány Bolyai János sírjának megjelölése tárgyában ... 252
Bolyai János síremlékére befolyt adományok első kimutatása ... 256
A Math. Phys. Társulat új tagjai ... 255 és 352

A MÁSODRENDŰ FORGÁSI FELÜLETEKRŐL.*

A másodrendű forgási felületek kritériumainak az a levezetése, melyet itt közlök, véleményem szerint egyszerűbb és egyenesebb azoknál, a melyek az ismert elemző geometriai tankönyvekben láthatók.

A levezetés alapját a következő két determináns-tétel alkotja:

1. ha a reális elemekből álló szimmetrikus determináns elenyészik, akkor az átlói aldeterminánsok között nem lehetnek különböző előjelűek;

2. ha a szimmetrikus determináns összes átlói aldeterminánsaival elenyészik, akkor velök együtt az összes aldeterminánsok elenyésznek.

Ez a két tétel egyszerű következése az elenyésző szimmetrikus determinánsok azon ismert tulajdonságának, mely szerint

$$A_{ii}A_{kk} - A_{ik}^2 = 0,$$

a hol A_{ii}, A_{kk}, A_{ik} az $a_{ik}|$ szimmetrikus determináns a_{ii}, a_{kk}, a_{ik} elemeinek aldeterminánsai.

I.

Ismeretes, hogy annak eldöntése vajon a derékszögű pontkoordinátás egyenletével adott másodrendű felület forgási felület-e, egyértelmű annak eldöntésével, hogy a felülethez tartozó Laplace-egyenletnek van-e többszörös gyöke?

A Laplace-egyenlet

---

* Előadva a Math. és Phys. Társulat 1893 november hó 30-án tartott szakülésén.

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

melynek, mint ismeretes, minden gyöke reális.

Ha az aldeterminánsokat szokásos módon Δ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ jelekkel jelöljük, akkor deriváltjai:

$$-\Delta'(\lambda) = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}$$
$$\frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = (a_{11}-\lambda) + (a_{22}-\lambda) + (a_{33}-\lambda)$$

Ha λ kétszeres gyök, akkor

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0$$

egyenletek együtt teljesülnek. Minthogy azonban Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} különböző előjelűek nem lehetnek, egyenként kell elenyészniök. De akkor az elébb említett 2. tétel szerint az összes aldeterminánsok elenyésznek.

Ha λ háromszoros gyök, akkor az előbbi feltételekhez járul még

$$\Delta''(\lambda) = 0.$$

Ez az elenyésző Δ_{11}, Δ_{22}, Δ_{33} determinánsok átlói aldeterminánsai összegének elenyészését kivánja, a mi megint csak úgy lehet, ha ezek egyenkint s velök együtt Δ összes elemei elenyésznek. Tehát λ csak akkor lehet háromszoros gyök, ha

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$$
$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda,$$

azaz ha a felület gömb. Ezt az esetet a következőkben kizárjuk.

Azt már láttuk, hogy ha λ kétszeres gyök, akkor Δ összes aldeterminánsai elenyésznek. A tétel azonban meg is fordítható következőképen:

ha van olyan szám λ, mely mellett Δ összes aldeterminánsai elenyésznek, akkor λ kétszeres gyök, mert a

$$\Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta'(\lambda) = 0$$

feltételeket kielégiti.

Az aldeterminánsok között Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{12} λ-ban lineárisok. Ezek elenyészése a következő egyenleteket adja:

1) $$a_{23}(a_{11}-\lambda) = a_{12}\,a_{13}$$

2) $$a_{31}(a_{22}-\lambda) = a_{23}\,a_{21}$$

3) $$a_{12}(a_{33}-\lambda) = a_{31}\,a_{32}.$$

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül egyik sem enyészik el, akkor a három egyenletből:

$$\lambda = a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{22} - \frac{a_{31}\,a_{33}}{a_{12}}.$$

Továbbá az 1), 2), 3) egyenletek közül kettő-kettő összeszorzásával meggyőződünk, hogy

$$\Delta_{11} = 0,\ \Delta_{22} = 0,\ \Delta_{33} = 0.$$

Tehát λ kétszeres gyök, ha

$$a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

b) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül egyik elenyészik, akkor, hogy 1), 2), 3) egyenletek teljesüljenek, legalább még egy másiknak is el kell enyésznie. Hogy a három analog esetet egybe foglalhassuk, legyen h, i, k valamely permutációja az 1, 2, 3 számoknak és tegyük fel, hogy

$$a_{hi} = a_{hk} = 0,\quad a_{ik} \gtrless 0.$$

Az összes aldeterminánsok elenyészésének feltételei:

$$\lambda = a_{hh},\quad (a_{ii}-a_{hh})\,(a_{kk}-a_{hh}) - a_{ik}^2 = 0.$$

c) Ha $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, akkor az összes aldeterminánsok elenyészésének feltétele:

$$\lambda = a_{ii} = a_{kk} \gtrless a_{hh}.$$

Az utolsó megszorítást a háromszoros gyök kizárásáért tettük oda.

Ezzel a forgási felületek összes kriteriumát kimerítettük.

II.

Ismeretes, hogy a Laplace-egyenlet λ gyökéhez tartozó főirány iránykoszinusainak (a_1, a_2, a_3) arányát

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,a_1 + a_{12}\,a_2 + a_{13}\,a_3 &= 0\\ a_{21}\,a_1 + (a_{22}-\lambda)\,a_2 + a_{23}\,a_3 &= 0\\ a_{31}\,a_1 + a_{32}\,a_2 + (a_{33}-\lambda)\,a_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenletek határozzák meg.

Legyen most λ kétszeres gyök.

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül egy sem enyészik el, akkor

$$\lambda = a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

Tehát a fennebbi három egyenlet helyére lesz

$$a_{12}a_{13}a_1 + a_{23}a_{21}a_2 + a_{31}a_{32}a_3 = 0.$$

E szerint az

$$a_{12}a_{13}x_1 + a_{23}a_{21}x_2 + a_{31}a_{32}x_3 = 0$$

síkban képviselt minden irány főirány. Tehát ez a sík a forgási felület parallel-köreinek iránysíkja.

b) Ha

$$a_{hi} = a_{hk} = 0, \quad a_{ik} \gtrless 0,$$

akkor

$$\lambda = a_{hh}, \quad (a_{ii}-a_{hh})\,(a_{kk}-a_{hh}) - a_{ik}^2 = 0.$$

Tehát a parallel-körök iránysikjának egyenlete:

$$(a_{ii}-a_{hh})\,x_i + a_{ik}x_k = 0$$

vagy

$$a_{ki}x_i + (a_{kk}-a_{hh})\,x_k = 0.$$

c) Ha

$$a_{23}=a_{31}=a_{12}=0, \quad \lambda = a_{ii} = a_{kk} \gtrless a_{hh}$$

akkor a parallel-körök iránysíkjainak egyenlete:

$$x_h = 0.$$

Válvi Gyula.

A SÚRLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

I. A súrlódás törvényéről.

1. E lapok második évfolyamában három, a súrlódás elméletébe vágó közlemény jelent meg. Maksay Zsigmond tagtárs úr a II. kötet füzetében [1] egy vertikális tengelyű nyugvó hengeren mozgó súlyos anyagi pontot tárgyal azon hallgatva tett hipotézissel, hogy a súrlódási koefficziens a mozgó pont sebességével arányos. *E sorok írója* a következő füzetben [2] ugyanezen, maga kitűzte problémával foglalkozik Coulomb ama törvénye alapján, hogy a súrlódási koefficziens állandó. Ugyanabban a füzetben Fröhlich Izidor tagtárs úr a Kirchhoff súrlódási egyenleteiben előforduló mennyiségek mechanikai jelentésével foglalkozik. Megjelent továbbá a lipcsei tudós társaság 1893. évi juliusi füzetében Mayer A. tanárnak egy nagyobb dolgozata, a ki a pont mozgását adott nyugvó vonalon vagy felületen ugyancsak Coulomb súrlódási törvénye alapján tárgyalván, figyelemre méltó eredményekre jő.

Valljuk be azonban, hogy a midőn régi megszokásból azt mondjuk, hogy a Coulomb törvénye, mely szerint a súrlódási együttható *független*, többek között, a súrlódó testek *relatív sebességétől*, a tapasztalatokkal igen közel megegyez, a tényeknek csak bizonyos csoportjára gondolunk. Mert tényleg a törvény fennállása nincsen biztositva még szilárd testek *közvetetlen* súrlódása esetén sem.

---

[1] L. *Math. Phys. Lapok.* II. köt. 201. l.
[2] L. *Math. Phys. Lapok.* II. köt. 269. l.

2. COULOMB és MORIN kisérleteiben a testek sebessége csak közepes (másodperczenként 0—4 méter) volt; ugyanaz áll WARBURG és BABO[1] újabb kisérleteiről is, melyek nagyon gondosak ugyan, de melyekről a sebességek kicsinységén kivül megjegyzendő az is, hogy *csakis* csiszolt üvegekkel hajtatván végre, belőlük más szilárd testekre nem lehet következtetéseket vonni.

Ellenben DOUGLAS GALTON,[2] angol kapitánynak,. a következő táblázatban foglalt, a *sok* egyenlő értelmű közül kiragadott, egyik kisérletsorának adatai minden kétséget kizáró módon arról tesznek tanuságot, hogy elegendő nagy relativ sebességek esetén nagyon is változó a fémeknek a súrlódási koefficziense, — hogy jelesül statikai értékének csekély törtrészére is lesülyedhet:

Átlagos sebesség a kerék kerületi pontjain			Súrlódási együttható a kisérletezés			
	Angol mérföldek óránként	Angol lábak másodperczenként	3-ik másodperczében	5—7-ik másodperczében	12—16-ik másodperczében	24—25-ik másodperczében
1	60	88	0·062	0·054	0·048	0·043
2	50	73	0·100	0·070	0·056	—
3	45	65	0·125	—	—	—
4	40	58	0·134	0·100	0·080	—
5	30	43	0·184	0·111	0·098	—
6	20	29	0·205	0·175	0·128	0·070
7	10	14	0·320	0·209	—	—
8	5	7	0·360	—	—	—

E kisérletsornál lóvasuti kocsi gyorsan forgó kerekének *acél* abroncsához, *öntött vasból* készült fékező surlódott. A súrlódási együtthatót k-val, a kerék kerülete pontjainak sebességét v-vel jelölvén, az egy-egy oszlopban levő adatokat a

[1] Wiedemann Annalen I. kötet 406. lap.

[2] Engineering 1878, 25. kötet, 469 lap és 1878, 26. kötet, 153, 386, 295. lapok. Railway Brakes; on the coefficient of friction from experiments no Railway Brakes, By Captain Douglas Galton.

$$k = \frac{a}{b+v}$$

képlet foglalja össze, hol a és b egy-egy oszlopra nézve állandók, míg a különböző oszlopokban különböző értékeket vévén fel direkte az időnek, t-nek a függvényei.

Sajnos, hogy GALTON hőmérsék-méréseket nem eszközölvén egyidejüleg, nem állapítható meg kisérletsoraiból, hogy a súrlódási együttható *két* független változó, a v sebesség és a ϑ temperatura függvénye-e, vagy *csak* a temperaturáé, és hogy milyen függvénye.[1]

Hogy pedig a súrlódási együttható a hőmérséklet változásával nem marad állandó, minélfogva *nagy hőmérsékletváltozásokkal összekötött súrlódások esetén a* COULOMB *törvénye nem alkalmazható*, az régen ismeretes. Épen azért nem merném ezen kisérletekből PETROFF,[2] orosz tanárral azt a következtetést vonni, hogy ezek a kisérletek halomra döntik COULOMB törvényének fennállását még szilárd testeknél is; de mindenesetre *nagyon kétségessé* teszik, hogy vajon *minden* sebességnél alkalmazható-e *még csak állandó hőmérséklet* esetére is?

GALTON-nal egyező eredményekre jött már előbb BOCHET[3] is; az ő kisérleteiben szintén nagyok voltak a sebességek (4—25 méter másodperczenként).

3. Ha már nincs biztosítva COULOMB *súrlódási törvénye* még

---

[1] Ha ugyanis a hőmérséklet is méretett volna, akkor a kisérletsorozatok összefoglalhatók volnának a következő két egyenletbe:

$$1)\ k = f_1(v, t) \qquad 2)\ \vartheta = f_2(v, t);$$

es ezekből az egyenletekből eliminálván a t-ét, kiadódnék

$$k = f(v, \vartheta).$$

[2] Neue Theorie der Reibung von N. PETROFF. A Szt-Pétervári tud. Akadémiától jutalomdijjal megkoszorúzott munka. Aus dem Russischen übersetzt von L. WURZEL. 1887.

[3] BOCHET «Sur le frottement de glissement». Kivonatban Compt. Rend. 1858, 46. köt., pag. 802.

szilárd testek közvetetlen érintkezése esetén sem, *teljesen érvénytelen* abban az esetben, *ha a két szilárd test folyadékkal, kenőszerrel van elválasztva.* Az idevonatkozó fontosabb kisérletek kritikai ismertetésére nézve PETROFF fentidézett munkájára utalván, itt csak HIRN* csapsúrlódásra vonatkozó kisérleti eredményeit szavakban összegező e következő pontozatokat idézem:

a) «Ha a súrlódó felületek bőségesen meg vannak kenve jó és eléggé nyúlós olajjal, ha továbbá a felületekre ható nyomás nem olyan nagy, hogy az olajat kiszoritsa, és ha végül a különböző forgás sebességekkel végzett kisérletekben a hőmérséklet minden részben egy és ugyanaz, — akkor *a súrlódással egyensúlyban levő erők csaknem arányosak a sebességekkel.*» (A MAKSAY-tól használt hipotézissel egyező törvény.)

b) «Ha pedig a súrlódó felületek szükesen vannak megkenve, vagy ha a mozgás sokáig megy végbe ugyanavval az olajmennyiséggel, vagy ha az olaj nagyon híg, elannyira, hogy a kenő réteg kis sebességeknél sokkal vékonyabb, mint nagyoknál, vagy ha a nyomás a súrlódó felületek méreteihez képest túlságosan nagy, a hőmérséklet pedig állandó marad, akkor a súrlódással egyensúlyban levő erők a sebességnek oly pozitiv hatványával arányosak, melynek kitevője < 1 és az $\frac{1}{2}$-hez annál közelebb áll, minél kedvezőtlenebbek a viszonyok.»

c) «Ha a súrlódó felületek nincsenek megkenve, és nagy nyomás folytán levegő nem jöhetvén a súrlódó felületek közé, azok egymástól éppenséggel nincsenek elválasztva; egy szóval, ha a súrlódás közvetetlenné válik, akkor a sebesség befolyása teljesen megszünik.» (Ebben az esetben tehát COULOMB törvénye áll.)

d) «Ha a hőmérsékletre legkevésbbé sem ügyelünk, és a súrlódó felületeket épen úgy olajozzuk, a mint gépészeket szokás, akkor ebben az általános esetben nagy hiba nélkül elfogadható, hogy a súrlódás a sebesség négyzetgyökével arányos, úgy hogy tehát, ha a

---

* Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse; XXVI. 1854, pag. 188. Études sur les principaux phénomènes, que présentent les frottements médiats, etc.

sebességek viszonyát 1:4:9:16 stb. számok viszonya fejezi ki, akkor az előidézett súrlódási erők viszonya 1:2:3:4 stb. számok viszonyával egyenlő.»

PETROFF fentidézett munkájában a csapsúrlódás törvényét elméleti úton a következő hidrodinamikai probléma megoldásával kisérté megtalálni: Két végtelen hosszú, közös tengelyű, különböző sugarú szilárd körhenger közötti ür folyadékkal lévén megtöltve, a belső körhenger állandó sebességgel forog tengelye körül, noha a folyadékrészek úgy egymással, mint a szilárd falakkal súrlódnak. Mekkora a forgató nyomaték, mely ezeket a súrlódásokat egyensúlyban tartja? A megoldást kellő általánosítással *véges* hosszúságú körhengerekre is alkalmazván, az eredmény a következő képletben nyer kifejezést:

$$F = \frac{\mu Q U}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}},$$

hol F az összes belső henger felületén alkalmazva gondolt úgynevezett, összes súrlódási ellenállás, Q a belső henger felülete, U a kerület sebessége, e a két henger sugarainak különbsége, azaz a folyadékréteg vastagsága, μ a folyadék belső, λ_1 és λ_2 külső súrlódás-koefficiense a két henger anyagára vonatkozólag.

E képlet teljesen elütő attól, melyre a COULOMB törvényének csapsúrlódás számitásokra való alkalmazása vezet; és miként PETROFF kimutatja, nem áll ellenmondásban HIRN észleleteivel. Különösen HIRN fentidézett 1) alatti tétele, mely egyedül alapszik ezen elméletben tett föltevéseket kielégitő kisérletsorokon, *teljesen* megegyez PETROFF képletével; ugyanis

$$\frac{Q}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}} = c$$

a csapágy megteltségénél fogva közel állandó volt HIRN azon kisérleteiben, melyek az 1) tételre vezették, úgy hogy PETROFF képlete ebben az esetben igy irandó:

$$F = c\mu U;$$

a súrlódási ellenállás arányos a csap kerületi sebességével. Az ezen eredményre vezető különböző kenőolajokkal eszközölt kisérlet-soroknál a nyomás közel változatlan volt; ennélfogva ezen kisérleteknél *a súrlódási koefficiens is arányos volt az érintkezési pontok relatív sebességével.* PETROFF még azt is megvizsgálta, hogy a kisérletsorok igazolják-e az F súrlódási ellenállásnak a μ mennyiséggel, tehát a kenőolajok belső súrlódási együtthatójára való arányosságát; a megegyezés foka meglepő.

A tényálladék pontos megállapítása czéljából PETROFF maga is tett nagyszámú észleletet, melyek — miként a fordító előszavában irja — HIRN eredményeivel egyezők és PETROFF elméletét fényesen igazolják.

4. Foglaljuk össze az eredményeket:

a) A súrlódási együttható állandóságának törvénye még szilárd testek közvetetlen érintkezésénél se alkalmazható, mihelyt az érintkezési pontok relativ sebessége elegendő nagy arra nézve, hogy jelentékeny hőmérsékletváltozást okozzon, a mi gyakran fordul elő.

b) GALTON kisérletei után még az is kétes, hogy a törvény a szóban levő közvetetlen érintkezésnél még állandó hőmérséklet esetén is alkalmazható-e akkor, a midőn az érintkezési pontok sebessége bizonyos határt túlhalad; a milyen sebesség előfordulása a gyakorlatban épen nem ritka dolog. (L. a 2. pont végén.)

c) Végül szilárd testeknek *nem közvetetlen* érintkezése esetén *a súrlódási koefficiens* határozottan függ az érintkező pontok relativ sebességétől, és vannak olyan könnyen teljesíthető föltételek, melyek mellett *ezen sebességnek épen első hatványával arányos* (L. a 3. pontot.)

Ilyen körülmények között ajánlatos azon álláspont elfoglalása, mely a KIRCHHOFF súrlódási egyenleteiben kifejezésre jut, és épen gyakorlati szempontból kivánatos az elméletnek kiépítése nemcsak a COULOMB törvénye alapján. Ilyen általánositással kapcsolatosan kivánom itt megismertetni és tovább fejteni a MAYER A. föntidézett dolgozatában foglalt eredményeket; általánositván egy-

úttal KIRCHHOFF egyenleteit is olyképen, hogy a pont mozgása tárgyalható legyen nemcsak nyugvó, hanem mozgó felületen és vonalon is.* *Réthy Mór.*

---

* Kapcsolatban a megelőző czikkel, s a t. szerkesztőség beleegyezésével legyen szabad e Lapok II. kötete 254—256. lapjain megjelent közleményemhez egy utólagos észrevételt tennem.

Ugyanis több tagtárs e czikkem oly értelmezéséről értesített, mintha a benne idézett feladatnak MAKSAY ZSIGMOND úrtól származó megfejtését nem helyeselném, azt a tapasztalással ellenkezőnek s COULOMB súrlódási törvényét kizárólagosan érvényesnek tartanám.

Minden félreértés kikerülése czéljából kijelentem, hogy czikkem czélja csak az volt, MAKSAY úr idézett dolgozatában minden közelebbi magyarázat és indokolás nélkül használt h=const. feltevésének az *értelmét, jelentését* kifejteni és megjegyezni, hogy ez a hypothesis eltér attól, melyet súrlódási problémák rendes tárgyalásánál hallgatagon a számítás alapjául szoktunk venni, t. i. a COULOMB-féle törvénytől.

Kétségkivül tudta MAKSAY úr e hypothesis jelentését de nem tartotta szükségesnek ezt külön, szóval is kifejezni, míg a physikus olvasó, ki a h=const. suppositió mechanikai értelme iránt érdeklődött, ezt csak némi számítás útján tudta megállapítani.

MAKSAY úrnak e hypothesise azonban nemcsak mathematikai szempontból érdekes és megengedhető, hanem mechanikai szempontból is látszik lehetségesnek, ha a megelőző czikk 3. pontjának a csapsurlódásra vonatkozó kisérletsorozata *a)* alatti mechanikai viszonyait e feladat pontmozgására nézve lényegükben fennállóknak veszszük fel. *Fröhlich I.*

AZ ADJUNGÁLT HELYETTESÍTÉSEK ELMÉLETÉRŐL.*

(Első közlemény.)

Az

$$y_\alpha = c_{\alpha 1}x_1 + c_{\alpha 2}x_2 + \ldots + c_{\alpha n}x_n \qquad S_1)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés elmélete velejében nem más mint a

$$c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha n}$$

értékrendszerek összességének, azaz a

$$\| c_{\alpha\beta} \|$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

matrix elmélete, mely csak konkrétebb alakot ölt, midőn az x_α határozatlanok felhasználásával a matrix elemeit egyesítjük n lineár alak együtthatóiban és az azokból alkotott lineár alakrendszert tárgyaljuk. A $\|c_{\alpha\beta}\|$ matrix tartalmát azonban elemei magukban véve még nem merítik ki; belőle még különböző fokú aldeterminánsok kiválthatók és csak ezeknek összessége teszi ki a matrix teljes tartalmát.

Legyenek a belőle képezhető m-edfokú aldeterminánsok:

$$C_{i1}^{(m)}, C_{i2}^{(m)}, \ldots, C_{i\mu}^{(m)},$$
$$\left(i = 1, 2, \ldots, \mu;\ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

a hol

$$C_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} c_{i_1 k_1} & c_{i_1 k_2} & \ldots & c_{i_1 k_m} \\ c_{i_2 k_1} & c_{i_2 k_2} & \ldots & c_{i_2 k_m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{i_m k_1} & c_{i_m k_2} & \ldots & c_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

---

* Ez az első közlemény megjelent egyszersmind a *Math. és Természettudományi Értesítő* XI. kötetében.

és

$$i=(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m)$$
$$k=(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m)$$

az 1, 2, 3, . . . n elemek m-ed osztályú kombinációinak rövidített jelzései.

Az adott matrixból levezettük tehát a

$$\| C_{ik}^{(m)} \|_{(i,\,k,\,=\,1,\,2,\,3,\,\ldots,\,\mu;\ \ m\,=\,1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n)}$$

adjungált matrixokat, melyek ennek teljes tartalmát kimerítik, és melynek tanulmányozása a

$$X_i=C_{i1}^{(m)}X_1+C_{i2}^{(m)}X_2+\ \ldots\ +C_{i\mu}^{(m)}X_\mu \qquad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,\mu;\ \ m=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n)}$$

lineár helyettesítések elemzését teszi szükségessé. Az S_1 helyettesítésből ily értelemben n új helyettesítés keletkezik. Ezeket akarjuk az S_1 *adjungált helyettesítéseinek* nevezni.

Az adjungált helyettesítések tárgyalására elmélet és gyakorlat egyformán utal; a geometriai alkalmazások ezt egyenesen követelik, de együttes felfogásuk a tiszta elméletben is gyakran termékeny szempontokhoz vezet.

Az adjungált helyettesítések elméletére vonatkozó alaptételeknek felállítása és bebizonyítása, továbbá több irányban való alkalmazása teszi jelen cikksorozat tárgyát.

E tétel a következő

Ha az

$$y_\alpha=c_{\alpha1}x_1+c_{\alpha2}x_2+\ \ldots\ +c_{\alpha n}x_n \qquad {\scriptstyle (\alpha=1,\,2,\,\ldots,\,n)} \qquad S_1)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének,

$$\varphi_1(\rho)\equiv\begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & \ldots & c_{n1} \\ c_{21} & c_{22}-\rho & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}-\rho \end{vmatrix}=0$$

gyökei

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \text{ *},$$

akkor az m-edik adjungált helyettesítés karakterisztikus egyenletének, a

$$\Phi_m(\rho) \equiv \begin{vmatrix} C_{11}^{(m)} - \rho & C_{12}^{(m)} & \ldots & C_{1\mu}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{21}^{(m)} - \rho & \ldots & C_{2\mu}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{\mu 1}^{(m)} & C_{\mu 2}^{(m)} & \ldots & C_{\mu\mu}^{(m)} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet gyökei a

$$\rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_m}$$

*szorzatból oly módon nyerhetők, hogy $i_1, i_2, \ldots, i_m$ helyébe rendre az 1, 2, 3. . . . , n elemek összes m-edosztályú kombinációit helyettesítjük.***

A $C_m(\rho) = 0$ egyenlet tehát e $C_1(\rho) = 0$ egyenletnek rezolvense, még pedig ama rezolvense, a melynek segítségével a $C_1(\rho) = 0$ k-adfokú tényezői meghatározhatók.***

A jelen alkalommal e tételnek bebizonyításán kívül még csak két alkalmazását akarom bemutatni, remélvén, hogy egyéb alkalmazásokra még visszatérhetek. Az egyik az egész függvények tényezőkre való felbontásának elméletére vonatkozik és az ott szereplő rezolvens egyenletek előállítására új és az eddigieknél egyszerűbb módszert szolgáltat; a második alkalmazás a determinán-

---

* Az 1) helyettesítésről felteszszük, hogy együtthatói teljesen határozatlanok, ekkor a $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ értékek mindig egymástól különbözők lesznek.

** E tétel részben megadja a feleletet arra a kérdésre is, melyet «Az orthogonális helyettesítések elméletéről» című dolgozatomban felvetettem és a mely valamely orthogonális helyettesítés és ennek adjungált helyettesítései közt létező összefüggésre vonatkozik. L. *Math. és Természettudom. Értesítő* XI. kötet.

*** Lásd KÖNIG GYULA értekezését: «Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme» Mathematische Annalen Bd. 15. pag. 161.

sok elméletéből ismeretes FRANKE-tételnek* új bebizonyítása, mely a fönt kimondott tételünk alapján minden számítás mellőzésével történhet.

1. Adjungált helyettesítések karakterisztikus egyenlete.

1. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy ha

$$\rho\xi_\alpha = c_{\alpha 1}\xi_1 + c_{\alpha 2}\xi_2 + \ldots + c_{\alpha n}\xi_n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

a hol $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ oly értékrendszert jelent, melynek nem minden eleme zérus, akkor ρ gyöke a

$$\Phi_1(\rho) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek és a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ értékrendszer az S_1 helyettesítés kettős elemének nevezhető.

Viszont a $\Phi_1(\rho) = 0$ egyenlet minden gyökének megfelel egy-egy kettős elem, úgy hogy ezeknek száma az S_1 együtthatóinak határozatlan volta mellett pontosan n.

Legyenek a $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ gyököknek megfelelő kettős elemek rendre

$$\xi_\beta = (\xi_{\beta 1}, \xi_{\beta 2}, \ldots, \xi_{\beta n}) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

úgy hogy

$$\rho_\beta \xi_{\beta\alpha} = c_{\alpha 1}\xi_{\beta 1} + c_{\alpha 2}\xi_{\beta 2} + \ldots + c_{\alpha n}\xi_{\beta n} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

akkor ismét a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók határozatlansága folytán a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

* Franke «Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten.» Crelle Journal Bd. 61. pag. 350.

determináns a zérustól különböző. Ennek bebizonyítására elégséges kimutatnunk, hogy Δ nem azonosan zérus, azaz nem tűnhetik el a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók bármely értékrendszerénél. Ez pedig a következőkből derül ki. Az S_1 lineár helyettesítést teljesen meghatározza a megfelelő értékrendszerek $(n+1)$ számmal lévő párjának megadása. Ha ezeket úgy választjuk, hogy az első n párban,

$$(\xi_1, \eta_1), \quad (\xi_2, \eta_2) \ldots (\xi_n, \eta_n),$$

foglalt értékrendszerek megegyezők legyenek, és hogy továbbá az ezeknek segítségével képezett $|\xi_{\beta\alpha}|$ determináns a zérustól különböző értéket vegyen föl (a mi végtelen sokféleképen teljesíthető) az $(n+1)$-dik párt, (ξ_{n+1}, η_{n+1})-et, pedig egészen tetszőlegesen, akkor biztosak lehetünk az iránt, hogy az ekként meghatározott S_1 helyettesítés kettős elemeiből, a ξ_α-kból képezett Δ determináns, a zérustól különböző lesz.

2. Legyenek most már a

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \ldots & \xi_{i_1 n} \\ \xi_{i_2 1} & \xi_{i_2 2} & \ldots & \xi_{i_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{i_m 1} & \xi_{i_m 2} & \ldots & \xi_{i_m n} \end{matrix} \right\|$$

matrix m-edfokú aldeterminánsai rendre

$$\Xi_{i1}^{(m)}, \ \Xi_{i2}^{(m)}, \ \ldots, \ \Xi_{ik}^{(m)}, \ \ldots, \ \Xi_{i\mu}^{(m)},$$
$$\left(i = 1, 2, \ldots, \mu; \ \mu = \binom{n}{m}\right)$$

a hol

$$\Xi_{ik}^{(m)} = \begin{vmatrix} \xi_{i_1 k_1} & \xi_{i_1 k_2} & \ldots & \xi_{i_1 k_m} \\ \xi_{i_2 k_1} & \xi_{i_2 k_2} & \ldots & \xi_{i_2 k_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{i_m k_1} & \xi_{i_m k_2} & \ldots & \xi_{i_m k_m} \end{vmatrix},$$

akkor a megelőzők alapjára világos, hogy i minden értékénél a

$$\Xi_{ik}^{(m)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

sorozat tartalmaz a zérustól különböző elemet, mert az ellenkező esetben, kellene, hogy Δ is zérussal legyen egyenlő, a mit a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók határozatlansága kizár.

Ezt megjegyezvén képezzük most már a

$$C_{k1}^{(m)} \Xi_{i1} + C_{k2}^{(m)} \Xi_{i2} + \ldots + C_{k\mu}^{(m)} \Xi_{i\mu}$$

összeget. Ez mint közvetetlenül látható, nem egyéb mint a

$$\begin{Vmatrix} c_{k_1 1} & c_{k_1 2} & \ldots & c_{k_1 n} \\ c_{k_2 1} & c_{k_2 2} & \ldots & c_{k_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k_m 1} & c_{k_m 2} & \ldots & c_{k_m n} \end{Vmatrix}$$

és

$$\begin{Vmatrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \ldots & \xi_{i_1 n} \\ \xi_{i_2 1} & \xi_{i_2 2} & \ldots & \xi_{i_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{i_m 1} & \xi_{i_m 2} & \ldots & \xi_{i_m n} \end{Vmatrix}$$

matrixok megfelelő m-edfokú determinánsainak szorzata és mint ilyen a Binet-Cauchy-féle tétel alapján m-edfokú determináns alakjában állítható elő, melynek elemei a két matrix sorainak kompoziciójából adódnak ki. Ennek következtében

$$\sum_{l=1}^{\mu} C_{kl}^{(m)} \Xi_{il} = \begin{vmatrix} \Sigma c_{k_1 \alpha} \xi_{i_1 \alpha}, & \Sigma c_{k_1 \alpha} \xi_{i_2 \alpha}, & \ldots & \Sigma c_{k_1 \alpha} \xi_{i_m \alpha} \\ \Sigma c_{k_2 \alpha} \xi_{i_1 \alpha}, & \Sigma c_{k_2 \alpha} \xi_{i_2 \alpha}, & \ldots & \Sigma c_{k_2 \alpha} \xi_{i_m \alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma c_{k_m \alpha} \xi_{i_m \alpha}, & \Sigma c_{k_m \alpha} \xi_{i_m \alpha}, & \ldots & \Sigma c_{k_m \alpha} \xi_{i_m \alpha} \end{vmatrix},$$

a hol a determináns elemeiben szereplő összegek mindegyike az $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ értékekre kiterjesztendő.

Ha most az 1) alatti relációkat tekintetbe veszszük, továbbá írhatjuk, hogy:

$$\sum_{l=1}^{\mu} C_{kl}^{(n)} \Xi_{il}^{(m)} = \begin{vmatrix} \rho_{i_1} \xi_{i_1 k_1} & \rho_{i_2} \xi_{i_2 k_2} & \ldots & \rho_{i_m} \xi_{i_m k_1} \\ \rho_{i_1} \xi_{i_1 k_2} & \rho_{i_2} \xi_{i_2 k_2} & \ldots & \rho_{i_m} \xi_{i_m k_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{i_1} \xi_{i_1 k_m} & \rho_{i_2} \xi_{i_2 k_m} & \ldots & \rho_{i_m} \xi_{i_m k_m} \end{vmatrix}$$

$$= \rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_m} \Xi_{ik}^{(m)},$$

úgy hogy

$$\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}\Xi_{ik}^{(m)} = C_{k1}^{(m)}\Xi_{i1}^{(m)} + C_{k2}^{(m)}\Xi_{i2}^{(m)} + \ldots + C_{k\mu}^{(m)}\Xi_{i\mu}^{(m)},$$

a minek következtében a

$$\underset{(i=1,2,\ldots,\mu)}{\Xi_{i1}, \Xi_{i2}, \ldots, \Xi_{i\mu}}$$

értékrendszerek, melyek mindegyikében zérustól különböző elem is fordul elő, az S_m helyettesítés kettős elemeit határozzák meg, minek folytán a μ számmal lévő $\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}$ szorzatok a

$$\Phi_m(\rho) = 0$$

karakterisztikus egyenletnek gyökei, még pedig összes gyökei, mert mint könnyen kimutatható a $c_{\alpha\beta}$ együtthatók határozatlanságánál fogva a $\rho_{i_1}\rho_{i_2}\ldots\rho_{i_m}$ szorzatok mindannyian különbözők.

Evvel a bevezetésben jelzett tételt teljesen bebizonyítottuk.

2. Egész függvények tényezőkre bontása.

Az 1. számban bebizonyított tétel segítségével új módszert fejthetünk ki tetszőleges n-edfokú egyenlet tényezőkre bontásánál szereplő rezolvensek felállítására.

Sikerül ugyanis kimutatni azt, hogy ha adva van a tetszőleges

$$g(\rho) \equiv \rho^n + a_1\rho^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n = 0$$

egyenlet (többszörös gyökök már el vannak távolítva), akkor mindig raczionális úton találhatunk oly lineár helyettesítést, melynek karakterisztikus egyenlete az adott egyenlettel megegyezik. E helyettesítés adjungált helyettesítéseit képezvén, ezeknek karakterisztikus egyenletei szolgáltatják az adott egyenlet összes tényezőkre bontó rezolvenseit.

Ezzel új utat jelöltünk ki e rezolvensek képezésére, a melyen ezeknek előállítása egyszerűbben eszközölhető, mint az eddig ismert módszerek alapján, a mennyiben itt irraczionalitásoknak még átmeneti használata sem szükséges. E módszer alapján még azonfelül e rezolvenseket *explicit alakban* nyerjük.

A módszer lényegét az adjungált helyettesítések karakterisztikus

egyenletére vonatkozó tételen kívül az a megjegyzésen teszi, hogy minden egyenlet előállítható mint raczionális úton előállítható helyettesítés karakterisztikus egyenlete.

Ez utóbbi megjegyzést pedig a következő módon okolhatjuk meg. Legyen

$$g_k(\rho) \equiv \rho^{n-k} + a_1\rho^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k}$$

akkor

$$g_{k-1}(\rho) = \rho g_k(\rho) + a_{n-k+1}.$$

Most már az adott $g(\rho)$ a következő alakokban állítható elő:

$$g(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \rho g_1(\rho) + a_n & \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1(\rho) & -1 \\ a_n & \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \rho g_2(\rho) + a_{n-1} & \rho & -1 \\ a_n & 0 & \rho \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_2(\rho) & -1 & 0 \\ a_{n-1} & \rho & -1 \\ a_n & 0 & \rho \end{vmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{vmatrix} g_{n-1}(\rho) & -a & 0 \ldots . & 0 \\ a_2 & \rho & -1 \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & \rho \ldots . & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho + a_1 & -1 & 0 \ldots . & 0 \\ a_2 & \rho & -1 \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & \rho \ldots . & \rho \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & 0 & 0 \ldots . & \rho \end{vmatrix}$$

De ebből közvetlenül látható, hogy a

$$g(\rho) = 0$$

egyenlet az

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_1x_1 + 1.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + \ldots + 0.x_n \\ y_2 &= -a_2x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + \ldots + 0.x_n \\ y_3 &= -a_3x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 1.x_4 + \ldots + 0.x_n \\ &\ldots \\ y_n &= -a_nx_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + \ldots + 0.x_n \end{aligned} \qquad 2)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenlete.

Minthogy a karakterisztikus függvény a helyettesítésben foglalt lineár alakok invariánsa 2)-ből tetszőleges számú lineár helyettesítés vezethető le, melynek karakterisztikus egyenlete szintén $g(\rho)=0$.

3. Franke tétele.

E tétel valamely determináns m-edfokú aldeterminánsaiból képezett determinánsokra vonatkozik és az előbb bevezetett jelzéseink segítségével a következő egyenlőség segítségével fejezhető ki:

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = \left| c_{\alpha\beta} \right|^{\binom{n-1}{m-1}}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, \mu;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez az egyenlőség az 1. számban levezetett tételből tüstént következik. Ugyanis

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = \Phi_m(0) = \Pi \rho_{i_1} \rho_{i_2} \ldots \rho_{i_m},$$

a hol a szorzás az 1, 2, 3, . . . , n elemek összes m-edosztályú kombinációira kiterjesztendő. Minthogy a $\Pi \rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_m}$ szorzatban minden egyes ρ annyiszor fordúl elő, mint a hány $(m-1)$-ső osztályú kombináció képezhető $n-1$ elemből, lesz

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = (\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n)^{\binom{n-1}{m-1}};$$

minthogy továbbá

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n = \Phi_1(0) = \left| c_{\alpha\beta} \right|$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

végül lesz, amint be volt bizonyitandó:

$$\left| C_{ik}^{(m)} \right| = \left| c_{\alpha\beta} \right|^{\binom{n-1}{m-1}}$$

Rados Gusztáv.

A BIQUADRATIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSÁHOZ.

Kézikönyveinkben a negyedfokú egyenletek algebrai megoldásának közönségesen háromféle módját szokták tárgyalni:* a Luigi Ferrari, a Descartes és Euler-félét. A megoldásokat elemezvén, azt találjuk, hogy — a mint a dolog természetében rejlik — mindegyik a negyedfokú egyenlet 4 gyökéből alkotható valamely racionális függvényre állit fel egyenletet. Igy a Ferrari-féle az x_1, x_2, x_3, x_4, gyököknek a következő három értékű függvényére:

$$x_1x_2 + x_3x_4$$

állitja fel a harmadfokú egyenletet, a Descartes-féle az (x_1+x_2)-re állitja fel a hatodfokú egyenletet, mely az esetben, midőn a negyedfokú egyenletben x^3 együtthatója 0, kubikus és quadratikus egyenletekre vezet és végre az Euler-féle módszerben ugyanez esetben az $(x_1+x_2)^2$-re felállitott egyenlet harmadfokú.

A következőkben x_1x_2-re állitjuk fel a rezolvens-egyenletet, még pedig nem a szubsztituczió elmélet nyújtotta módszerrel, mely hosszadalmas számitást kiván, hanem Rados G. úrnak az adjungált helyettesitések elméleteről irt értekezése** nyomán, ezzel az ott kifejtett eljárásnak gyakorlati alkalmazását mutatván be.

Megjegyezzük előzőleg, hogy az

$$f(x) \equiv x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad A)$$

egyenletben mindig tehető $a_4 = 1$, mert ha $a_4 \gtrless 1$, akkor

$$x = y\sqrt[4]{a_4}$$

---

* L. König Gyula Bevezetés a felsőbb algebrába 1877. 167. l.

** Math. és Physikai Lapok jelen füzetében.

helyettesítéssel oly alakra hozzuk az egyenletet, hogy utolsó együtthatója 1 legyen.

Rados úr az említett értekezésében a következő tételt mutatja ki:

Ha az

$$y_\alpha = c_{\alpha_1} x_1 + c_{\alpha_2} x_2 + \ldots + c_{\alpha_n} x_n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének

$$\Phi_1(\rho) \equiv \begin{vmatrix} c_{11}-\rho & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\rho & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n_1} & c_{n_2} & \ldots & c_{n_n}-\rho \end{vmatrix} \pm 0$$

gyökei:

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n,$$

akkor az m-ik adjungált helyettesítés karakterisztikus egyenletének, a

$$\Phi_m(\rho) \equiv \begin{vmatrix} C_{11}^{(m)}-\rho & C_{12}^{(m)} & \ldots & C_{1\mu}^{(m)} \\ C_{21}^{(m)} & C_{22}^{(m)}-\rho & \ldots & C_{2\mu}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ C_{\mu 1}^{(m)} & C_{\mu 2}^{(m)} & \ldots & C_{\mu\mu}^{(m)}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\mu = \binom{n}{m}\right)$$

egyenlet, gyökei a

$$\rho_{i_1}\ \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_m}$$

szorzatból oly módon nyerhetők, hogy $i_1, i_2, \ldots, i_m$ helyébe rendre az $1, 2, \ldots, n$ számok összes m-ed osztályú kombinációit helyettesítjük.

Hogy mit kelljen adjungált helyettesítés alatt érteni, arra vonatkozólag az említett értekezésre utalok.

Ugyanez értekezésében Rados úr megmutatja, hogy minden raczionális egész függvény valamely lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének tekinthető. Így pl. az *A*) alatti negyedfokú egyenlet azon helyettesítés karakt. egyenlete, melynek együtthatói:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & -a_1, & 1, & 0, & 0 \\ \text{II} & -a_2, & 0, & 1, & 0 \\ \text{III} & -a_3, & 0, & 0, & 1 \\ \text{IV} & -1, & 0, & 0, & 0: \end{array} \qquad B)$$

mert ennek a karakt. egyenlete:

$$\begin{vmatrix} a_1+\rho & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & \rho & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & \rho & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} \equiv \rho^4+a_1\rho^3+a_2\rho^2+a_3\rho+1=0.$$

Ha a B) alatti rendszerből az összes másodosztályú aldeterminánsokat képezzük, még pedig úgy, hogy az III, IIII, IIV, IIIII, IIIV, IIIIV sor kombinációkból készített matrixokból alkotjuk a 36 aldeterminánst, akkor az így nyert aldeterminánsok egy lineár helyettesités együtthatóit, melynek karakterisztikus egyenlete a következő:

$$\Phi_2(\rho) \equiv \begin{vmatrix} \rho-a_2 & -a_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & \rho & a_1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & \rho & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Ha e determinánst megszorozzuk a következővel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

akkor szorzatul a következő negyedfokú determinánst kapjuk:

$$\begin{vmatrix} -\rho^2+a_2\rho & a_1\rho-a_3 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & \rho & 0 \\ -a_2\rho & -\rho^2+1 & a_1\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \end{vmatrix},$$

melyet kiszámítván, a következőre jutunk:

$$\Phi_2(\rho) \equiv \rho^6 - a_2\rho^5 - \rho^4(a_1a_3+1) + \rho^3(a_3^2+2a_2-a_1a_3) - \rho^2(a_1a_3+1) - \\ -a_2\rho+1 = 0.$$

Ez pedig a ρ-ra vonatkozólag reciprok egyenlet; tehát megoldása harmadfokú egyenletre vezethető vissza.

Ha az egyenlet gyökei:

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\rho_3}$$

és $\rho_1 = x_1x_2$, tesszük, akkor a negyedfokú egyenlet gyökeit könnyen meghatározhatjuk.

Ugyanis:

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = -a_1$$

és

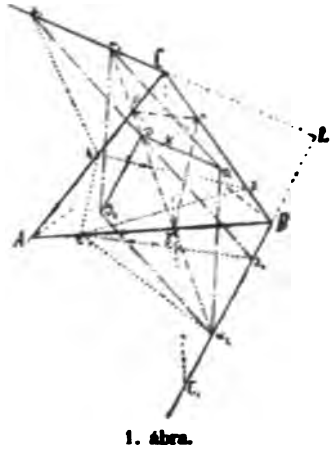
$$[(x_1+x_2)-(x_3+x_4)]^2 = s_2+2\rho_1+\frac{2}{\rho_1}-2\left(\rho_2+\frac{1}{\rho_2}+\rho_3+\frac{1}{\rho_3}\right).$$

E két egyenletből x_1+x_2 és x_3+x_4 meghatározható (s_2 mint hatványösszeg racionális uton adódik ki); de meg levén x_1+x_2 és x_1x_2, az x_1 és x_2 is meghatározhatók. Épen így x_3 és x_4 is.

Beke Manó.

EGY MINIMUM-PROBLÉMA ELEMI TÁRGYALÁSA.

A Math. és Phys. Lapok. II. évfolyama márcziusi füzetének élén a fenti czím alatt RADOS GUSZTÁV-nak rövid közleménye áll, melynek kapcsán legyen szabad az ott tárgyalt problémát más, a dolog lényegében vele megegyező, de — nézetem szerint — egyszerűbb és iskolai czélokra talán alkalmasabb megfejtését közölnöm.* A kérdéses probléma szó szerint idézve a következő:



1. ábra.

«*Adva lévén az ABC síkháromszög, határoztassék meg a beírt háromszögek közül az, melynek kerülete a többiek kerületéhez képest minimum; továbbá, ha ily minimális kerületű beírt háromszög nincsen, határoztassék meg az összes beírt háromszögek kerületeinek alsó határa.*»

Legyen a talpponti háromszög (1. ábra) $\alpha\beta\gamma$; a tetszés szerint beírt háromszög abc. Akkor mindenekelőtt állanak a következő egyenlőségek (L. Math. és Phys. Lapok II. évf. 112. l.):

$$\beta\gamma A_{\measuredangle}=a\gamma B_{\measuredangle};\quad \gamma aB_{\measuredangle}=\beta aC;\quad \gamma\beta A_{\measuredangle}=a\beta C_{\measuredangle}, \qquad 1.$$

melyek az összes beírt háromszögek közül egyedül a talpponti háromszöghöz tartoznak.

---

* Mennyiben helyes Horváth ur e nézete, azt döntse el a két közleményben tartalmazott megoldások tárgyilagos összehasonlítása. *Szerk.*

Hosszabbítsuk meg a talpponti háromszög egyik oldalát, pl. $\beta\gamma$-át, mindkét felől és mérjük reá e meghosszabbításokra β- és γ-ából a szomszédos $\beta\gamma$ és γa oldalakat oly módon, hogy

$$\beta a_1 = \beta a, \quad \gamma a_2 = \gamma a;$$

ekkor

$$a_1 a_2 = a\beta + \beta\gamma + \gamma a = k,$$

az-az $a_1 a_2$ egyenlő a talpponti háromszög kerületével.

A szerkesztésből, továbbá a talpponti háromszöghöz tartozó 1. alatti szögegyenlőségekből tüstént látható, hogy a_1 és a_2 nem egyebek, mint a-nak tükörképei AC illetve AB-re nézve, s hogy a BC oldal bármely pontjának tükörképei az AC illetve AB tükrözö egyenesekre nézve a Ca_1 illetve Ba_2 egyenesekre esnek.

Ha most már a tetszés szerint beírt abc háromszög a szögpontjának tükörképei az AC és AB tükrökre nézve a_1 illetve a_2, akkor lesz

$$a_1 b = ab, \quad a_2 c = ac,$$

tehát

$$a_1 b + bc + c a_2 = ab + bc + ca = k,$$

a hol k a beírt háromszög kerülete. Az abc háromszög kerületét ennélfogva az a_1, a_2 végpontokkal határolt $a_1 bc a_2$ vonal szolgáltatja, a mely szükségképpen tört vonal, mert az a_1, b, c, a_2 pontok csak az esetben fekhetnének egy ugyanazon egyenesen (L. Rados közl. a 112. lapon), ha az abc háromszög oldalai a b, c szögpontokat tartalmazó AC, AB oldalakkal egyenlő szögeket alkotnának, de ez az 1. alatti szög-egyenlőségeket és így az abc háromszögnek az $\alpha\beta\gamma$ háromszöggel való összeesését vonná maga után, a mi feltételünkkel ellenkezik.

Most már könnyen sikerül az

$$a_1 a_2 = k \leqq a_1 a_2 < a_1 b + bc + ca = k$$

vagyis a

$$x < k$$

reláczió kimutatása. A mi az

$$a_1 a_2 \leqq a_1 a_2$$

relácziót illeti, annak bebizonyítása a következő segédtételből folyt:

Mindazon háromszögek közöttt, a melyekben egy szög s a bezáró oldalak összege egyenlő, legrövidebb alappal az ez adatokból szerkeszthető egyenlő szárú háromszög bír.

Legyen a_1C és a_2B metszéspontja L. Az La_1a_2 háromszög egyenlőszárú, mert az a_1a_2 alapja melletti szögei egyenlők, minthogy

$$\beta a_1C_\measuredangle = \beta aC_\measuredangle = \gamma aB_\measuredangle = \gamma a_2B_\measuredangle .$$

Az a_1a_2 és a_1a_2 egyenesek metszéspontja legyen ∂. Huzzuk most az a_2a_2 illetve a_1a_1 vonaldarabokkal egyenlő nagyságú és irányú $\partial\partial_2$ és $\partial\partial_1$ vonaldarabokat s kössük össze ∂_2-t s illetve ∂_1-t az a_1, a_2 pontokkal. Mivel

$$a_1\partial_1 = a_1\partial, \quad \partial_1 a_1 = \partial a_2 ,$$

s illetve

$$a_1\partial_2 = a_1\partial, \quad \partial_2 a_2 = \partial a_2 ,$$

továbbá ∂_1, ∂_2 a_1a_2-ön mindig kívül esik, ez egyenlőségek bármelyikéből nyerjük

$$a_1a_2 = a_1\partial_1 + \partial_1 a_2 = a_1\partial_2 + \partial_2 a_2 > a_1a_2 .$$

Hogy pedig

$$a_1L + La_2 = a_1L + La_2 = 2a_1L = 2La_2$$

az az

$$a_1a_1 = aa = a_2a_2$$

egyenlőségekből egyszerre belátható.

A derék és tompaszögű háromszögekre nézve felállított tétel levezetése még egyszerűbbé lesz az által, hogy itt csupán a háromszögbe eső magasságvonalat kell meghosszabbítanunk a talpponton túl saját hosszával (2. ábra), úgy hogy

$$CC_1 = 2CM$$

legyen, a mikor is $AC_1B\,\Delta \cong ACB\,\Delta$ s ha a_1, b_1 a beirt abc háromszög a, b szögpontjainak tükörképei:

$$b_1a_1 = ba, \quad cb_1 = cb.$$

Ha most már a C_1B egyenesen a_2-t

$$C_1a_1 = C_1a_2$$

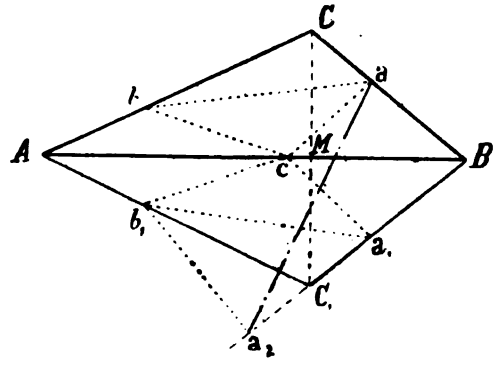
egyenlőség értelmében határozzuk meg, akkor $BC_1A_1 > 90°$ esetében

$$b_1a_1 > b_1a_2,$$

mert az $a_1C_1a_1$ háromszögben a_1b_1 tompaszögnek, a $b_1C_1a_2$ háromszögben ellenben b_1a_2 hegyes szögnek (t. i. a tompa szög mellékszögének) fekszik szemközt, holott a két háromszögben a másik két oldal egyenlő; meg ha BC_1A_1 derékszög:

$$b_1a_1 = b_1a_2,$$

mivel két oldal egyenlőségén kívül a bezárt szögek is egyenlők, t. i. derékszögek.



2. ábra.

Ennélfogva lesz:

$$k \geqq ac + cb_1 + b_1a_2 > aa_2$$

s a segédtétel értelmében:

$$aa_2 > CC_1$$

tehát

$$k > 2CM.$$

Mivel pedig az M talppont s a C-vel közvetetlen szomszédos pontjai oly beirt háromszögeket határoznak meg, melyeknek kerülete a magasságvonal kétszeresétől tetszőleges kis hosszban különbözik: e magasság kétszerese ugy a derék-, mint a tompaszögű három-

szögeknél valóban a beírt háromszögek kerületének alsó határát képezi.

Végül talán nem lesz érdektelen megjegyezni, hogy hegyesszögű háromszögbe végtelen sok oly háromszög írható be, a melyek kerülete bármelyik magasságvonal kétszeresénél kisebb, mert *a talpponti háromszög kerülete mindig kisebb akármelyik magasságvonal kétszeresénél*, a mint ezt az 1. ábra egyszerű megtekintése mutatja, a hol a segédtétel értelmében p. o.

$$2C_7 = CC_1 > a_1a_2 = x.$$

Horváth József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

14. *Bizonyíttassék be a következő tétel:*

Ha valamely ABC háromszög AB oldalának tetszés szerinti C_1 pontjából az AC és BC oldalakra merőlegeseket bocsátunk, melyeknek talppontjai B_1, illetve A_1, akkor ama két derékszögű parallelepipedon, melynek egy csúcsban találkozó élei AC, BC_1 és C_1B_1, illetve BC, AC_1 és C_1A_1, egyenlő köbtartalmú. (Törösy.)

*

Első megoldás Csillag Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól Budapesten.

Az ACC_1 és BCC_1 háromszögek területeinek mérőszámait T_1- és T_2-vel jelölvén, akkor először is

$$T_1 : T_2 = \overline{AC} \cdot \overline{C_1B_1} : \overline{BC} \cdot \overline{C_1A_1}.$$

Minthogy továbbá az említett háromszögeknek a C-szögpontból vont magasságuk közös, még

$$T_1 : T_2 = \overline{AC_1} : \overline{BC_1}.$$

Tehát valóban:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC_1} \cdot \overline{C_1B_1} = \overline{BC} \cdot \overline{AC_1} \cdot \overline{C_1A_1},$$

a minek geometriai értelmét már a feladat szövege magában foglalja.

*

Második megoldás Grünwald István áll. középiparisk. tanár úrtól Budapesten.

A tétel szerint:

$$AC \cdot BC_1 \cdot C_1B_1 = BC \cdot AC_1 \cdot C_1A_1.$$

Legyen

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AC_1 = p, \qquad BC_1 = q$$

és az A és B saroknál levő szög α, illetőleg β; tehát

$$C_1B_1 = p \,.\, \sin\alpha,$$
$$C_1A_1 = q \,.\, \sin\beta,$$

mindezeket helyettesítvén, a tételt kifejező egyenlőség ilyen alakú lesz:

$$b \,.\, q \,.\, p \,.\, \sin\alpha = a \,.\, p \,.\, q \,.\, \sin\beta$$

vagyis:

$$b \sin\alpha = a \sin\beta,$$

tehát az ismeretes sinus-tétel:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

Ezzel a tétel be van bizonyítva.

*

Harmadik megoldás Csehély Adolf gimnáziumi tanár úrtól Trsztenán.

Vonjunk a háromszögnek C csúcsából merőlegest AB-re. E merőleges talppontját jelöljük D-vel.

ACD és AC_1B_1 hasonló derékszögű háromszögek megfelelő oldalai arányosak:

$$AC : AC_1 = CD : C_1B_1$$

tehát

$$CD = \frac{AC \,.\, C_1B_1}{AC_1}. \qquad (1)$$

CDB és C_1A_1B derékszögű háromszögek hasonlóságából hasonlóan következik, hogy

$$BC : BC_1 = CD : C_1A_1,$$

tehát

$$CD = \frac{BC \,.\, C_1A_1}{BC_1} \qquad (2)$$

Az (1) és (2) alatti értékek összehasonlítása a következő egyenletet adja:

$$\frac{AC \,.\, C_1B_1}{AC_1} = \frac{BC \,.\, C_1A_1}{BC_1}$$

s ebből folyólag

$$AC \,.\, BC_1 \,.\, C_1B_1 = BC \,.\, AC_1 \,.\, C_1A_1,$$

mely egyenlet nem egyéb, mint a bebizonyítandó tétel algebrai kifejezése.

Ugyanezt a megoldást beküldték még Fuchs Károly és Strohbach Géza tanár urak. *Szerk.*

*

Negyedik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A feladatban megállapított jelzéseket megtartván, segédvonalakúl válaszszuk AD és BE magasságokat. Ekkor,

$$AB_1C_1\Delta \sim AEB\Delta, \qquad BA_1C_1\Delta \sim BDA\Delta,$$

tehát:

$$AC_1 : AB = B_1C_1 : EB.$$
$$BC_1 : BA = A_1C_1 : DA,$$

melyekből

$$AC_1 : BC_1 = B_1C_1 . DA : A_1C_1 . BE.$$

Az első és harmadik tagot BC-vel, a második és negyediket AC-vel szorozván:

$$AC_1 . BC : BC_1 . AC = B_1C_1 . BC . DA : A_1C_1 \; / \; C . BE.$$

Ámde $BC . DA = AC . BE$, mint ugyanazon háromszög kétszeres területei s így, ha az aránylat két utolsó tagját egyenlőkkel osztjuk,

$$AC_1 . BC : BC_1 . AC = B_1C_1 : A_1C_1,$$

honnan:

$$AC_1 . BC . A_1C_1 = BC_1 . AC . B_1C_1,$$

a mi a tétel megbizonyítása.

Ha C_1 az AB felező pontja:

$$AC_1 = BC_1$$

s így:

$$BC . A_1C_1 = AC . B_1C_1.$$

Ha C_1 a C szöget felező transzverzalis pontja:

$$B_1C_1 = A_1C_1$$

s így:

$$AC_1 . BC = BC_1 . AC,$$

a mint ismeretes.

*

Ötödik megoldás Fuchs Károly főgimnáziumi tanár úrtól Pancsován.

A sinustételt alkalmazva, lesz

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Azonkívül áll

$$C_1B_1 = AC_1 \sin\alpha \qquad C_1A_1 = BC_1 \sin\beta.$$

Ezek alapján lesz behelyettesítés által

$$AC \,.\, BC_1 \,.\, C_1B_1 = AB\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \,.\, BC_1 \,.\, AC_1 \sin\alpha$$

$$BC \;\; AC_1 \,.\, C_1A_1 = AB\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \,.\, AC_1 \,.\, BC_1 \sin\beta.$$

A jobb oldalok egyenlők; tehát a bal oldalok is egyenlők.

*

Végül beküldött még nagyobb terjedelmű analitikai megoldást Lóky Béla úr Kolozsvárról. *Szerk.*

IRODALOM.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

37. Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers und die zur Entwickelung dieser Kraft geeigneten Maschinen, von S. CARNOT, 1824.* Übers. u. herausgegeb. von W. OSTWALD, Leipzig, 1892, 8°, 72 l. 1·20 M.

Eme művecskének tartalma két részre osztható: egy aktuális érdekűre, mely a szerzőtől levezetett azon igazságokat foglalja magában, melyek a hőelméleti tudományszakban maradandó érvényűek, és egy történelmi érdekűre, melynek eredményei a hő-anyag állandósága feltevésének megdöltével immár el nem fogadhatók. Azonban ezeket az eredményeket is a történelmi érdeken kívül nagyon becsessé teszi szerző módszere, mely mindenütt szemlélhetőségre törekszik. De lássuk rövid vonásokban az értekezés tartalmát.

A tárgy gyakorlati fontosságának és elméleti érdekességének feltüntetése után szerző legott megállapítja sorban a következő, részint a közvetetlen tapasztalatból merített, részint a tapasztalat által közvetetve beigazolt igazságokat: *a hő mozgató ereje* (így nevezi CARNOT a hőgépeknek munkával mérhető hasznosítható hatását) *a hőanyagnak meleg testről hideg testre való átmenetelének köszönhető* (8. l.); *mindenütt, hol mérséklet-különbség áll fenn, mozgató erő létesítésének lehet helye* (11. l.); *a mozgató erőnek az a maximuma, mely a gőz alkalmazásával érhető el, egyúttal maximuma azon mozgató erőnek, melyet tetszés szerinti más eszköz alkalmazása nyújt* (14. l.); *eme maximum szükségképeni feltétele, hogy a mozgató erőnek hőből való előállítására használt anyag ne szenvedjen olyatén mérséklet-változásokat, melyeket nem valamelyes térfogat-változás tételez fel* (15. l.). A legfontosabb kérdés azonban, melyre CARNOT egész figyelmét fordítja, *a hasznos munkának a munkálkodó*

* E művecske eredetije a következő czím alatt jelent meg: *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, par S. CARNOT, Ancien élève de l'école polytechnique. A Paris, chez Bachelier, libraire. Quai des Augustins, 1824.

anyag minőségétől való függetlensége; hogy ezt teljes általánosságban megállapíthassa, felállítja és a legnagyobb következetességgel alkalmazza a *körfolyamok elvét* (20. l.), mely őt annak a törvénynek felállítására vezeti, hogy *a hő mozgató erejét egyes-egyedül azok a mérsékletek határozzák meg, melyek között a hőanyag átvitele utolsó sorban végbemegy* (23. l.).

És ez egyike a legszebb igazságoknak, melyeket a fizikai tudomány felismert! Ez a CARNOT *tétele,* a mechanikai hőelmélet igazi második főtétele, melyet a későbbiek csak a mérséklet-függvény alakjának szempontjából szabatosíthattak, de a melynek alapgondolatát világosabb színben senki sem tüntethette fel. Nem is kell, hogy SADI CARNOT korába képzeljük magunkat vissza, hogy eme, a szerzőjétől oly szép logikával levezetett tétel merész voltát belássuk. Vannak folyadékok (alkohol, éter), melyek egyazon nyomáson jóval alacsonyabb mérsékleten forrnak, mint a víz, melyeknek egyazon mérsékletű telített gőzei tehát sokkal, igen sokkal nagyobb feszültségűek mint a vízgőzök, minélfogva eme folyadékok gőzeinek a vízgőzzel szemben való jó oldala szinte kézzelfogható dolognak látszik. És lám, CARNOT ki meri mondani, hogy az alkoholgőznek nagy feszültsége nem csak hogy nem előny, hanem hátrány (65. l.); ki meri mondani, hogy a vízgőznek is a főhibája épen abban rejlik, hogy magasabb mérsékleteken nagyon is nagy a feszítő ereje; ki meri ezt mondani oly időkben, midőn FARADAY és DAVY a gázak folyósítására vonatkozó kisérleteikkel kapcsolatban e folyadékok gőzeinek nyomását alacsony mérsékleteknél azért határozzák meg, hogy új folyadékoknak mozgató erő létesítésére való alkalmazhatóságát kipuhatolják; oly időkben, midőn az olyan híres gépszerkesztők mint PERKINS, 35 légköri nyomással működő gőzgépekkel tesznek — eredménytelen — kisérleteket!

CARNOT fellépését még nevezetesebbé teszi az a körülmény, hogy az ő művecskéje előtt senki sem ismert, senki sem gyanított valamelyes összefüggést a gőzgép munkája és a gőzgépben szereplő hő között. Ez szinte hihetetlennek látszik, mert a történelem tanusága szerint nincsen nagyszabású vívmány, melynek megfelelő előzményei nem volnának. Ha CARNOT tételének származását történelmi szempontból kutatjuk, úgy magából a szóban forgó művecskéből mindössze is csak azt a felvilágosítást nyerjük, hogy CARNOT egyrészt a gőzgépek technikája terén akkoriban már megszerzett tapasztalatokra, másrészt egy elvre támaszkodik, melyet CLÉMENT állított fel, s a melyet CLÉMENT nem tett ugyan közzé, de CARNOT-val személyesen közölt. CLÉMENT elve a következő: a jó gőzgépet nem csupán a nagy nyomású gőz alkalmazása jellemzi, hanem főleg *a gőznek egymásra következő, egymástól nagyon különböző nyomásai jellemzik, melyek folytom kisebbekké válnak* (57. l.) CARNOT szerint CLÉMENT ezt az elvet, mely

Carnot-nak a maximális hatás feltételét kifejező, fentebb már idézett tételével egy speciális esetre vonatkozólag azonos, a gőzgépek hasznos munkájának meghatározására tényleg alkalmazta, s mivel Carnot még azt is mondja, hogy ez az elv a gőzgépek elméletének valódi alapja, bizvást feltehetjük, hogy ez az elv volt indítéka azoknak a megfontolásoknak, melyek Carnot-t a thermodinamika igazi elvének felállítására vezették.

De mindezek csak indítékok; a munka és a hő mint mozgató ágens közötti összefüggésnek egy első megállapítása egészen Carnot-nak volt fentartva. Nevezetes, hogy mindamellett, hogy Carnot az ő tételét csak a mérséklet-függvény alakjának szabatos meghatározása nélkül állíthatta fel, a hő-anyag állandóságának helytelen feltevése mellett is mégis arra a később helyesnek felismert tételre jut, hogy *a hőanyag esése alacsonyabb mérsékleten több mozgató erőt létesít, mint magasabb mérsékleteken* (42. l.).

Az értekezés további maradandó értékű tartalmát a különböző szilárd, folyós és légnemű anyagoknak a hasznos mozgató erő szempontjából való összehasonlítása teszi, és szerzőnk, a tőle kifejtett tételekre támaszkodva, a legnagyobb határozottsággal fejezi ki, hogy a hasznos mozgató erő szempontjából a legelső helyen állanának azok a levegőgépek, melyekben a tüzelő anyag elégetése nem külön tűzhelyen, hanem magában a gépet hajtó levegőben menne végbe (62. l.). A gázmotorok fényesen beigazolták Carnot eme következtetését. Végre meghatározza a legjobb gőzgépektől tényleg létesített mozgató erőnek viszonyát ahhoz a mozgató erőhöz, melyet valamely elméletileg tökéletes hőgép a tüzelő anyag fejlesztette összes hő értékesítésével létrehozhatna.

A tárgyalás módja, miként már említettük, különösen a fizikailag szemlélhető típusoknak fejtegetése révén válik ki; eredményeinek analitikai mezbe való öltöztetését szerző csak lábjegyzetekben végzi. A tárgyalás eme módjára nézve mint igen szép példát jegyezhetjük fel azt az esetet, melyben Carnot kimutatja, hogy ha a gázoknak mérséklet-változás nélkül való térfogat-változásában a felvett vagy kiadott hőmennyiségek számtani sorban vannak, úgy a térfogat-változások geometriai sort alkotnak (31. l.). E tételnek feledésbe ment eme levezetéséről méltán jegyzi meg a kiadó, hogy megérdemelné, hogy a tankönyvekbe felvétessék. A szemlélhetőség teszi kiválóan érdekessé az immár csak történelmi érdekű részleteket is, melyek közül különösen kiemeljük azokat a fejtegetéseket, melyekben szerző kimutatni igyekszik, hogy egyazon mérsékleti határok között a hőanyag mozgató ereje levegő, vízgőz és alkoholgőz alkalmazása esetében egyenlő.

Mindezeket azért hangsúlyozzuk különösen, mert az analitikai módszer talán a fizika egy ágában sem takarta el a vele kezelt tárgyak fizikai ter-

mészetét oly nagy mértékben, mint épen a mechanikai hőelméletben, különösen pedig ennek ama részében, mely Carnot elveire támaszkodik. Ez oknál fogva úgy a kezdő, mint a szakember egyaránt haszonnal fogja olvasni eme könyvecskét, melynek módszertani értéke oly szép összhangban van tudományos értékével.

Végre nem hagyhatjuk említetlenül, hogy szerző két helyen is (23. és 52. l.) kifejezést ad abbeli nézetének, hogy a hő anyagiságának elmélete nem kielégítő, sőt az egyik helyen hozzá teszi, hogy «több tapasztalati tény az elmélet mostani állása szerint csaknem érthetetlennek látszik». Kéziratban hátrahagyott jegyzeteiben pedig már egészen határozottan abba az irányba tért, hogy a hő és munka egymássá való átalakíthatósága elvét ne csak elfogadja, hanem tényleg alkalmazza is, és Joule és Hirn későbbi kisérleteinek világos programmját adja. E jegyzetek, értekezésének az öcscse által rendezett 1878-iki (harmadik) franczia kiadásában (Gauthier-Villars-nál)[1] közzététettek, és valóban sajnálnunk kell, hogy az Ostwald-féle kiadásba fel nem vétettek. A tárgy rendkivüli érdeke arra késztet, hogy Carnot kézirati hagyatékából azt a lapot, mely a harmadik franczia kiadáshoz *fac-simile* másolatban van mellékelve, (az utolsó, befejezetlen sor elhagyásával) szó szerint közöljük:

«La chaleur n'est autre chose que la puissance motrice, ou plutôt que le mouvement qui a changé de forme. C'est un mouvement dans les particules des corps. Partout où il y a destruction de la puissance motrice, il y a, en même temps, production de chaleur en quantité précisement proportionelle à la quantité de puissance motrice détruite. Réciproquement, partout où il y a destruction de la chaleur, il y a production de puissance motrice.»

«On peut donc poser en thèse générale que la puissance motrice est en quantité invariable dans la nature, qu'elle n'est jamais, à proprement parler, ni produite, ni détruite. A la vérité, elle change de forme, c'est-à-dire qu'elle produit tantôt un genre de mouvement, tantôt un autre; mais elle n'est jamais anéantie.»

«D'après quelques idées que je me suis formées sur la théorie de la chaleur, la production d'une unité de puissance motrice[2] nécessite la destruction de 2·70 unités de chaleur.»

---

[1] Az értekezés másod izben csaknem félszázaddal első megjelenése után adatott ki az *Annales scientifiques de l'Ecole Normale superieure*-ben (II. sér. t. I. 1872).

[2] Az *unité de puissance motrice*, melynek neve akkoriban *dynamie* volt, azon munka, melyet 1 m³ viznek 1 m. magasságra való felemelése megkiván. Ezt figyelembe véve, Carnot szerint a hő mechanikai egyenértéke:

1 kgcaloria = 370 kgm.,

«Une machine, qui produirait 20 unités de puissance motrice par kilogramme de charbon, devrait anéantir $\frac{20+2\cdot70}{7000}$ de la chaleur développée par la combustion . . . .» *Czógler Alajos.**

*

Középiskolai Mathematikai Lapok czímű havi folyóirat indult meg ARANY DÁNIEL győri állami főreáliskolai tanár szerkesztésében.

E folyóirat a mathematika *tanításának* szolgálatába szegődött és programmja gazdag példatár gyűjtésén kívül felöleli mindama kérdéses tüzetes megbeszélését, a melyek a középiskolai mathematikai tananyag methodikus feldolgozására vonatkoznak. Örömmel üdvözöljük az új vállalatot, mely hivatva van hazai tanügyi irodalmunkban régen érzett hiányt pótolni és hisszük, hogy a Középiskolai Mathematikai Lapok csakhamar a tanuló ifjuságnak és a tanároknak is hasznos és kedvelt olvasmánya lesz.

---

mely érték valamivel még pontosabb, mint MAYER 1842-iki meghatározása (1 kg-cal. = 365 kgm.). Mivel e jegyzetek mindenesetre 1824 után és 1832 (CARNOT halálának éve) előtt irattak, CARNOT meghatározása legalább is 12 évvel előzi meg a MAYER-ét.

Eme meglepő adatokat felsorolva, nem hagyhatom emlités nélkül a francziáknak MAYER iránt való, ennek német honfitársaival szemben tanusított etfogulatlanságát és pártatlanságát. Hogy csak a legújabb példákat hozzam fel, J. BERTRAND az ő hőelméleti művében (*Thermodinamique*, Paris, 1887) egy teljes fejezetet szentel MAYER érdemeinek, míg OSTWALD, épen az imént ismertetett műhöz való jegyzeteiben azt mondja (69. l.), hogy MAYER az elvet *kimondotta*, JOULE *kisérletileg beigazolta*, HELMHOLTZ pedig *a fizika legkülönbözőbb ágaira alkalmazta*. Hát MAYER nem alkalmazta a fizika legkülönbözőbb ágaira? Nem alkalmazta-e még a csillagászatra, sőt még az élettan és a pathologiának egyes jelenségeire is?

* Munkatársunk utolsó közleménye . . . *Szerk.*

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A chrómsavas elem s a Gülcher-féle hőoszlop. Az iskolai kísérletezésnél leggyakrabban a chrómsavas elemek szolgálnak az elektr. energia forrásául. Újabban ott, hol a viszonyok megengedik, a Gülcher-féle thermooszlopot használják e czélra. Nem lesz tehát érdektelen, ha e két energia forrást összehasonlítjuk a szolgáltatott elektr. munka ára révén. A chrómsavas elemeknél (l. Math. és Phys. Lapok I. k. 439. l.) 10 órawatt átlag 4·8 kr.-ba kerül, ha ezek az összeállítás után, megszakítás nélkül legalább 10 óráig 3 amper átlagos intenzitással sütteinek ki. Azok a viszonyok, a melyek az iskolai kisérletezésnél dominálnak, a mint a Math. és Phys. Lapok II. k. 234. l. található, az eredményt nagyon kedvezőtlenné teszik és 10 órawatt árát 7—9 kr.-ra emelik. A II. sz. Gülcher-féle thermooszlop közepszerű gáznyomás mellett 130 liter gázt fogyaszt óránként s ezért 3 volt feszültség mellett 3 amper intenzitási áramot, tehát 9 órawattot ad. Ha a gáz árát 15 kr.-ba számítjuk, akkor a Gülcher thermooszlop 10 órawattot 2·17 kr.-ért szolgáltat. A chrómsavas elem energiája tehát, a legjobb esetben is több mint kétszer olyan drága; az előadási kísérletezésnél pedig 3—4-szer drágábbá lesz.

*

Ólomforrasztás. Laboratoriumi munkálkodások között nem egyszer fordul elő ólomforrasztás. A ki kisérletet tett ólmot ólommal és nem czinkkel forrasztani, tapasztalhatta az ilyenkor fölmerülő nehézségeket. Rendesen úgy járunk el, hogy a forrasztás helyét (útját) késsel jól megtisztítván, gyantaoldattal megnedvesítjük s vékony (hegyes) hidrogén lánggal melegítjük: a megolvadás pillanatában kész a forrasztás. Ha hosszabb vonal mentén kell forrasztanunk, pl. ólomlemezt ólomlemezzel, akkor az összeforrasztandó lemezek széleit 5—10 mm. szélességben rézsut vágjuk, hogy egymásra fektetve a szélek ne álljanak nagyon elő, azután a hidrogén lángot lassan és óvatosan visszük a metszés mentén. Egyszerűbb az eljárás, a mennyiben a hidrogén lángot nélkülözhetjük és forrasztó vassal hajthatjuk végre a műveletet, ha a forrasztási helyeket, valamint a forrasztót *olvasztott ólomchloriddal* vonjuk be.

Szigetelő és sav-álló ragasztó szer. Dr. Schenek István tagtársunktól egy oly ragasztó szer készítését tanultam el, mely a savakkal daczol s jól is szigetel. Minthogy kitünő eredménynyel használtam, készítése módját itt közlöm t. szaktársaim hasznára. 1. s. r. fekete szurok; 1. s. r. gyanta; 1 s. r. sürü terpentin és 1 s. r. sárga viasz vas fazékban összeolvasztatnak s a keverékbe, a mikor még folyékony, 1,5 s. r. finomra örölt horzsa kő (Bimsstein) és 0,5 s. r. kőszénkátrány kevertetik. Kihülés után a ragasz kőkeménységü. Ha a részek keverés arányát úgy módosítjuk, hogy a terpentinből s a kátrányból 10—20%-kal többet, ellenben a horzsakőből 20—30%-kal kevesebbet veszünk, a keverék sav-álló és szigetelő festék gyanánt használható az oly edények vagy tárgyak bevonására, melyeket a savak hatása ellen védeni, vagy elektromos sáp ellen szigetelni akarunk. A horzsakő helyett gipsz is vehető. Az összeragasztandó részeket s a bevonandó tárgyakat, különösen ha fémek, előzetesen meg kell melegíteni.

Edelmann.

*

Az aluminium bevonása más fémekkel. Az aluminium Nessen utasitása szerint más fémmel a következő módon vonható be: Az aluminiumból készült tárgy mindenekelőtt maró káli oldatába, vagy sósavba mártandó be, addig míg gázbuborékok nem jelennek meg rajta. Ebben a pillanatban kiveszszük a fürdőből s higanychlorid oldatába mártjuk; ez a müvelet az aluminium felületét megamalgamálja. Az amalgamozás megtörténte után újra az első fürdőbe teszszük s bent hagyjuk mindaddig, míg a gázfejlődés újra meg nem indul, mire az aluminiumot a bevonatul kivánt fém valamely sójának oldatába mártjuk. A felület csakhamar bevonódik az illető fém rétegével, mely oly erősen fog rajta, hogy a csiszolást s a hengerelést megbírja.

KÉRDÉS.

1. A Természettudományi Társulat helyiségeiben járván, megcsodáltam Antalik szikrarajzainak bámulatos finomságát. Magam is évek óta teljes sikerrel ismétlem kisérletét; de rajzaim vonásai nem oly finomak s részleteik nem oly szépek. Porkeverékemnek rovom fel ezt a fogyatkozást. Kérem nevezett t. Tagtársamat, legyen szives e lapokban leírni, hogyan készíti a Villarsi-féle kén-minium oly szépen rajzoló keveréket? Talán más tagtársaim is köszönettel veszik leirását. *K. S.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBŐL

ELŐADÁSAIRÓL.

Január 4. Dr. Sutár József: A végtelen determinánsok elméletéről.

Bartonek Géza: Az abszolut nedvesség mérésére alkalmas készülékekről.

Január 18. Dr. Réthy Mór: A folyadéksugarakról.

Tangl Károly: Néhány egyszerű forgási test niveau- és erőgörbéi.

*

A forgó testek egy nevezetes tulajdonságáról.*

1. Közismeretű a gyorsan forgó symmetrikus testek vagy az ú. n. szabad tengely körül gyors forgásban levő testek azon sajátsága, hogy forgásuk síkját, illetve forgásuk tengelyének irányát a térben megtartani törekszenek, (ha e tengely *stabilis* forgás tengelye) s e sík helyzetének változását czélzó minden behatásnak igen érezhető módon ellenszegülnek.

Ezen a tulajdonságon alapszik pl. a gyorsan forgó pörgetyű tengelyének a függélyes irányhoz való hajlásszögének állandósága; vagy az a jelenség, mikor a gyorsan forgó korong szabad vízszintes tengelyének egyik végét függélyes peczken megtámasztjuk avagy lelógó fonál alsó végén hurokba tesszük: a forgás tengelye vízszintes törekszik maradni.

Mindkét esetben a föld nehézségi vonzása lefelé iparkodik mozgatni a forgó test tömegközéppontját, de ezt csak igen lassan teheti s e mellett a test tengelyének a vertikális körüli-, azaz a ható erőre merőleges síkban való forgást tulajdonít, melynek iránya a vízszintes síkban egyenlő a test forgásaéval, ha ezt a test tengelye mentén, a nyugvó vége felé tekintve állapítjuk meg.

2. Néhány hónappal ezelőtt Ligeti Árpád mérnök úr azon kérdéssel fordult hozzám: mekkora munka szükséges valamely gyorsan forgó test

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1893. évi november 30-án tartott ülésén.

tengelyének e forgássíkra merőleges elforgatására s mire fordíttatik e munka? (V. ö. a 6. pont c szakaszát).

Miután a nevezett forgatás a gyakorlatban szabatosan csak úgy végezhető, ha a test forgástengelye merev, de mozogható keretben van: előzetes megfontolásaim és kisérleteim alapjául az általánosan ismert BOHNENBERGER-féle gyroscop (rotátió-készülék) szolgált. Ebben tudvalevőleg egy gömb- vagy korongszerű nehéz fémtest aczélból való symmetria- (s forgási-) tengelyének kúpos csapjait egy (belső) fémgyűrű viszi, mely e korong tengetyre merőlegesen foroghatólag van egy második külső gyűrűben beillesztve, ez utóbbi pedig szilárd gyűrűalakú keretben van megerősítve úgy, hogy a belső gyűrű forgástengelyére merőlegesen foroghasson.

E szerint a középső test — a korong — úgy van foglalva, hogy a tömeg középpontján átmenő három tengely körül foroghasson. Ámbár a test ekként a tengelyekre vonatkozólag egyensúlyozva van, mozgása még sem mondható a középpontja körül szabadon mozgó nehéz test mozgásával általában véve egyezőnek, mert itt tulajdonképpen a korongból s a két gyűrűből álló kapcsolt anyagi szerkezettel van dolgunk, melynek mozgása három szabadsági fokkal bír. A szabad forgással való teljes megegyeztetés a gyűrűk tömegeinek elhanyagolását követelné.

3. Tegyük a külső gyűrűt mozdulatlanná, pl. az által, hogy szorító csavarok segélyével a külső álló kerethez szorítjuk, úgy azonban, hogy a belső gyűrű mozgása akadályozva ne legyen. A korongot zsinór erélyes lehuzásával gyors forgásba hozván, tapasztaljuk, hogy a belső gyűrű (vízszintes) tengelye körül a legkönnyebben forgatható, azaz a test forgástengelye ez esetben semmiféle állandóságot nem mutat s majdnem oly könnyen mozgatható, mintha a korong nem forogna. [A külső gyűrűt igen jól kell megerősíteni, mert mikor a belső gyűrűt forgatjuk (azaz a vertikális síkban gyakorlunk reá forgató nyomatékot), ez által közvetve keletkezik a külső gyűrűre a vízszintes síkban ható erőnyomaték, mely a külső gyűrűt, ha jól van megerősítve, nem forgathatja, hanem csak statikai nyomaték alakjában jelentkezik, és ez az általa szült reactió-nyomatékkal ellentetten egyenlő. De ha a külső gyűrű nincsen jól megerősítve, a szerkezet nagy rázkódtatásnak van kitéve.

4. Teljesen elütő jelenséget tapasztalunk, ha a külső gyűrű akár a kerettel együtt, akár magában mozoghatóvá van téve.

a. Így, ha az eszközt a korong gyors forgása közben vertikális tartójánál fogva felemeljük — a külső gyűrű a jelzett módon meg lévén erősítve — s a belső gyűrűt gyorsan forgatni akarjuk: e gyűrű a forgatásnak észrevehetőleg ellenszegül, de a kéz is, mely a készüléket tartja, igen erős erőnyomatékot érez, mely az egész készüléket a tartó vertikális tengelye körül forgatja, ha kezünk nem szorítja elég erősen.

b. Jellemzőbben domborodik ki a jelenség, ha a külső gyűrű szabaddá tevése után a korong gyors forgásba hozatván, az eszköz magára hagyatik. Némi ingadozás után a rendszer igen hamar stationárius mozgásállapotot vesz fel, melyben a korong s mindkét gyűrű tengelyei a térben változatlan irányt tartanak s az egész rendszer mozdulatlannak látszik, feltéve, hogy az eszköz jól van egyensúlyozva. [Az azeset, mikor a korong tengelye a külső gyűrű (vertikális) forgási tengelyébe belecsik, a mozgó egyensúly singuláris esete, melyre nézve a következőkben s az 5.-ben részletezendő sajátságok nem érvényesek.]

Ha most a belső gyűrű azon részei egyikére, melyek a korong csapágyait viszik, ujjunkkal rövid erős nyomást fejtünk ki, vagy puha kalapáccsal erélyes ütést mérünk, észrevesszük, hogy e gyűrű a szándékolt forgatásnak hatalmasan ellenszegül, s hogy a korong tengelyének s vele a belső gyűrűnek a vízszinteshez való hajlása észrevehetőleg nem változik, de ez alatt a külső gyűrűvel együtt az egész testrendszer a vertikális tengely körül véges szöggel, ugrásszerűleg forgott el. Ezen forgás a belső gyűrűre kifejtett erőnyomaték hatásával veszi kezdetét s ennek megszűnésével szintén megszűnik s majdnem észrevehetetlen ingadozások után az egész rendszer gyorsan az előbb jelzett állandó mozgásállapotát veszi ismét fel. A forgássík megmaradása itt erélyesen nyilvánult, a menynyiben ugyanis a szándékozott forgás látszólag nem következett be*, hanem egy a ható erőnyomatékra merőleges síkú forgás. Ennek előjelére nézve a szabály a következő: Az észlelő, szemét a korong tengelye folytatásába helyezvén, a korong felé néz; ha ez az óramutató járásával egyező irányban forogni látszik s a belső gyűrűnek a szemhez közelebb fekvő részét lefelé nyomni vagy forgatni törekszünk: akkor a külső gyűrűnek felülről tekintett forgása szintén az óramutató járását követi. A korong ellentett forgása, vagy a belső gyűrűre ható erőnyomaték ellentett volta a külső gyűrű forgásirányát megváltoztatja.

[E szerint a forgó korong positiv tengelye, az erőnyomaték positiv tengelye és a külső gyűrű elfordulásának positiv tengelye egy jobb sodrású irányrendszert (MAXWELL elnevezése szerint venyige-coordináta-rendszert) alkotnak.]

Jegyzet. A belső gyűrű azon részei egyikére, melyek a korong csapágyait viszik, kis túlsúlyt helyezvén, a präcessió bemutatására szolgáló jelenség áll elő, melynél ugyanis a gyorsan forgó korongot vivő belső gyűrűnek s a korong tengelyének a vízszinteshez való hajlása látszólag nem változik, hanem az egész rendszer, mintha merev volna, a külső gyűrű vertikális tengelye körül lassú forgásnak indúl.

---

* V, 5, a 6. pont *b.* szakaszát.

Ez a 4. pont *b.* alatti jelenségnek kicsiny erőnyomaték melletti állandósítása, melyet a surlódás s a légellenállás az idő folytával lassít és végül megszüntet.

5. A jelenség legérdekesebb módosulása a 4. alattinak megfordítása; ezt észlelhetjük, ha a 4. pont *b.* szakasza elején említett állandó mozgásállapotában lévő rendszer nem belső, hanem *külső* gyűrűjére rövid tartamú erélyes, lökésszerű erőnyomatékot fejtünk ki. Tapasztaljuk, hogy a külső gyűrű észrevehetőleg nem mozdúl el, mereven megerősítettnek látszik; ellenben, hogy a belső gyűrű a forgó koronggal együtt ugrásszerű véges forgást mutat vízszintes tengelye körül, mely szintén csak addig tart, a meddig az erőnyomaték a külső gyűrűre hat.

Ez esetben a forgás-sík állandósága a külső gyűrű állandóságában nyíl, mely gyűrű a reá kifejtett hatásnak hatalmasan ellenszegül míg e rendszer többi részei a ható erőnyomaték síkjára merőleges forgást szenvedtek. E szerint ez a jelenség a 4. alatt részletezettnek a megfordítottja.

A forgás előjelét (irányát) illetőleg a 4. pont *b.* szakaszában említetthez analog szabály érvényes; ugyanis, ha a korong tengelyę folytatásában lévő észlelő szem a korong felé néz s ez az óramutatóval egyező irányban forogni látszik s most a külső gyűrűt úgy nyomjuk vagy akarjuk forgatni, hogy az erőnyomaték fölülről tekintve az óramutató járásával megegyező: akkor a belső gyűrű a forgó koronggal együtt úgy fordúl el, hogy a szemhez közelebb levő fele felfelé emelkedik. A korong tengelye körüli forgásának vagy az erőnyomatéknak irányváltozása az elfordulását is változtatja.

E szerint itt a forgó korong positiv tengelye, az erőnyomaték positiv tengelye, valamint a belső gyűrű elfordulásának positiv tengelye szintén jobbsodrású irányrendszert alkotnak.

Jegyzet. A belső gyűrű ugrásszerű forgását folytonossá, sőt egyirányúvá is tehetjük, ha a külső gyűrűre ható erőnyomatékot rythmusszerüen (pl. kezünkkel) oscilláló módon változtatjuk. E szakaszos nyomaték nagysága és periodusa szerint a belső gyűrű s vele a korong tengelye is vagy nagy amplitudójú oscillálást, vagy pedig folytonos irányú forgást végez; ez utóbbi a külső gyűrűnek érzék szerinti mozgatásával érhető el s e forgás sebessége igen tetemes is lehet.*

6. Mind a 4. mind az 5. alatti esetben a ható erőnyomaték a közvetetlen hatásának alávetett testet (gyűrűt) az állandó mozgásállapotbeli helyzetéből a nyomaték síkjában látszólag ki nem mozdítja s ez a kimozdításnak

---

* Utólag találtam, hogy a szövegben leírt jelenséget a külső gyűrűnek egy fogazott kerék közvetítésével való gyors, de kicsiny amplitudójú oscillatióban tartósával is előállíthatni; v. ö. DUCRETET: Catalogue des instruments de précision. Paris 1879, Stréphoscope continu de M. GRUEY (fig. 12) 15. és 16. l.

erélyesen ellenszegül, míg a másik test (gyűrű), melyre közvetetlenül erő nem hat: az erőnyomaték síkjára merőlegesen tetemes mértékben fordul el.

a. A 4. és 5. alatti jelenségek ezen reciprocitása rendkívül érdekes, mert belőle kitetszik, hogy a forgássík állandósága az ily szerkezetű rendszerek úgy értendő, hogy a korong forgássíkja mindenkor a közvetetlenül ható forgató nyomatékra merőleges síkban mozdúl el, de a nyomaték síkjában majdnem változatlan marad.

b. Meg kell jegyeznünk, hogy a 4-, 5-, 6-ban említett stabilitása a rendszer azon részének, mely az erőnyomaték hatásának közvetetlenül alá van vetve, a valóságban csak látszólagos.

Ugyanis a nevezett résznek az erőnyomaték síkjában való elmozdulása különben egyenlő körülmények között annál kisebb, minél nagyobb a korong saját tengelye körüli forgásának szögsebessége; ez az elmozdulás ugyan mindig véges, de a korong igen gyors forgásánál rendesen észrevehetetlen és csak sokszor ismételt vagy folytonos behatás teszi észrevehetővé. Ellenben a rendszer másik, az erőnek közvetetlenül ki nem tett részének elmozdulása az előbbi rész elmozdulásához képest igen nagy s ezen elmozdulások viszonya a korong szögsebességével növekszik.

c. A mi végre a 2. pontban említett munkát illeti: nem tekintve a surlódást, itt az eleven erő tétele érvényes, úgy, hogy az erőnyomaték végezte munka a rendszer eleven erejének növekedésével egyenlő (v. ö. a 7. pont 5. kifejezését). A 3. pont esetében a mozgó két rész ezen energia-növekedése külön-külön könnyen adódik, mert a két résznek a belső gyűrű forgási tengelye körüli szögsebességei egymással egyenlők és energiájuknak ebből származó része egyenlő a két testrész e tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának s a szögsebesség fél négyzetének szorzatával. A 4. és 5. esetei bonyolódottabbak.

7. A jelenség elméletét illetőleg e helyen csak a tájékozódásra legszükségesebb kifejezések közlésére szorítkozunk. Bárhány mozgó részből álló s bármily feltételeknek alávetett anyagi rendszer mozgásegyenleteit általános coordinátákban LAGRANGE második alakja szolgáltatja, melynek typusa:

$$\Theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

hol T a rendszer eleven ereje, ϑ az általános coordináták bármelyike, $\vartheta' = d\vartheta : dt$, t a folyó idő és Θ a ϑ-hoz tartozó általános erőcomponens. Az 1) egyenletek száma egyenlő a független coordinátákéval.

Jelen rendszerünk három szabadságfokkal bír; a korong, a belső s a külső gyűrű vonatkoztatna tömegközéppontján átmenő derékszögű tengelyekre, forgásszögeit rendre ϑ_1-, ϑ_1-, ϑ_2-vel jeleljük s ezeket attól a helyzettől számítjuk, melyben a korong tengelye a külső gyűrű forgástengelyébe és egyenlítőjének meghatározott sugara e gyűrű síkjába beleesik. [E szerint e

három szög rendre egyenlő az EULER-féle φ, ϑ, ψ szögekkel (Fröhlich, Kinematika 213. §. 382. lap)].

Az eleven erő számítása a közismertetű

$$2T = \left\{A_0 \cos^2 \alpha + B_0 \cos^2 \beta + C_0 \cos^2 \gamma\right\} \omega^2 \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

egyenlet alapján történik, melyben A_0, B_0, C_0 a forgó test három tehetetlenségi főnyomatéka vonatkoztatva tömegközéppontján átmenő derékszögű tengelyekre, ω eredő forgásának szögsebessége és α, β, γ e forgás tengelyének e főnyomatékok irányaihoz viszonyított irányszögei.

Jeleljék A_1, B_1, C_1 a korong-, A_2, B_2, C_2 a belső-, A_3, B_3, C_3 a külső gyűrű tehetetlenségi főnyomatékait, és pedig geometriai tengelyeikre merőleges két irányra s a geometriai tengelyre vonatkozólag; ekkor $A_1 = B_1$; $A_2 = B_2$; $A_3 = B_3$.

Alkalmazván az egy ponton átmenő tengelyek körüli forgások összetevésének szabályát (a szögsebességek parallelogrammáját), e három test kétszeres eleven ereje soruk szerint:

$$\begin{aligned} 2T_1 &= A_1(\vartheta_2'^2 + \vartheta_3'^2 \sin^2 \vartheta_2) + C_1(\vartheta_1' + \vartheta_3' \cos \vartheta_2)^2; \\ 2T_2 &= A_2(\vartheta_2'^2 + \vartheta_3'^2 \cos^2 \vartheta_2) + C_2\, \vartheta_3'^2 \sin^2 \vartheta_2; \\ 2T_3 &= A_3 \vartheta_2'^2. \end{aligned}$$

Az egész rendszer kétszeres eleven ereje

$$\left.\begin{aligned} 2T &= A\vartheta_2'^2 + C_1(\vartheta_1' + 2\vartheta_3' \cos \vartheta_2)\vartheta_1' + (C + B\cos^2 \vartheta_2)\vartheta_3'^2; \\ A &= A_1 + A_3; \quad B = A_3 - A_1 - (C_3 - C_1); \quad C = A_1 + C_2 + A_3. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

A 3) segélyével az 1) alapján:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= C_1 \frac{d}{dt}(\vartheta_1' + \vartheta_3' \cos \vartheta_2); \\ \Theta_2 &= A\vartheta_2'' + B\vartheta_3'^2 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 + C_1 \vartheta_1' \vartheta_3' \sin \vartheta_2; \\ \Theta_3 &= \frac{d}{dt}[(C + B\cos^2 \vartheta_2)\vartheta_3' + C_1 \vartheta_1' \cos \vartheta_2]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

A surlódást nem véve tekintetbe, az eleven erő tétele:

$$dL = \Theta_1 d\vartheta_1 + \Theta_2 d\vartheta_2 + \Theta_3 d\vartheta_3 = dT, \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

miből kitetszik, hogy a Θ_1, Θ_2, Θ_3 általános erőcomponensek a ϑ_1-, ϑ_2-, ϑ_3 szögek változtatására törekvő erőnyomatékokkal egyenlők.

a. A 3. pont esetét nyerjük, ha a ϑ_3-at állandónak tekintjük, miáltal $\vartheta_3' = 0$ és így a 4)-ből:

$$\Theta_1 = C_1 \vartheta_1''; \quad \Theta_2 = A\vartheta_2''; \quad \Theta_3 = C_1(\vartheta_1' \cos \vartheta_2)' \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Itt Θ_1 és Θ_2 az adott erőnyomatékok lévén, ϑ_1 s ϑ_2 számára a szilárd tengely körüli forgás közönséges egyenletéhez teljesen analog két egyenlet érvényes t. i. a (6) első két egyenlete; ezekből ϑ_1 s ϑ_2 meghatározható s velök Θ_3 is kife-

jelleto. Ez utóbbi csak $\vartheta_1' = \text{const.}$ és $\vartheta_2 = \text{const.}$ esetben zérus; különben azt az erőnyomatékot jelenti, melyet a külső gyűrűt megfogó szoritó csavarok stb. szilárdsági ellenhatása e gyűrűre gyakorol, s mely a korongnak $\vartheta_1'' \gtrless 0$ és a belső gyűrűnek $\vartheta_2' \gtrless 0$ mozgása folytán keletkező, s a külső gyűrűre ható erőnyomatékkal ellentetten egyenlő.

Ha sem a korongra sem a belső gyűrűre külső erő nem hat: ϑ_1' és ϑ_2' állandó, de $\Theta_3 = -C_1\vartheta_1'\vartheta_2' \sin \vartheta_2$.

b. A magára hagyatott rendszer esetében (4. pont *b.* szakaszának eleje) $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0$, miáltal 4)-ből

$$\left.\begin{aligned} C_1(\vartheta_1' + \vartheta_2' \cos\vartheta_2) &= h_1; \\ (B\vartheta_2' \cos\vartheta_2 + C_1\vartheta_1')\vartheta_2' \sin\vartheta_2 &= -A\vartheta_2''; \\ (C + B\cos^2\vartheta_2)\vartheta_2' + C_1\vartheta_1' \cos\vartheta_2 &= h_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 7)$$

hol h_1 és h_3 az integrátió állandói. Ez egyenletrendszer általános megfejtése bonyodalmas; czéljainkra elegendő az a megjegyzés, hogy a 7)-et a

$$\vartheta_1' = \text{const.}; \quad \vartheta_2 = \text{const.}; \quad \vartheta_2' = \text{const.}$$

singuláris értékrendszer kielégíti; ekkor 7) középső egyenlete

$$B\vartheta_2' \cos\vartheta_2 + C_1\vartheta_1' = 0,$$

mely a többi két egyenlettel együtt elegendő a ϑ_1', ϑ_2, ϑ_2' állandók meghatározására.

Ezen értékek különöa, de a gyakorlatban rendesen felmerülő esete az, mikor $\vartheta_2' = 0$; jelelve ekkor ϑ_{1_0}', ϑ_{2_0}, ϑ_{3_0}'-al ezen állandókat, 7) első és utolsó egyenletéből:

$$C_1\vartheta_{1_0}' = h_1; \quad C_1\vartheta_{1_0}' \cos\vartheta_{2_0} = h_3; \quad \vartheta_{3_0}' = 0, \quad \ldots\ldots 8)$$

míg középső egyenlete identikusan zérus; ezen értékrendszer megfelel a stabilis mozgásállapotnak, miről következőleg győződhetünk meg: Az anyagi rendszert ez állapotból kissé kimozdítottnak képzelvén, irhatjuk:

$$\vartheta_1' = \vartheta_{1_0}' + \eta_1'; \quad \vartheta_2 = \vartheta_{2_0} + \eta_2; \quad \vartheta_3' = \vartheta_{3_0}' + \eta_3', \quad \ldots\ldots 9)$$

hol η_1', η_2, η_3' igen kicsiny értékek; helyettesítvén 9)-et 7)-be, tekintetbe véven 8)-at, s az η-ák csak első hatványait tartván meg: az η_1', η_2, η_3' számára oly differentiálegyenletrendszer származik, mely e mennyiségek mindegyikére nézve az egyszerű harmonikus mozgás typusszerű differentiálegyenletét szolgáltatja (v. ö. a 10α) és 10β), de különösen a 12α) és 12β) rendszereket, ezekben Θ_2- s ϑ_2-at zérussal egyenlítvén). E szerint az anyagi rendszer részei harmonikus módon oscillálnak a ϑ_{1_0}', ϑ_{2_0}, ϑ_{3_0}' jellemzőjű állapot körül (az oscillálást a súrlódás s a légellenállás idővel megszünteti); s igy ez értékrendszer tényleg megfelel az állandó mozgásállapotnak.

c. A mi végre a 4) pont *b.* szakasza s az 5. pont reciprok jelenségei elméletét illeti: ez 4)-ből adódik, ha benne az egyenes jelenségre nézve $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$-t, a reciprokra nézve $\Theta_1 = \Theta_3 = 0$-t irunk. A kifejtések igen egy-

szerűsödnek, ha a stationárius mozgásállapottól való η_1, η_2, η_3 elmozdításokat kicsinyeknek tekintjük, a mi ϑ_2, illetve ϑ_3 mérsékelt értékére s nem hosszú tartamára vall.

Ekkor a 9) alakok alkalmazhatók s a 4)-be való helyettesítés és rövidítés után ezen egyenletek, tekintettel 8)-ra és a 7)-re, melynek egyenletei most ϑ'_{1_0}-, ϑ'_{2_0}-, ϑ'_{3_0}-ra érvényesek: első közelítésben:

α) az egyenes jelenségre nézve:

$$\left.\begin{aligned} &\eta'_1 + \eta'_3 \cos\vartheta_{2_0} = 0; \qquad A\eta''_2 + C_1\vartheta'_{1_0}\eta'_3 \sin\vartheta_{2_0} = \Theta_2; \\ &(C + B\cos^2\vartheta_2)\,\eta'_3 + C_1(\eta'_1 \cos\vartheta_{2_0} - \vartheta'_{1_0}\eta_2 \sin\vartheta_{2_0}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 10\alpha)$$

β) e fordított jelenségre nézve:

$$\left.\begin{aligned} &\eta'_1 + \eta'_3 \cos\vartheta_{2_0} = 0; \qquad A\eta''_2 + C_1\vartheta'_{1_0}\eta'_3 \sin\vartheta_{2_0} = 0; \\ &(C + B\cos^2\vartheta_{2_0})\,\eta''_3 + C_1(\eta''_1 \cos\vartheta_{2_0} - \vartheta'_{1_0}\eta'_2 \sin\vartheta_{2_0} = \Theta_3; \end{aligned}\right\} \quad 10\beta)$$

melyek η'_2-, η'_3-, η'_3-ra nézve állandó együtthatójú lineáris differentiálegyenletek.

A változókat közönséges módon eliminálással választván el egymástól és rövidség kedveért

$$C + (B - C_1)\cos^2\vartheta_{2_0} = D; \qquad C_1\vartheta'_{1_0}\sin\vartheta_{2_0} = E, \qquad E^2A^{-1}D^{-1} = \Omega^2 \quad 11)$$

jelöléseket hozván be, a 10α)- s a 10β)-ból könnyen nyerjük:

α) $\eta''_2 + \Omega^2\eta_2 = A^{-1}\Theta_2$; $\quad \eta'_3{}'' + \Omega^2\eta'_3 = \Omega^2E^{-1}\Theta_2$; $\quad \eta'_1 + \eta'_3\cos\vartheta_{2_0} = 0$ $\quad 12\alpha)$

β) $\eta'''_2 + \Omega^2\eta'_2 = -\Omega^2E^{-1}\Theta_3$; $\quad \eta''_3 + \Omega^2\eta_3 = D^{-1}\Theta_3$; $\quad \eta'_1 + \eta'_3\cos\vartheta_{2_0} = 0$ $\quad 12\beta)$

Itt 3) szerint $A_1 + A_2$, $C = A_1 + C_2 + A_2$; $B - C_1 = -A_1 - C_2 + A_2$ lévén, a 11)-ben írt D s így Ω^2 is csak *positiv* lehet.

Mindezekben Θ_2 vagy Θ_3 az idő explicit s adott függvényének tekintendő s így ezen egyenletek a parameterek variatiója módszere szerint közvetetlenül megfejthetők [v. ö. FRÖHLICH, Kinematika 125. §. 232. l.].

Ezek értelmében ez η_1, η_2, η_3 egy-egy szakaszos (periodikus) és egy-egy a Θ_2- illetve Θ_3-tól függő részből állanak; a periódus T tartama: $T = 2\varkappa : \Omega$; ez közös s 11) szerint a korong ϑ'_{1_0} szögsebességével fordítva arányos; az amplitudók különbözők, de a szövegben leírt jelenségeknél, ha ϑ'_{1_0} elég nagy, a tapasztalat értelmében észrevehetetlenül kicsinyek, úgy hogy ezekben a Θ_2- illetve Θ_3-tól függő részek dominálnak s a jelenségek jellegét megadják.

A 10α) első s harmadik, illetve a 10β) második egyenletéből

$$\alpha) \qquad \eta'_3 = ED^{-1}\eta_2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\alpha)$$

$$\beta) \qquad \eta'_3 = -EA^{-1}\eta_3; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 13\beta)$$

hennük 11) szerint az E a korongnak ϑ'_{1_0} szögsebességével egyenesen arányos, a mi megmagyarázza azt a szövegben felemlített látszólagos paradoxont, hogy gyors forgásnál igen kicsiny η_2- illetve η_3 elmozdításoknál az η'_2- illetve η'_3 szögsebességek (s így η_3 illetve η_2-szögelmozdulások is) tetemesek.

A számítás további példaszerű részletezését itt mellőzzük.

UJ SORALAKOK AZ «e» SZÁMÁRA.*

Ha valamely függvénynek több egymástól különböző analitikai kifejezését ismerjük, akkor ezeknek hatványsorba való kifejtése és a hasonló hatványok együtthatóinak összehasonlítása révén gyakran oly relációk birtokába juthatunk, a melyeknek önálló levezetése vagy felfedezése — más úton — tetemes előkészületet igényelne. Ezen az úton fedezték fel DIRICHLET és KRONECKER a számelmélet legrejtettebb relációit, de sőt már EULER is egészen tudatosan, módszerként alkalmazta a fönt vázolt elvet, a melynek segítségével sikerült neki összegezni a soroknak azt a nagy tömegét, a melyet az ő «*Introductio in Analysin infinitorum*» című művében találhatunk.

A megadott analitikai kifejezések egyike rendszerint végtelen szorzat- vagy végtelen részlettört-előállítás, míg a másik a szóban forgó függvénynek már a közvetetlenül ismeretes hatványsor-előállítása. Igy pl. cotg x számára ismeretes a

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi + x} - \frac{1}{n\pi - x} \right)$$

részlettört-előállítás és a

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

hatványsor-előállítás, melyben B_n az n-edik BERNOULLI-számot jelenti. Ha a részlettörtes kifejezést szintén hatványsorba fejtjük

* Előadva a Math. és Physikai Társulat 1894 február hó 15-én tartott rendes ülésén.

és ezután ennek együtthatóit a közvetetlenül megadott hatványsor hasonló együtthatóival egyenlítjük, a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{B_n 2^{n-1} \pi^{2n}}{(2n)!}$$

ismeretes EULER-féle relációkhoz jutunk.

A jelen dolgozatban ez elvnek uj alkalmazását óhajtom bemutatni, a melynél az egyik analitikai kifejezés egy — tudtommal ily czélra eddig még fel nem használt kifejezés — t. i. *hatványsor hatványsora*, a függvény pedig, mely ehez az analitikai kifejezéshez vezet e^{e^x}. A tétel, a melyhez ily módon jutok, önállóan is, még pedig egészen elemi úton levezethető, de a feltalálására a fönt kimondott elv kinálkozik legtermészetszerűbben.

A tétel maga, a melynek felállítása és bebizonyitása jelen közleményem tárgya, a következő:

Az

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \frac{1^k}{1!} + \frac{2^k}{2!} + \cdots + \frac{n^k}{n!} + \cdots$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

végtelen sorok összege mindig az e-nek, a természetes logarithmusok alapszámának, egész számú többszörösei.

E tétel kimutatása az egyes S_k sorok közvetetlen összeadása révén bizonyos nehézségekkel jár; de e nehézségek tüstént megszünnek, mihelyt az összes S_k sorokat együttesen és közös szempontból tárgyaljuk. Erre pedig utat mutat a fönt felállított elv, melynek egyik alakulása ama LAPLACE-tól eredő módszer, a mely az *alkotó függvény* (fonction génératrice) használatában áll.

Állitsuk tehát elő $\frac{S_k}{k!}$ kifejezésnek alkotó függvényét. Ezt a függvényt a

$$\varphi(x) = \frac{S_0}{0!} + \frac{S_1}{1!} x + \frac{S_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{S_k}{k!} x^k + \cdots \qquad (1.)$$

hatványsor szolgáltatja.

E hatványsor összege — miként ki fogjuk mutatni — kifejezhető az exponenciális függvény segitségével.

A $\varphi(x)$ részletesen kiirt alakja a következő kétszeresen végtelen sort szolgáltatja:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \frac{1}{0!}\left(\frac{1^0}{1!}+\frac{2^0}{2!}+\frac{3^0}{3!}+\cdots+\frac{n^0}{n!}+\cdots\right) &+\\ +\frac{1}{1!}\left(\frac{1^1}{1!}+\frac{2^1}{2!}+\frac{3^1}{3!}+\cdots+\frac{n^1}{n!}+\cdots\right)x &+\\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &+\\ +\frac{1}{k!}\left(\frac{1^k}{1!}+\frac{2^k}{2!}+\frac{3^k}{3!}+\cdots+\frac{n^k}{n!}+\cdots\right)x^k &+\\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &;\end{aligned}$$

e sor oszloponkénti összegezést is enged, minthogy az

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{(nx)^0}{0!}+\frac{(nx)^1}{1!}+\frac{(nx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(nx)^k}{k!}+\cdots\right)=\frac{e^{nx}}{n!}$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots)$$

sorok mindenütt feltétlenül összetartók. Az oszloponkénti összegezés végrehajtása után találjuk, hogy

$$\varphi(x)=\frac{e^x}{1!}+\frac{e^{2x}}{2!}+\cdots+\frac{e^{nx}}{n!}+\cdots;$$

ha ezt újból összegezzük a

$$\varphi(x)=e^{e^x}-1$$

kifejezésben az S_k alkotó függvényét találtuk az exponencziális függvény jelének segitségével.

Az imént talált alak alapján $\varphi(x)$ közvetetlenül is kifejthető hatványsorba. Mac Laurin sora alapján ugyanis

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots \qquad (2.)$$

Az (1) és (2) alatti hatványsorok összehasonlitása az

$$S_k=\varphi^{(k)}(0)=\left[\frac{d^k}{dx^k}(e^{e^x}-1)\right]_{x=0}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots)$$

egyenlőségekhez vezet, a melyeknek segitségével a fönt kiirt tétel közvetetlenül kimutatható.

Ugyanis

$$\varphi'(x) = e^x(1 + \varphi(x))$$

és LEIBNIZ formulája szerint

$$\varphi^{(k)}(x) = e^x\left(1 + \varphi(x) + \binom{k-1}{1}\varphi'(x) + \cdots + \binom{k-1}{k-1}\varphi^{(k-1)}(x)\right),$$

a honnan a

$$\varphi^{(k)}(0) = 1 + \varphi(0) + \binom{k-1}{1}\varphi'(0) + \cdots + \binom{k-1}{k-2}\varphi^{(k-2)}(0) + \binom{k-1}{k-1}\varphi^{(k-1)}(0) \qquad (3.)$$

$(k=1, 2, 3, \ldots)$

rekurrens képletsorozat adódik ki, és minthogy

$$S_0 = \varphi(0) = e-1$$

(3)-ból tüstént világos, hogy

$$S_k = \varphi^{(k)}(0) = E_k \cdot e,$$

a hol E_k pozitív egész számot jelent. Ezzel a fönt kimondott tétel teljesen be van bizonyítva.

Még mellékesen meg akarom jegyezni, hogy E_k nem csak a 3. alatti rekurzív képletsorozatból, hanem independens módon is előállítható. Ugyanis HOPPE idevonatkozó egyik képlete könnyű számítás után az E_k számára az

$$E_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\left(i^k - \binom{i}{1}(i-1)^k + \binom{i}{2}(i-2)^k + \cdots + (-1)^{i-1}\binom{i}{i-1}1^k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!}\,\frac{j^k}{j!} \qquad (\alpha)$$

kifejezést adja, mely a föntebbiek szerint mindig egész számot szolgáltat.

A fönt bebizonyított tétel a

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

értékek mellett az

$$1.\ e=\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{n}{n!}+\cdots,$$

$$2.\ e=\frac{1^2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots+\frac{n^2}{n!}+\cdots,$$

$$5.\ e=\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots+\frac{n^3}{n!}+\cdots,$$

$$15.\ e=\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots,$$

$$52.\ e=\frac{1^5}{1!}+\frac{2^5}{2!}+\frac{3^5}{3!}+\cdots+\frac{n^5}{n!}+\cdots,$$

$$203.\ e=\frac{1^6}{1!}+\frac{2^6}{2!}+\frac{3^6}{3!}+\cdots+\frac{n^6}{n!}+\cdots, \text{ etc.}$$

sorokat szolgáltatja, melyek mindannyian e-nek új előállításai.

*

Az előzőben felállított és bebizonyított tétel a differenciálszámítás segédeszközeinek mellőzésével, egészen elemi úton is bebizonyítható. Ily elemi bebizonyítást KÖNIG GYULA tanár úr közölt velem, a kinek szíves engedelmével szerencsém van ezt az alantiakban közölni.

A

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

sor, a mely az e számot definiálja, a következő alakokban is írható:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\ldots+\frac{n}{n!}+\ldots \qquad (I)$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}=\frac{2.1}{2!}+\frac{3.2}{3!}+\ldots+\frac{n(n-1)}{n!}+\ldots, \qquad (II)$$

. . . . . .

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{n!}=\frac{(k+1)k\ldots2.1}{(k+1)!}+$$

$$+\frac{(k+2)(k+1)\ldots3.2}{(k+2)!}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{n!}+\ldots \qquad (K+1)$$

Az (I) alatti előállitásból tüstént következik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = E_1 e, \qquad E_1 = 1;$$

tehát E_1 egész szám.

A (II) előállítás révén irhatjuk

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - \sum \frac{n}{n!} = E_2 e - E_1 e,$$

a honnan

$$E_2 = E_1 + 1 = 2;$$

tehát E_2 ismét egész szám.

Annak a kimutatása, hogy E_k minden pozitiv egész k mellett egész szám, teljes indukczió útján sikerül. Feltéve ugyanis azt, hogy

$$E_1, E_2, \ldots, E_k$$

egész számok, be fogjuk bizonyithatni, hogy E_{k+1} *is egész szám.*

Legyen

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-k) \equiv x^k - C_{k1}x^{k-1} + \ldots (-1)^k C_{kk},$$

úgy hogy

$$C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kk}$$

az

$$1, 2, 3, \ldots, k$$

számok első-, második-, . . . , illetőleg k-dik kombinácziós összegeit jelentik, akkor a $(K+1)$-edik előállitás részletes kiirásából következik, hogy

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{n!} - C_{k1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} + C_{k2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n!} - \ldots + (-1)^k C_{kk} \sum \frac{n}{n!}$$

a honnan

$$1 = E_{k+1} - C_{k1} E_k + C_{k2} E_{k-1} - \ldots + (-1)^k C_{kk} E_1 \qquad (\beta)$$

és innen E_{k+1}-nek egész számu volta közvetetlenül lép evidenciába; hogy E_{k+1} egyszersmind pozitiv is, az onnan következik, hogy az S_{k+1} és e positiv számoknak hányadosa.

A (β) alatti reláczió alapján az E_k együtthatóknak independens előállításához is juthatunk. Ha ugyanis a (β) alatti relácziót a

$$k=1, 2, \ldots, (k-1), k$$

értékekre képezzük, akkor az

$$\begin{aligned}
E_{k+1}-C_{k1}E_k+C_{k2}\ E_{k-1}-\ldots+[(-1)^k\ C_{kk}\ -1]E_1&=0\\
1\,.\,E_k-C_{k-11}E_{k-1}+\ldots+[(-1)^{k-1}C_{k-1\,k-1}-1]E_1&=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
1\,.\,E_3-C_{21}E_2+[C_{22}\ -1]E_1&=0\\
1\,.\,E_2+[-C_{11}\ -1]E_1&=0\\
1\,.\,E_1&=0
\end{aligned}$$

lineár egyenletrendszerhez jutunk, melynek determinánsa *egy*-gyel egyenlő és a melyből

$$E_{k+1}=$$

$$(-1)^k\begin{vmatrix}
-C_{k1} & C_{k2} & -C_{k3} & \ldots & (-1)^{k-1}C_{k\,k-1} & (-1)^k\ C_{kk} & -1\\
1 & -C_{k-11} & C_{k-12} & \ldots & (-1)^{k-2}C_{k-1\,k-2} & (-1)^{k-1}C_{k-1\,k-1} & -1\\
0 & 1 & C_{k-21} & \ldots & (-1)^{k-3}C_{k-2\,k-3} & (-1)^{k-2}C_{k-2\,k-2} & -1\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & -C_{21} & C_{22} & -1\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -C_{11} & -1
\end{vmatrix}$$

E tárgyalás érdekes mellékeredményeképen még felemlítjük, hogy az imént talált, nem épen egyszerű determináns az (α) alatti képlet alapján a

$$\sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{i-j}\ j^{k+1}}{i-!\quad j!}$$

kifejezéssel egyenlő.

Rados Gusztáv.

A TETRAÉDER MAGASSÁGAIRÓL.

Legyenek a tetraéder szögpontjai A_1, A_2, A_3, A_4 és a rajtok átmenő magasságvonalak a_1, a_2, a_3, a_4. Legyenek továbbá az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ háromszögek magasságpontjaiban ezek síkjaira merőleges egyenesek b_1, b_2, b_3, b_4.

Feltesszük, hogy mind a négy szögpont végesben, de nem egy síkban van. Ezzel azt is kizártuk, hogy két magasság párhuzamos, három magasság egy síkkal párhuzamos legyen.

I.

1. tantétel. a_i *és* b_k *egyenesek metszik egymást.**

Mert mind a két egyenes benne van az A_i ponton átmenő és A_lA_m egyenesre merőleges síkban.

a_i b_k egyenesek közös pontját $(a_i\ b_k)$-val, közös síkját $[a_i\ b_k]$-val fogjuk jelölni.

2. tantétel. Ha a_i *egyenest* a_k *és* a_l *egyenesek metszik, akkor egy pontban metszik és ezen a ponton* a_m *egyenes is átmegy, a b-egyenesek pedig a magasságokkal összeesnek.*

Minthogy b_m egyenes a_i és a_k egyeneseket metszi, de velök egy síkban nem lehet, (a_ia_k)-ponton kell átmennie. Épen így át kell mennie (a_ia_l)-ponton is. De a_i egyenessel nem eshetik össze, mert iránya más, azért (a_ia_k), (a_ia_l)-pontoknak kell egybe esniök. Legyen ez a pont M.

Ezen a ponton átmennek b_i, b_k, b_l egyenesek is, mert pl. b_i

---

* Itt is a következőkben i, k, l, m egyik tetszés szerint vett permutációját jelentik az 1, 2, 3, 4 számoknak.

metszi a_k, a_l egyeneseket, de velök egy síkban nem lehet. Igy a_i egyenessel össze kell esnie, mert azzal egy pontja és iránya közös. Épen igy esnek össze b_k és a_k, b_i és a_i.

Végül a_m egyenes is átmegy M ponton, mert b_i, b_k egyeneseket metszi s velök egy síkban nem lehet. Igy össze kell esnie b_m egyenessel.

3. tantétel. Ha a_i és b_i egyenesek összeesnek, akkor a magasságok egy pontban metszik egymást és összeesnek a b-egyenesekkel.

Minthogy b_i egyenes a_k, a_l egyeneseket metszi és a_i egyenessel összeesik, az előbbi tantétel értelmében a magasságok egy pontban metszik egymást és a b-egyenesekkel összeesnek.

4. tantétel. Ha a_i egyenest a magasságok közül csak a_k metszi, akkor a_l és a_m egyenesek is metszik egymást, még pedig úgy, hogy (a_la_m)-pont $[a_ia_k]$-sikban, (a_ia_k)-pont $[a_la_m]$-síkban van.

Minthogy b_i egyenes a_k egyenest metszi és a_i egyenessel párhuzamos, azért $[a_ia_k]$-sikban kell lennie. Ugyanebben a síkban van b_k egyenes is hasonló okból. De akkor b_i, b_k egyenesek metszik egymást. (b_ib_k)-pont nem esik össze (a_ia_k)-ponttal, mert különben a magasságok, a feltétel ellenére, egy pontban metszenék egymást.

Minthogy továbbá a_l, a_m egyenesek metszik b_i, b_k egyeneseket s három közülök egy síkban nem lehet, egymást is metszik a (b_ib_k)-pontban, a mely pedig az $[a_ia_k]$-síkban van.

Az előbbi gondolatmenetet i és l, k és m felcserelésével végigjárva rájövünk, hogy viszont (a_ia_k)-pontnak $[a_la_m]$-síkban kell lennie.

5. tantétel. Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor egy egyköpenyű hyperboloidon vannak.

Fektessünk át $a_ia_ka_l$ egyeneseken egy másodrendü felületet. Ez szükségképen egyköpenyü hyperboloid lesz, mert a három egyenes nem párhuzamos egy síkkal.

Minthogy a b-egyenesek az a-egyeneseket metszik, azok is rajta lesznek ezen a hyperboloidon valamint a_m egyenes is, a mely viszont a b-egyeneseket metszi.

6. tantétel. Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor az $[a_ib_i]$-síkok egy pontban metszik egymást.

$[a_ib_i]$-sík ugyanis átmegy az előbb szerkesztett hyperboloid czentrumán, mert annak két párhuzamos egyenesét tartalmazza.

Az eddig bebizonyított tantételekből az következik, hogy a tetraéder magasságaira nézve három eset lehetséges.

1. A magasságok egy pontban metszik egymást.

Ekkor A_i szögpont b_i egyenesre esik. De elég ezt egyik szögpontról tudni arra nézve, hogy mindenikre álljon.

2. A magasságok két szöget alkotnak külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy az egyik szögpontja a másik síkjában van és viszont.

Ekkor A_i szögpont az A_kb_i, A_lb_i, A_mb_i* síkok egyikébe esik.

2. A magasságok egy egyköpenyű hyperboloid egyik egyenesrajához tartoznak.

II.

7. tantétel. Ha a tetraéder magasságai egy pontban metszik egymást, akkor A_iA_k és A_lA_m egyenesek merőlegesek egymásra.

Mert A_iA_k egyenes merőleges $[a_la_m]$-síkra, a melyben pedig A_lA_m egyenes benne van.

Ennek egyszerű következése a

8. tantétel. Ha a tetraéder magasságai M pontban metszik egymást, akkor $A_iA_kA_lM$ tetraéder magasságai A_m pontban metszik egymást.

Ha a tetraéder A_1, A_2, A_3 szögpontjainak megtartásával A_4 szögpontot b_4 egyenesen változtatjuk, folytonosan olyan tetraédert kapunk, melynek magasságai egy pontban (M) metszik egymást.

Az $A_1A_2A_4$ siktól leírt síksor és az A_3A_4 egyenestől leírt sugársor projektivek, mert a megfelelő tagok egymásra merőlegesek. A két sort b_4 egyenessel átvágva meggyőződünk, hogy az A_4 és M

* Ha b_i az A_k ponton menne át, akkor A_kb_i sík alatt az A_k ponton átmenő és A_lA_m egyenesre merőleges sík értendő.

pontoktól leírt pontsorok projektívek. De a két pontsor az előbbi tantétel alapján fel is cserélhető. Tehát áll a következő

9. tantétel. b_4 *egyenesen az* A_4M *pontpárok involucziót alkotnak, melynek czentruma az* $A_1A_2A_3$ *síkban van.*

A tantétel utolsó része abból következik, hogy ha A_4 pont b_4 egyenesen a végtelenbe távozik, $a_1a_2a_3$ magasságok s velök M pont is $A_1A_2A_3$ síkba esik.

Az involuczió hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus a szerint, a mint $A_1A_2A_3$ háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű, mert

ha $A_1A_2A_3$ hegyesszögű háromszög, A_4M pontok $A_1A_2A_3$ sík ugyanazon oldalára esnek;

ha $A_1A_2A_3$ derékszögű, M pont a derékszögnél levő szögpontba esik, akárhol is vegyük fel A_4 pontot b_4 egyenesen;

ha $A_1A_2A_3$ tompaszögű, A_4M pontok $A_1A_2A_3$ sík különböző oldalára esnek.

Ha K az involuczió egyik kettőspontja, akkor $A_1A_2A_3K$ tetraédernek K-ban találkozó élei egymásra kölcsönösen merőlegesek.

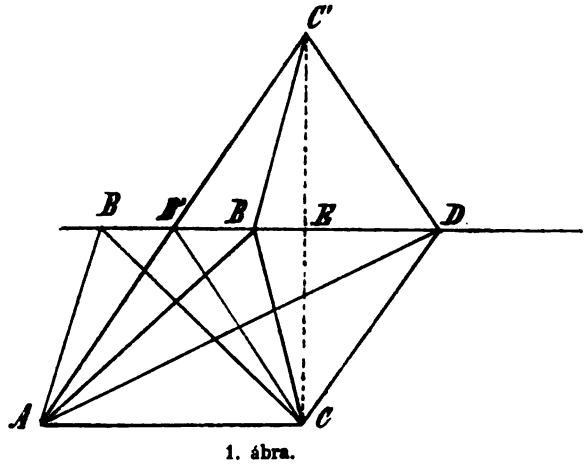
Tehát

10. tantétel. Azon pontok száma, a melyekből egy háromszög mindenik oldala derékszög alatt látszik, 2, 1 vagy 0 a szerint, a mint a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű.

Vályi Gyula.

MINIMUM-PROBLÉMÁK ELEMI TÁRGYALÁSA.

I. *A közös alapon álló, egyenlő területű háromszögek közt, annak van nagyobb kerülete, a mely a közös alapon fekvő szögek legnagyobbikát foglalja magában.*



1. ábra.

Legyen, ABC és ADC két közös alapon álló (1. ábra) egyenlő területű háromszög; legyen továbbá az AC oldal mentén ACB az ABC háromszögnek, ACD az ADC háromszögnek legnagyobb szöge és

$$ACD\sphericalangle > ACB\sphericalangle.$$

A két háromszög B és D szögpontjai az AC alappal párhuzamos $B'D$ egyenesen feküsznek. Forgassuk a BCD háromszöget $B'D$ egyenes körül $BC'D$ helyzetbe és kössük össze C' pontot A-val. Ez által az AC' közös alapon álló két háromszöget nyerünk: ADC' és

ABC'-et, mely utóbbinak B szögpontja okvetlenül az ADC' háromszögön belül fekszik, a $B'D$ egyenesnek B' és D pontok határolta részén. Ugyanis könnyen kimutatható, hogy B a $B'D$ egyenesen sem D-től jobbra, sem pedig B'-től balra nem feküdhet.

Præmissáink értelmében

$$ACD\sphericalangle > ACB\sphericalangle$$

tehát B a D-től jobbra nem eshetik (l. 1. ábra); hogy pedig B a B'-től balra sem eshetik indirekt úton következőképen adódik ki. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy az $AB'C$ háromszög egyenlőszárú: ugyanis az $AC'C$ és $B'C'E$ háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$AB'=B'C'=B'C.$$

Feltéve már most azt, hogy B a B' ponttól balra esnék, akkor állana, hogy

$$BAC\sphericalangle > B'AC\sphericalangle = B'CA\sphericalangle > BCA\sphericalangle$$

tehát feltevésünkkel ellentétben azt nyernők, hogy

$$BAC\sphericalangle > BCA\sphericalangle$$

és így lehetetlen, hogy B a B' ponttól balra feküdjék.

De ha a B pont az ADC' háromszögnek belső pontja, akkor ismeretes elemi tételből következik, hogy

$$AD+DC' > AB+BC',$$

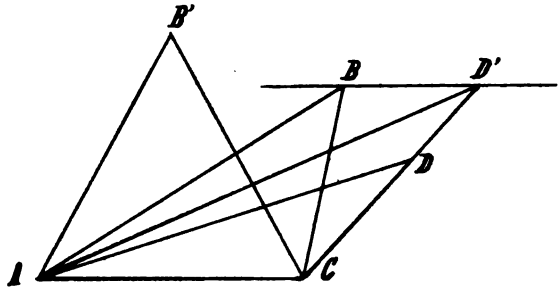
vagyis

$$AC+AD+DC > AC+AB+BC,$$

a mivel a fent kimondott tétel be van bizonyítva.

Ha az $ACB\sphericalangle$ folytanosan kisebbedik, akkor a B pont a BD egyenesen mozogva folytonosan közeledik B'-hez, az $AB+BC'$ oldalok összege pedig mindig kisebb lesz és eléri a minimumot $AB'+B'C'$-t, ha B összeesik B' ponttal. De minthogy már előbb kimutattuk, hogy $AB'=B'C'=B'C$ vagyis az $AB'C$ háromszög egyenlőszárú, egyszersmind be van bizonyítva az is, hogy: *valamennyi közös alapon álló egyenlő területű háromszögek kerületei között az egyenlőszárú háromszögé a legkisebb.*

II. *A közös alapon álló egyenlő kerületű háromszögek között annak van kisebb területe, a mely az alapon fekvő szögek legnagyobbikát foglalja magában.*



2. ábra.

Legyen (2. ábra) ABC és ADC két közös alapon álló egyenlő kerületű háromszög, legyen továbbá AC mellett

$ACB\sphericalangle$ az ABC háromszögnek,
$ACD\sphericalangle$ az ADC háromszögnek

legnagyobb szöge és

$$ACD\sphericalangle > ACB\sphericalangle.$$

Akkor $CD < CD'$, hol D' a CD és a közös AC alappal párhuzamos, az ABC háromszög B szögpontján átmenő BD' egyenesnek metszéspontja, mert ha $CD = CD'$ volna akkor ABC területe $= ADC$ területével és I. tétel szerint

$$AB+BC < AD+DC$$

volna a mi a feltétellel, hogy t. i. a két háromszög izoperimetrikus ellenkezik. Ép oly kevéssé lehet $CD > CD'$, mert ez esetben

$$AD+DC > AD'+D'C > AB+BC,$$

a mi a feltétel alapján szintén lehetetlen.

De ha $CD < CD'$ akkor ADC háromszög területe $< AD'C$ háromszög területénél azaz ADC háromszög területe $< ABC$ háromszög területénél, a mivel a kimondott tétel be van bizonyítva.

Az imént bebizonyított tételből következik, hogy az ABC háromszög területe folytonosan nagyobbodik, ha az $ACB \measuredangle$ folytonosan kisebbedik. De az adott feltételek mellett az $ACB \measuredangle$ csak addig kisebbedhetik, míg

$$ACB \measuredangle = ACB' \measuredangle = CAB' \measuredangle,$$

vagyis míg a megfelelő háromszög egyenlőszárú lesz, mert különben $ACB \measuredangle$ nem volna már az ABC háromszög legnagyobb szöge, miből megint következik, hogy az ABC háromszög területe csak addig nagyobbodhatik, míg a háromszög egyenlőszárú lesz; és így a következő maximum tételt nyerjük:

Valamennyi közös alapon álló egyenlő kerületű háromszög területei között, az egyenlőszárú háromszög területe a legnagyobb.

Balog Mór.

A PERSPEKTIV HÁROMSZÖGEKRE VONATKOZÓ HESSE-FÉLE TÉTEL EGY SPECZIÁLIS ESETE.

Adva van három háromszög:

$$A_1B_1C_1; \quad A_2B_2C_2, \quad A_3B_3C_3$$

oly megszorítással, hogy az

A_1, A_2, A_3 csúcsok az a egyenesen
B_1, B_2, B_3 « a b «
C_1, C_2, C_3 « « c «

fekűsznek és e három egyenes a, b és c egy S pontban találkozik; továbbá az

A_1B_1	oldal	A_2B_2	oldalt	γ_{12}	pontban
B_1C_1	«	B_2C_2	«	α_{12}	«
C_1A_1	«	C_2A_2	«	β_{12}	«
A_2B_2	«	A_3B_3	«	γ_{23}	«
B_2C_2	«	B_3C_3	«	α_{23}	«
C_2A_2	«	C_3A_3	«	β_{23}	«
A_3B_3	«	A_1B_1	«	γ_{31}	«
B_3C_3	«	B_1C_1	«	α_{31}	«
C_3A_3	«	C_1A_1	«	β_{31}	«

metszi; úgy első sorban Desargues tétele szerint

γ_{12}, α_{12}, és β_{12} egy ugyanazon egyenesen s_{12}-ben,
γ_{23}, α_{23}, és β_{23} « « « s_{23}-ban,
γ_{31}, α_{31}, és β_{31} « « « s_{31}-ben,

vannak; másrészt Hesse tétele szerint e három egyenes: s_{12}, s_{23}, s_{31} egy pontban, σ-ban találkozik.

Kérdjük, vajjon e három perspektiv-tengely: s_{12}, s_{23}, s_{31}, mikor esik össze; azaz hogyan kell a három perspektiv háromszöget választanunk, hogy

$$s_{12} \equiv s_{23} \equiv s_{31}$$

legyen?

Feltéve, hogy e hármas identitás fennáll, még a következő identitások következnek:

$$\begin{aligned} a_{12} &\equiv a_{23} \equiv a_{31}, \\ \beta_{12} &\equiv \beta_{23} \equiv \beta_{31}, \\ \gamma_{12} &\equiv \gamma_{23} \equiv \gamma_{31}. \end{aligned}$$

Ugyanis az a_{12}, a_{23} és a_{31} nem egyéb, mint a B_1C_1, B_2C_2 és B_3C_3 három egyenes három metszés pontja, de hogy e három metszéspont egy és ugyanazon negyedik, a háromtól különböző, egyenesen feküdjék, ez csak úgy lehet, ha a három metszéspont összeesik. Legyen tehát

$$\begin{aligned} a_{12} \equiv a_{23} \equiv a_{31} &\equiv a \\ \beta_{12} \equiv \beta_{23} \equiv \beta_{31} &\equiv \beta \\ \gamma_{12} \equiv \gamma_{23} \equiv \gamma_{31} &\equiv \gamma; \end{aligned}$$

akkor még azt is mondhatjuk, hogy az a egyenesen levő négyes pontsor:

$$SA_1A_2A_3$$

perspektiv a b egyenesen levő

$$SB_1B_2B_3$$

négyes pontsorral a γ-ra, mint perspektiv czentrumra nézve. Hasonlóképen $SB_3B_2B_3$ perspektiv $SC_1C_2C_3$-hoz az a-ra mint perspektiv czentrumra nézve és végül $SC_1C_2C_3$ perspektiv $SA_1A_2A_3$-hoz a β-ra mint perspektiv czentrumra nézve.

Ha pedig e négyes pontsorok *kettős viszonyát* képezem, a talált eredmény, mint háromszögekre vonatkozó megszorítások, még a következő hármas egyenletben fejezhető ki:

$$(SA_1A_2A_3) = (SB_1B_2B_3) = (SC_1C_2C_3).$$

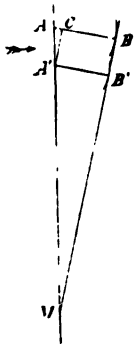
Skopál István.

PHYSIKAI SZEMLE.

Görbe fénysugarakról. O. Wiener: Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwerthung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung. *Ann. d. Ph.* IL. k. 105—149 l.

A fény az oly közegben, melyben a törésmutató párhuzamos rétegek szerint folytonosan változik, egyenes iránytól eltérő utat követ. A légkörnek ilyen állapota hozza létre a légköri sugártörés s a légtükrözés igen változatos jelenségeit.

Gondoljunk egyszerűen törő közeget, melyben a törésmutató a függélyes irányban folytonosan változik, oly módon, hogy az egymásra következő vízszintes rétegekben állandó. Ha a fény a rétegeket ferdén metszi, nyilván eltér eredeti irányától s a nagyobb törésű rétegek felé görbül. A Snell-Descartes-féle törvényből arra lehetne következtetni, hogy a vízszintes irányban meginduló (vonalnak gondolt) fénysugár állandóan megtartja irányát, egyenes marad, mert hiszen ebben az irányban a törésmutató változatlan. A valóságban nem így áll a dolog: a fénysugár ez esetben is elgörbül, és pedig abban az irányban, a melyben a törésmutató növekedik. Ennek a látszólagos ellentmondásnak oka abban van, hogy a Snell-Descartes-féle törvény a Huygens-féle hullámelméletből csupán csak homogén közegek esetére van leszármaztatva. A hullámelmélet a jelen esetben is helyes eredményre jut.



Legyen A és A' a fénysugár vízszintes részén a hullámfelület két végtelen közel eső pontja s a rajtuk átmenő vízszintes síkokban a fényterjedés sebessége c, ill. c'. Ezen pontok oly elemi hullámok kiinduló pontjai, melyek végtelen kis idő alatt a c és c' sebességekkel arányos AB, ill. $A'B'$ sugarú körökre elterjednek s így a hullámfelület ebben a pillanatban a körök közös érintője, BB' lesz. Ennek metszése az AA'-n átmenő függélyessel megadja a fénysugár görbületének középpontját, s AM a görbület sugarát. Legyen $AA'=dx$, $c-c'=dc$, $AM=r$; akkor

$$dx : r = dc : c$$

Minthogy a terj. sebesség változása a törésmutató változásával arányos, vagyis — az előjelet nem tekintvén —

$$dc : c = dn : n,$$

az előbbi arányegyenlet így is irható:

$$dx : r = dn : n.$$

A $dn : dx$ hányadost a *törésmutató esése* névvel nevezvén s n-nel jelölvén, a fénysugár görbületi sugara

$$r = \frac{n}{\mathfrak{n}}$$

E szerint a *vízszintes rétegzésű, a függélyes irányban változó törésű közegben haladó fénysugár görb. sugara egyenlő a törésmutatónak a törésmutató függélyes eséséhez való viszonyával.*

Ezekből következik, hogy még a teljesen nyugvó légkörben sem egészen egyenes a fény útja. Feltéve, hogy a hőmérséklete állandó s 0°C-kal egyenlő, a vízszintesen meginduló fénysugár görbületi sugara 4,26 földsugárral egyenlő.

Igen érdekesek a következtetések, melyeket eme fejtegetéseknek más világtestekre való alkalmazásából vonni lehet. Kummer* szerint lehetnek olyan égi testek, melyek *felülete a felszín bármely pontjából teljesen áttekinthető.* Így pl. ha feltételezhető a bolygókról, hogy légköreik oly arányban vannak, mint tömegeik, úgy a Jupiter lakója bolygójának egész felületét látja, még pedig oly csészének, melynek kerülete látszólagos horizontképen 3°48′-re a valódi horizont fölé emelkedik.

A Nap éles szegélyűnek látszik; olyannak, mintha gázalakú légkörtől körülvett folyós vagy szilárd gömb volna. Ámde a rajta uralkodó magas hőmérséklet, mely a legtöbb anyag kritikus hőmérsékletén valószínűleg túl van, arra a feltevésre késztet, hogy ott ilyen halmazállapotbeli különbség nem igen lehetséges, hanem hogy a sűrűség kívülről befelé folytonosan, tehát ugrások nélkül változik. Ennek megfelelőleg a törésmutató is, concentrikus gömbfelületek szerint kívülről befelé folytonosan növekednék. Schmidt** az előbbi fejtegetések fonalán arra az eredményre jut, hogy az olyan izzó gázgömbnek, melynek méretei a Napéval megegyez-

* Kummer: Über atmosphärische Strahlenbrechung. Monatsberichte d. Kgl. Preuss. Ak. d. Wiss. zu Berlin 1860 évf. 405. l.

** Schmidt: Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik. *Jahreshefte d. Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg.* Stuttgart, 1891.

nek, ugyanolyannak kell feltünnie, mint a minőnek látszik a Nap. A látszólagos határ — az éles szegély — a tömegközéppont körül írt azon gömb felülete, melynek sugara a tangentiális irányban meginduló fénysugár görbületi sugarával megegyezik. Az az érintővel párhuzamos fénysugár, mely ezt az optikailag kritikusnak nevezhető gömbfelületet kis szög alatt éri, folytonosan befelé törik s oly helyekre vezet, hol nagy nyomás alatt izzó, tehát folytonos színképet adó gőzök vannak. Ellenben az a fény, mely a kritikus felületen kívül esik a gázgömbre, a gömbtől, — *tehát az erősen világító pontoktól is* — eltereltetik. Ugyanez áll a kilépő fénysugarakra is s így jöhet létre az éles határ látszata. Schmidt ezt így fejezi ki: *A Nap éles szegélye optikai csalódás.*

Wiener a görbült fénysugarakat a következő módon állítja elő. 10 cm. magas, 1 cm. széles téglaalakú üvegedénybe alkoholt önt s ez alá igen vékonyra kihúzott tölcséren keresztül — a tölcsér nyilása egészen az edény fenekére ér — szénkéneget. A két folyadékot eleinte éles határfelület választja el, de diffusió útján csakhamar mindinkább vastagodó réteg keletkezik közöttük, melyben a törésmutató folytonosan változik. Ha már most keskeny résből jövő párhuzamos nap- vagy elektromos fény-nyalábot bocsátunk akár a tiszta alkoholon, akár a szénkénegen keresztül, a fény útja egyenes marad; de ha a közbeeső diffusió-rétegbe vezetjük, meggörbül, és pedig a nagyobb törésmutatóju szénkéneg felé. A fény útját a szénkéneg fluorescentiája igen szembetünővé teszi; czélszerű az alkoholt is nehány csepp fluorescinnel fluorescálóvá tenni. A kisérlet más folyadékokkal is végezhető; ilyenek pl. chloroform és szénkéneg, alkohol és víz, víz és sósav stb. Ha pedig három folyadék — pl. alkohol, szénkéneg és chloroform — öntetik egymás fölé, a fénysugár két görbületet is mutat.

Igen szép formát adtak a kísérletnek Macé de Lépinay és Perot.* 1 méter hosszúságú és 15 cm. magasságú üvegdézsában vizet és alkoholt diffundáltatnak egymásba. A belépő fény a nagyobb törésmutatójú alkohol felé törvén, ennek szabad felületén teljesen visszaverődik; útja többszörösen megtörő hullámvonal alakját veszi fel.

Wiener a görbült fénysugarakat a diffusió állandójának igen pontos meghatározására értékesítette. *B.*

*

* Macé de Lépinay et Perot; Contribution à l'étude du mirage. *Ann. de Chim. et. Phys.* 6. sér. XXVII. p. 94.

Az ellenállás absolut egységének valószínű értékéről. E. Dorn, Ueber den wahrscheinlichen Werth des Ohm nach den bisherigen Messungen * *Zeitschr. f. Instrumentenkunde.* Beiheft zum Jahrg. 1893.

Dorn munkálata két tárgyra vonatkozik; 1. a higany normál ellentállások vagy ezek másolatainak előállítására, melyeknek értéke m/mm² Hg 0° szerint ismeretes; 2. ezek ellentállásának az absolut elektromagnetikus egységekben való meghatározására. A 0°-ú higanynyal megtöltött cső ellentállásának kiszámítására való formula

$$W_0 = \frac{\sigma_0 C [L_0 + a(r_1 + r_2)]}{\left(\frac{M_0}{L_0 D_0}\right)}$$

a hol σ_0 a Hg fajlagos ellentállása, C a cső keresztmetszeti viszonyaitól függő, az egységtől kevéssé különböző állandó, L_0 a cső hossza 0°-nál, r_1 r_2 a csővégek keresztmetszete, a cső végződésétől függő állandó, M_0 a csőben foglalt Hg tömeg O_0-nál, D_0 a Hg sűrűsége 0°-nál.

Dorn az itt előforduló tényezők mérésére vonatkozó és megbízható kisérletezőktől eredő adatokat ismerteti és kritikának veti alá. A kisérleti adatok összehasonlításánál Dorn a következő adatokat használja: a=0,80, D_0=13,5956, a Hg-nak közepes hőtágulási együtthatója 0°—20° C. között 0,000180, végre

$$\sigma_T = \sigma_0 (1 + 885{,}4.10^{-6}T + 1{,}135.10^{-6}T^2)$$

Az ismertetett módszerek a következők:

1. Weber 3-dik, *u.n. csillapitási módszere.* Ebben a multiplicator mágnesének lengései észleltetnek, midőn ez nyitott s azután önmagába van zárva.

2. Weber *első módszere,* melynél a földinduktor forgatása által gerjesztett áramok nagy méretű galvanometerrel méretnek.

3. Lorenz *módszere.* Fémkorong egyenletesen forog a forgástengelylyel párhuzamos mágneses térben s a korongban áramok indukáltatnak.

---

* Az elektromos mennyiségek mérő egységeit tudvalevőleg az 1881. és 1884. párisi nemzetközi congressusok állapították meg. Az ellenállás gyakorlati egysége, az *ohm legal* 1,06 Siemens-féle egységgel, vagyis 106 cm. hosszaságú 1 mm² keresztmetszetű higanyoszlop ellenállásával tétetett egyenlővé. Ez a szám az addig tett mérések szerint legjobban közelítette meg a theoretikus ohm s a Siemens-féle ellentállási egység viszonyát. Ezen viszony legvalószínűbb értékét megállapítandó, a berlini Physikalische Reichsanstalt az ily vizsgálatokkal foglalkozott német physikusokat, névszerint Dorn, Himstedt, Kohlrausch és Wiedemann tanárokat véleményadásra szólította fel. Dorn kimerítő kritikai munkálatban ismerteti az eddigi ohm-meghatározásokat, melynek eredményeit e sorok közlik.

4. Kirchhoff *módszere* két közös tengelyü dróttekercs, az egyikben létesített áramintensitás változása következtében a másik tekercsben áramok indukáltatnak.

5. *A forgó tekercsnek* Weber-féle módszere, melylyel a British Association bizottsága tette vizsgálatait, 1863/4-ben. Ez a módszer abban áll, hogy függélyes tengely körül egyenletesen forgó dróttekercsben a földmágnességtől indított áram a mágnestüt kitéríti.

6. Lippmann *módszere*, melyben a hosszú solenoid okozta homogén mágneses térben dróttekercs egyenletes forgásban tartatik.

Dorn az előterjesztett módszerek szerint különböző észlelőktől végrehajtott kisérleti vizsgálatokon a véleménye szerint megejtendő correctiókat megtevén, a teljes súlyú adatokat összeállítja; kétes esetekben előbb a kisebb értékeket veszi.

Kohlrausch	1,06264	1,06310
Dorn	1,06235	1,06235
Rayleigh és Sidgwick	1,06255	1,06288
Rowland, Kimball, Duncan	1,06290	1,06290
Rowland 1887	1,06320	1,06320
Jones	1,06281	1,06307
Glazebrook, Dodds, Sargant	1,06265	1,06299
Himstedt	1,06257	1,06257
Rowland és Kimball	1,06310	1,06310
Rayleigh	1,06280	1,06312
Wuilleumier	1,06267	1,06285

Az első oszlopból a főközépérték a súlyok figyelembe vételével $1{,}06274 \pm 0{,}00023$; a második oszlopból való középérték 1,06292 a felényi súlyú megfigyelések felhasználásával a főközépérték:

$$1{,}06289 \pm 0{,}00024.$$

Bajos eldönteni, hogy mely értéknek tulajdonítandó nagyobb valószinüség.

Egyelőre 1,0628 úgy tekintendő, mint mely a *valódi értéket nagyon megközeliti* s ha 1,062 és 1,063 között kellene választani, mindenesetre 1,063-nak kell elsőbbséget adni.

Az itt közölt ohm-mérések dynamikai úton állapítják meg az elektromos ellenállás egységét. Kiegészítésképen az áramerősségnek chemiai mértékére vonatkozó legmegbízhatóbb adatokat is ide iktatjuk.

Az *áram erőssége* az elektrolysis útján kiválasztott ezüst tömegével igen pontosan mérhető. Ez a tömeg 1 amperre, másodperczenkint:

Kohlrausch szerint	1,11826 mgr.
Lord Rayleigh szerint	1,11794 „

Ez adatok középértékét, 1,118 milligrammot választván az amper mértékéül, az egység 0,001 mgrig pontosan meghatározottnak tekinthető.

Az ohm- és amperre vonatkozó megállapodások elegendők volnának arra, hogy az Ohm-féle törvény szerint ugyanolyan rendű pontossággal a volt is meghatároztassék. W.

*

Köralakú nyílás fényelhajlási jelenségének intensitási viszonyairól. L. Steiner Lajos ily című dolgozatát a *Math. és Természettud. Értesítő* XII. köt. 44. l.

Szerző a köralakú nyílás diffractio-spectrumának egymásra következő minimum-gyűrűi közé eső fényintensitások összegeit számította ki. Pontos számításainak eredményei az irodalomban ismeretes adatoktól feltünő eltéréseket mutatnak. Ipy pl. a Mascart *Traité d'Optique* című munkája most megjelent I. kötete 310—314. lapjain hasonló számítás eredményeit közli. M. *graphikus úton* jut közelítő számértékekhez; de hogy ezek igen pontatlan közelítések, az azonnal kiderül, ha az említett munka 314. lapján adott tabelláris átnézet mellé a dolgozat eredményeit állítjuk.

	Mascart sz.	Pontosabb értékek	Viszony Mascart sz.	Viszony Pontosabb értékek
Középső folt (1. minimumig)	0·9238·	0·837786	1·0000	1·00000
1. gyürü	0·07348	0·072146	0·0795	0·08612
2. «	0·02768	27716	300	3308
3. «	1516	14670	164	1751
4. «	911	9084	98	1084
5. «	607	6176	66	737
6. «	448	4472	48	534
7. «	342	3388	37	404
8. «	0·00258	0·002656	0·0028	0·00317
Összeg	1·06578	0·978094; a 8 gy. össz.	0·1536	0·16747

E számadatokból látható, hogy a diffractió után a középső folt intensitása a nyilásra eső fényintensitásnak közel 83·8 (Mascart szerint 92·4) százaléka, továbbá az első 8 gyürü intensitása a középső folt intensitásának 16·75, (Mascart szerint csak 15·4) százaléka.

De legfeltünőbb hiánya a Mascart közölte adatoknak, hogy már a középső folt s az első nyolcz gyürü intensitásainak összege ott a beeső fény egész intensitásánál *nagyobb* és pedig 6·5 százalékkal, a mi a dolog természete szerint képtelenség. F.

IRODALOM.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften.

15., 16. Chemische Untersuchungen über die Vegetation von Th. de Saussure 1804. Erste Hälfte 96 oldal, zweite Hälfte 114 oldal. Fordította Wieler A. — Ára 3,60 márka.

A növények táplálkozásának tanát Saussure óta egy munka sem tárgyalta ily úttörő módon, úgy hogy tanulmányozása nem eléggé ajánlható, bár módszere éppen nem didaktikai. A szerző, saját szavai szerint, a legnagyobb súlyt fektette a víz és a gázok szerepére a növények táplálkozásánál és azon változásokra, melyek ezzel a légkörben karöltve járnak. A vizsgálódás eredménye, hogy termékeny talajon termő növény szilárd alkatrészeinek képzéséhez nagyobb mértékben járul a víz s a levegő, mint a humus anyaga, melynek vízoldatát gyökereivel felszíja. A vizsgálódás nagy része a növények hamvát illeti. A mű egyes, röviden jelzett fejezetei különben a következők: I. Az oxygen hatása a csirázásra; II. a szénsav hatása a vegetációra; III. az oxygen hatása a kifejlett növényekre; IV. az oxygen hatása a növények némely szerves anyagára; V. a humusról; VI. a növények viselkedése oxygen nélküli közegekben; VII. a víz lekötése és bontása a növényekben; VIII. oldatok felszívása a növények gyökereiben; IX. a növények hamvára vonatkozó vizsgálódások. *K.*

*

19. Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von Laplace 1782, Ivory 1809, Gauss 1813, Chasles 1838 und Dirichlet 1839. Kiadta Wangerin A. 118 oldal. — Ára 2 márka.

Laplace volt az első, ki az addig csak forgási ellipsoidokra történt kutatásokat a háromtengelyű ellipsoidra is kiterjesztette, míg Ivory-nak sikerült először a külső pont vonzását a belsőéra visszavezetni, úgy hogy valamely tetszőleges pont vonzásának meghatározásában a Laplace értekezésében hiányzott egyöntetűség helyreállt. Bár mindkét értekezésben hiányzott a mathematikai szigorúság, alapvető voltuknál fogvaés történeti szempontból fontosak. Gauss dolgozatát egyszerűség és elegánczia jellemzi

s főleg azért is fontos, mert hat, igen fontos, általános tantétel megelőzi. A CHASLES-féle értekezés módszerének tisztán geometriai voltával, DIRICHLET-é pedig a fellépő integratiónak egy e czélra először használt discontinuitási tényező bevezetésével elért egyszerűsítése által tünik ki.

Különösen az égi testek alakjának elméletével foglalkozók fogják e különböző módszerű értekezések összeállitását haszonnal olvashatni. *K.*

*

20. Abhandlung über das Licht von CHRISTIAN HUYGHENS 1678. Németül kiadta LOMMEL E.; 115 oldal, 57 ábra. — Ára 2 márka.

A híres szerző egyik legnevezetesebb munkája, melyben a fény hullámzási elméletét tárgyalja és csak bámulatot kelthet, hogy egyszerű és áttekinthető volta ellenére egy évszázadnál tovább az emanatió elmélet kedveért figyelmen kívül maradhatott. HUYGENS a mű bevezetésében (I. fej.) kiindul a fény és hang között fennálló analogiából és hivatkozva Römer Jupiterhold fogyatkozási megfigyeléseire, megállapítja a fény tovaterjedési sebességét és felállítja a nevét ma is viselő fontos elvet, az elemi hullámok superpositiójának elvét, mely a legbonyolultabb fényjelenségek magyarázatát is képes megadni. A fényjelenségek mediuma gyanánt az éthert jelöli meg, ama «rendkivül ritka, rugalmas részecskékből álló anyagot, melyben a testek részecskéi mintegy úsznak, s mely azok aránylag nagy közein át szabadon szitálódik». Miután elvének segítségével levezeti a tükrözés törvényeit (II. fej.), kimutatja, hogy átlátszó testekben a szabad éthernél lassúbb terjedést tételezvén fel, a törés törvénye az ismert sinustörvény (III. fejezet). E mellett könnyen magyarázza a testek átlátszóságát, s csak az átlátszatlan testek elmélete homályosabb. Lényegileg azonos feltevése a mai nézettel, mely szerint a molekulát alkotó atomok mozgása az éthermozgás energiájának egy részét átveszik, azaz elnyelik. Igen elmés az V. fejezet végén a kettős pát alkatáról előadott feltevés is. Megjegyzendő, hogy ezen hypothesisek kihagyása a különben kényszerítő bizonyítások összefüggő lánczolatát éppen nem szakítaná meg. A fénytöréssel együtt tárgyalja (IV. fejezet) a légköri sugártörést, ugyancsak elvének felhasználásával. Az egész mű fénypontja az V. fejezet, mely az izlandi pát kettőstöréséről szól, s mely a kisérleti kutatás és elmés analysis felülmúlhatlan példája, olyannyira, hogy áttanulmányozása még a kezdőnek is sokkal nagyobb hasznára leend, mint a modern tankönyvek legtöbbjének tárgyalási modora. A kettős törés vizsgálatánál fedezte fel HUYGENS a kettősen tört fény polárosságát is és felismerte, hogy a fénysugár a kettőspátból kilépve «alakiságot vagy elrendezést» mutat. Csak 130 évvel később fedezte fel MALUS, hogy e tulajdonság az üvegről bizonyos szög alatt visszavert fényben is megvan. A polárosság elnevezés még az emanatio elmé-

letben indokolt; Young és Fresnel következtették csak belőle, hogy a fény keresztrezgésekkel magyarázandó. Hogy ez egyszerű magyarázat Huygens figyelmét kikerülte, vagy azért van, mert az ő hullámai csak pillanatnyi impulzusok tovaterjedése, melyeknek, a feltevés általánosságát megóvandó, nem valami különös periodikus alakot, sem pedig a tovaterjedés irányához különös irányulást nem tulajdonít; vagy azért, hogy a hang analogiája szerint a fényt is hosszrezgésekkel véli magyarázhatni. A VI. és utolsó fejezet tárgyalja a felületeket, melyek a fénysugarakat homocentrikusan törik vagy visszaverik. E kifejtéseknek, az eredő feltételek tényleges előállításának leküzdhetlen nehézségei miatt Huygens maga sem tulajdonít még gyakorlati értéket, de mindenesetre osztozkodunk megelégedésében, hogy ez alakokat vezérelvéből oly egyszerűen és elegánsan sikerül levezetni.

* *K.*

30. Abriss eines Lehrganges der theoretischen Chemie. Vorgetragen an der K. Universität Genua von Prof. S. Canizzaro, 1858. (Kiadja Meyer Lothar, 61 old.) Függelékben a Nuovo Cimento VI. és VII. kötetében közzétett két észrevétel Sainte-Claire, Deville és Kopp egy-egy értekezésére. Ára 1 márka.

E kis értekezés megjelenésének idejében a chémiai képlet-nyelv körül elkeseredett harczok dúltak, melyek a mai álláspontról nézve tulajdonképen az elektrochemiai dualismus, az Avogadro-féle hypothezis és az elemek relativ atomsúlya körül fordúltak. A szétágazó véleményekben Weltzien, Würtz és Kekulé igyekeztek egységet létesíteni azáltal, hogy 1860. szeptemberében Karlsruhéba általános chemikus kongresszust hívtak egybe. A valóban fényes gyülekezet, legalább alakilag, nem jutott megegyezésre; ekkor osztatta ki Canizzaro addig figyelmet alig keltett értekezését és rövid idő mulva a régi Berzelius-féle atomsúlyok ismét jogaikba léphettek. A szerző megoldotta az Avogadro és Dulong-Petit-féle szabályok között látszó ellentmondást, mire az elemek vegyértékének biztos meghatározása és ezzel az atomlánczolat elmélete lehetségessé vált. *K.*

*

31, 32. és 33. Lambert's Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augustae Vindelicorum 1760; 135 + 112 + 172 oldal.)

Ha Robert Smith: A complet system of optics, Cambridge 1738 és Bouguer: Essai d'optique sur la gradation de la lumière, Paris 1729 czimű munkáit, melyek elseje a photometriát csak távolról érinti, másika csupán a fénymérés gyakorlati alapját, és főleg a testek átlátszóságával és fényelnyelésével foglalkozik, kiveszszük, Lambert az első, ki a szóban forgó tudo-

mányág fogalmait és rendszerét megteremté; alaptörvényt állított fel s ezt legalább a posteriori, kezdetleges ugyan, de fölötte szellemes s éppen ezért bámulásunkat megérdemlő kisérletekkel igazolá. Művének hét fejezete a fénymérés összes keretét öleli fel s alig van ebbe vágó kérdés ma is, melyet LAMBERT-nél legalább megemlítve nem találnánk. Tárgyalási modora széles medrű és nehézkes menetű, mi tán arra vezetendő vissza, hogy szerzője autodidakta volt; ez teljesen megokolja, hogy művét jelen német kiadásban legalább a legfölöslegesebb dolgok kihagyásával rövidíteni iparkodtak. A levezetett tételek és megoldott feladatok száma oly nagy, hogy a mű tartalma tán legjobban egyes részeinek rövid jellemzésével ismertethető.

Az I. rész tárgyalja az alapfogalmakat, a photometria elveit, a direkt fényt és a szem itélőképességét. Itt találkozunk legelőször a modern alakban

$$dL = df \cos \varepsilon \frac{1}{r^2} \cos i' \, df' \, I$$

egyenletben kifejezett alaptörvénynyel, melyben L az I intenzitású fényforrás okozta világosságot jelenti, ha ennek fénye egy df nagyságú felületelemből ε emanatiószög alatt kiáramolva a tőle r távolban lévő df' megvilágított felületelemet i' beesési szög alatt találja. (LAMBERT a beesési és emanatiószöglet alatt a mai nyelvhasználattal ellenkezően a fénysugár és felületi normális képezte szögnek komplementumát érti.) E törvény felállításához támaszkodnak az ezt igazoló egyszerű kisérletek és egynehány elméleti feladat megoldása. — A II. rész a visszaverődés- és töréssel járó fénygyengüléssel foglalkozik. A teljesen és részben átlátszó planparallel lemezek igen beható elmélete elavult volta miatt teljesen kimaradt. Erre következik az egyszerű lencse és lencserendszerek dioptrás photometriája, természetesen a színszórási és elhajlási jelenségek mellőzésével. (ANDING E. kiadó a szöveget kisérő jegyzeteiben itt még egynehány megoldását váró problemára utal.) — A III. rész a visszavert fény photometriája, tükrök és nem fénylő testek elmélete. Az utóbbiaknál az emanatió törvénye a kiadót ismét fölötte érdekes megjegyzésekre készteti, és itt találkozunk először különösen az astronomiai photometriában fontossá vált albedo fogalmával. A szem dioptrás és physiologiai photometriája képezi a IV. rész anyagát. Az V. rész tárgya a fénysugár gyöngülése a földi légkör áthatolása közben; apró, megvilágított testecskékből álló rendszer photometriája (mely ma is, a légkör megvilágítási és szinezési kérdésére, a Saturnusgyűrű és az állatövi fény mibenlétére nézve fontos kérdés) és a szürkületi jelenségek érdekes elmélete. A VI. rész címe: a bolygórendszer megvilágításának elmélete, és különösen a hold és a bolygók, majd az állócsillagok photometriájával foglalkozik. Noha eredményei a meglehetős önkényes feltevések folytán a mai megfigyelések előállítására már nem képesek, mégis az astro-

photometriának ma is kiindulási pontjául szolgálnak. Az állócsillagokkal foglalkozó rész LAMBERT-nek a csillagrendszerről alkotott nézeteit adja és igen hozzávetőleges módot szolgáltat az állócsillagok távolságának becslésére. Az utolsó VII. rész a színes fény és az árnyék mérését tűzi ki feladatúl. Különböző színű fény photometriai összehasonlítása ma is a legnagyobb nehézséggel jár s nem mondhatjuk, hogy LAMBERT erre vonatkozó formulái vagy kisérletei a megoldáshoz közelebb vezettek volna. Az árnyékkal foglalkozó tan érdekesebb példája a holdfogyatkozások alkalmával fellépő megvilágítási viszonyoknak.

Noha LAMBERT-nek éppen nem volt czélja astrophotometriát teremteni, sőt ő a csillagászati alkalmazásokban csak kedvező példákat látott, mégis legtöbbet a tudomány ezen ága köszön a röviden ismertetett műnek, melynek elolvasása a leendő astrophysikusra nézve ép oly fontos, mint LAPLACE-é a csillagászra nézve. *K.*

*

34., 38. Photochemische Untersuchungen von R. BUNSEN und H. E. ROSCOE. 1855—1859. Erste Hälfte (96 old.); Zweite Hälfte (107 old.) (Kiadja OSTWALD W.) Ára 1.50 márka.

Két tekintetben nevezi klasszikusnak a kiadó e munkát: egyrészt, mert a fény chemiai hatásának egyes részleteiben már előbb is talált, de addig még egységes alapon nem vizsgált általános törvényeit rendkívül terjedelmes és beható tanulmánynak veti alá, úgy, hogy e téren minden további kutatás alapját és kiindulási pontját képezhette; másrészt, mert a physikai chemia terén nemcsak klasszikus minta példája, hanem a klasszikus minta maga. Összehasonlíthatlan szellemi élvezetet nyújt a szerzők kisérleti és analytikai ügyessége, a kisérletek kigondolásában mutatkozó elmésség, keresztülvitelökben tanúsított kitartása, beható gondossága, melylyel a legkisebb jelenséget is figyelemmel kisérik és kiemelkedő álláspontja széleskörű meteorolgiai és kozmikus viszonyok megitélésében.

A füzet öt értekezést foglal magában, melyek tárgyai a következők: I. és II. a fény chemiai hatásának mértékmegállapítása; III. a photochemiai inductio; IV. a fény optikai és chemiai elnyeletése; V. a Nap (a chemiai sugarak általánosan összehasonlítható és absolut mértéke); a légköri világosság chemiai hatásai; a direkt napfény chemiai hatásai; a Nap photochemiai hatásai összehasonlítva földi fényforrásával és a Napfény egyes alkotó részeinek chemiai hatásai. *K.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

15. *Milyen alakú a síkbeli harmadrendű görbe egyenlete, ha koordináta-háromszögnek triászt, és milyen alakú, ha* STEINER-*háromszöget választunk?* (VÁLYI.)

*

Első megoldás Tótössy Béla műegyetemi tanár úrtól.

Triász-nak nevezi VÁLYI úr* egy harmadrendű síkgörbének három pontját, ha mindegyiknek tangencziális pontja a másik kettő összekötő vonalán fekszik. Egy harmadrendű síkgörbének három pontja STEINER-*háromszöget* képez, ha egy bizonyos sorrend megállapítása után, mindegyik szögpont a megelőzőnek tangencziális pontja.

Legyen a harmadrendű görbe C_3; C_3-nak három tetszőleges pontja A_1, A_2, A_3; az A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 pontpárok összekötő vonala rendre a_1, a_2, a_3; az A_1, A_2, A_3 pontokban a C_3-nak érintője rendre t_1, t_2, t_3; végre az a_1t_1, a_2t_2, a_3t_3 egyenes párok metszéspontja rendre B_1, B_2, B_3: akkor a fenti értelmezések alapján A_1, A_2, A_3 *triászt* alkot, ha B_1, B_2 és B_3 a C_3-nak pontja, STEINER-*háromszöget*, ha B_1 az A_3-mal, B_2 az A_1-gyel és B_3 az A_2-vel azonos.

Ha most A_1, A_2 és A_3 a koordináta-háromszög három csúcspontja, akkor az a_1, a_2, a_3 egyenesek egyenletei rendre:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0;$$

a t_1, t_2, t_3 érintők egyenletei rendre:

$$x_2 - \lambda x_3 = 0, \quad x_3 - \mu x_1 = 0, \quad x_1 - \nu x_2 = 0;$$

a C_3 egyenlete:

$$(1) \qquad x_1^2(x_2 - \lambda x_3) + x_2^2(x_3 - \mu x_1) + x_3^2(x_1 - \nu x_2) - m x_1 x_2 x_3 = 0$$

---

* VÁLYI GYULA: «*A harmadrendű görbék elméletéhez.*» Mathematikai és természettudományi értesítő. VIII. köt. 26. l.

és a B_1, B_2, B_3 pontok koordináta viszonyai rendre:

$$\begin{aligned} &x_1 : x_2 : x_3 = 0 : \lambda : 1, \\ (2) \qquad &x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : \mu, \\ &x_1 : x_2 : x_3 = \nu : 1 : 0. \end{aligned}$$

Mint említve volt, A_1, A_2, A_3 *triászt* alkot, ha B_1, B_2 és B_3 a C_3-nak pontja. A B_1, B_2 és B_3, (2) alatti koordináta-viszonyait egymásután a C_3-nak (1) alatti egyenletébe behelyettesítvén, a λ, μ és ν meghatározására a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned} (\lambda - \nu)\,\lambda &= 0, \\ (\mu - \lambda)\,\mu &= 0, \\ (\nu - \mu)\,\nu &= 0. \end{aligned}$$

Mindegyike ezen egyenleteknek szétesik, úgy hogy a

$$\begin{aligned} \lambda - \nu &= 0, \qquad & \lambda &= 0, \\ \mu - \lambda &= 0, \qquad & \mu &= 0, \\ \nu - \mu &= 0, \qquad & \nu &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszereknek megfelelőleg két megoldást nyerünk. Az első:

$$(3) \qquad \lambda = \mu = \nu = -a,$$

a második, mely az elsőnek speciális esete:

$$(4) \qquad \lambda = \mu = \nu = 0.$$

A (3) alatti értékeket behelyettesítvén az (1) alatti egyenletbe, a C_3nak, az $A_1A_2A_3$ *triászra* vonatkoztatott egyenlete lesz:

$$(5) \qquad x_1^2(x_2 + ax_3) + x_2^2(x_3 + ax_1) + x_3^2(x_1 + ax_2) - mx_1x_2x_3 = 0.$$

A (4) alatti értékeket az (1) alatti egyenletbe behelyettesítvén, mint speciális megoldást nyerjük a C_3-nak egy speciális triászra vonatkoztatott egyenletét:

$$(6) \qquad x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 - mx_1x_2x_3 = 0.$$

A triász tangenciális pontjainak, B_1, B_2, B_3-nak koordináta-viszonyait nyerjük, ha λ, μ és ν közös értékét, $-a$-t, (2)-be helyettesítjük. Ezek a koordináta-viszonyok rendre:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \;\; 0 : -a : \;\; 1, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= \;\; 1 : \;\; 0 : -a, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= -a : \;\; 1 : \;\; 0, \end{aligned}$$

A (4) alatti speciális megoldást behelyettesítvén, azt látjuk, hogy a B_1, B_2, B_3 koordináta-viszonyai rendre:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 0 : 1,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 0 : 0,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : 1 : 0,$$

vagyis, hogy

$$B_1 \equiv A_3, \quad B_2 \equiv A_1 \quad \text{és} \quad B_3 \equiv A_2;$$

tehát $A_1A_2A_3$ a C_3-nak STEINER-*háromszöge* és így a (6) alatti egyenlet más a C_3-nak egyenlete, vonatkoztatva egy STEINER-*háromszögre* mint koordináta-háromszögre.

Hogy a STEINER-*háromszögre* vonatkoztatott egyenletet, a *triászra* vonatkoztatott egyenlettel egyszerre találtuk meg, az nagyon természetes, mert, mint VÁLYI úr azt más helyen kimutatta, *minden* STEINER-*háromszög egyszersmind triász.*

Megemlítem még, hogy ha a C_3-nak egy triászra vonatkoztatott (5) alatti egyenletében az

$$a = 1$$

értéket behelyettesítjük, az egyenlet csekély átalakítással az

$$(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2) - (m+2)x_1x_2x_3 = 0$$

alakra hozható. Ebben az esetben a B_1, B_2, B_3 pontok egy egyenesen, az *egységegyenesen* feküsznek és mindegyik a C_3-nak *inflexiós pontja.*

Ugyanily alakú volt ama harmadrendű görbe egyenlete is, mely lapunk I. kötetében az 5. szám alatt közölt feladatnak megoldását képezi; tehát ott is az A_1, A_2, A_3 háromszög, mely a keresett geometriai hely definíciójának alapját képezte, és a melyet koordináta-háromszögnek választottunk, a keletkező harmadrendű görbék mindegyikében *triászt* alkot.

*

Második megoldás dr. Szabó Péter tanár úrtól Kolozsvárt.

1. A feladat tárgyalására czélszerű lesz a síkbeli harmadrendű görbe általános egyenletét olyan trimetrikus koordináta-rendszerre vonatkoztatni, melynek alappontjai már a görbén vannak. Az egységpontot egyelőre határozatlanul hagyjuk.

Ebben a rendszerben a görbe egyenletének alakja:

$$U(x_1, x_2, x_3) \equiv a_3x_1^2x_2 + a_2x_1^2x_3 + b_1x_1x_2^2 + b_3x_2^2x_3 + c_1x_1x_3^2 + c_2x_2x_3^2 + 2mx_1x_2x_3 = 0 \qquad (1)$$

Legyen A_i a koordináta-háromszögnek

$$x_i = 0$$

oldallal szemben fekvő szögpontja, B_i az A_j, A_k pontpár kiséró pontja. Itt és a következőkben $i, j, k = 1, 2, 3$ és i, j, k egymástól különbözők.*

Ha $A_1A_2A_3$ háromszög triász, akkor B_i tangenciális pontja az A_i pontbeli érintőnek. Tehát azt a feltételt kell analitikailag kifejeznünk, hogy az A_i pontbeli érintő B_i-n átmegy. A B_i pontok koordinátái (1) egyenletből $x_i=0$ irtával adódnak ki, ha x_jx_k szorzóját zérussal egyenlítjük, ily módon

$$\begin{aligned} B_1 &\equiv (\ 0 : -c_2 : b_3), \\ B_2 &\equiv (-c_1 : \ 0 : a_3), \\ B_3 &\equiv (-b_1 : \ a_2 : 0\ ). \end{aligned}$$

Az érintők egyenletei pedig:

A_1 pontban:

$$x_2 + \frac{a_3}{a_2} x_3 = 0,$$

A_2 pontban:

$$x_3 + \frac{b_1}{b_3} x_1 = 0,$$

A_3 pontban:

$$x_1 + \frac{c_2}{c_1} x_2 = 0.$$

Rövidség kedvéért írjuk:

$$\lambda = \frac{a_3}{a_2}, \quad \mu = \frac{b_1}{b_3}, \quad \nu = \frac{c_2}{c_1}. \tag{2}$$

Ezek felhasználásával B_i pontok koordináta-viszonyaira nézve következő egyenlőségeknek kell fennállaniok:

$$\frac{c_2}{b_3} = \lambda, \quad \frac{a_3}{c_1} = \mu, \quad \frac{b_1}{a_2} = \nu. \tag{3}$$

Megjegyzendő, hogy 1. egyenletet bármelyik zérustól különböző számmal átszorozhatjuk, és egy együtthatónak tetszés szerinti véges értéket adhatunk; úgy hogy írhatjuk:

$$a_3 = \mu.$$
$$(i=1, 2, 3)$$

Ezután (2) és (3) egyenlőségekből az egyenlet együtthatói számára

---

* A terminologiára nézve valamint a kevésbbé ismeretes fogalmak definiciójára nézve l. VÁLYI GY. közleményeit, Math. és term. Értesítő. (VIII—XI. k.)

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda\mu, \\ b_1 &= \mu\nu, \quad b_2 = \nu, \\ c_1 &= \lambda, \quad c_2 = \lambda\nu \end{aligned} \tag{4}$$

alakok következnek.

Az (1) egyenletbe együtthatóinak (4) alatti kifejezéseit beírván, ez a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) \equiv\ & \mu x_1^2 x_2 + \lambda\mu x_1^2 x_3 + \mu\nu x_1 x_2^2 + \nu x_2^2 x_3 + \\ & + \lambda x_1 x_3^2 + \lambda\nu x_2 x_3^2 + 2m x_1 x_2 x_3 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Ha egy új állandót vezetünk be:

$$x = 2m - \lambda\mu\nu - 1, \tag{6}$$

(5) egyenletet következő áttekinthetőbb alakra transzformálhatjuk:

$$U(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_2 + \lambda x_3)\ (x_3 + \mu x_1)\ (x_1 + \nu x_2) + x x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{7}$$

Az első tag három lineár szorzója zérussá téve az A_i pontbeli érintők egyenleteit, a második tag lineár szorzói zérussal egyenlítve a triász oldalainak egyenleteit szolgáltatják.

Ha λ, μ, ν, x parameterek függetlenek, az egyenlet négyszeresen határozatlan görbesort képvisel, a mi összhangzásban van avval, hogy általában minden harmadrendű görbén a triászoknak négy különböző hálózata létezik. A harmadrendű és negyedosztályú görbéknél a négy hálózat nem különböző.

Ha a triász és szögpontjaihoz tartozó érintők adva vannak, a (7) egyenlet x határozatlan parametert lineárisan tartalmazván, görbesort ábrázol, melynek 9 alappontját a hozzá tartozó

$$v \equiv x_1 x_2 x_3 = 0$$

és

$$u \equiv (x_2 + \lambda x_3)\ (x_3 + \mu x_1)\ (x_1 + \nu x_2) = 0$$

szétesö görbék teljes metszés pontrendszere szolgáltatja, t. i. a kétszeresen számított A_i és a B_k pontok ($i, k = 1, 2, 3$).

Ha λ, μ, ν mennyiségek közül egy, vagy kettő zérus, szétesö görbéket nyerünk, még pedig egy egyenest és kúpszeletet, ill. 3 egyenest. Azt az esetet, mikor mindhárom zérus alább külön tárgyalom.

2. Mostani koordináta-rendszerünk alkalmas arra, hogy triászokra vonatkozó tételeket bebizonyítsunk.

Példaképen közlöm a következő tételt: «*Minden triász oldalainak kiséró pontjai újra triászt alkotnak.*»

E tételt Vályi úr tiszta geometriai után bizonyította be.* A tétel igazolására ki kell mutatnunk, hogy a B_i pontbeli érintők és a $\overline{B_jB_k}$ egyenesek metszéspontja a görbén van.

Az érintő egyenlete

B_1 pontban:

$$xx_1 + \nu(x_2 + \lambda x_3) = 0,$$

B_2 pontban:

$$xx_2 + \lambda(x_3 + \mu x_1) = 0,$$

B_3 pontban:

$$xx_3 + \mu(x_1 + \nu x_2) = 0,$$

továbbá:

$$\overline{B_2B_3} \equiv \mu(x_1 + \nu x_2) + x_3 = 0,$$
$$\overline{B_3B_1} \equiv \nu(x_2 + \lambda x_3) + x_1 = 0,$$
$$\overline{B_1B_2} \equiv \lambda(x_3 + \mu x_1) + x_2 = 0.$$

Hogy a B_1 pontbeli érintő és $\overline{B_2B_3}$ egyenes metszéspontja U görbén van, kiolvasható (7)-nek következő identikus alakjából:

$$\left.\begin{array}{l} x_2x_3(xx_1 + \nu x_2 + \lambda\nu x_3) + x_1(x_2 + \lambda x_3)(\mu x_1 + \mu\nu x_2 + x_3) = 0, \\ \text{a másik két egyenespárra vonatkozólag pedig.} \\ x_1x_3(\mu\lambda x_1 + x x_2 + \lambda x_3) + x_2(\mu x_1 + x_3)(x_1 + \nu x_2 + \nu\lambda x_3) = 0, \\ x_1x_2(\mu x_1 + \mu\nu x_2 + x x_3) + x_3(x_1 + \nu x_2)(\lambda\mu x_1 + x_1 + \lambda x_3) = 0, \end{array}\right\} \quad (8)$$

szintén identikus alakokból következik az állítás helyes volta. Ezzel kimondott tételünk igazolva van.

A $B_1B_2B_3$ triászt röviden $A_1A_2A_3$ *kisérő triászának* nevezhetjük.

3. Közel esik az a kérdés: mikor lesz a kisérő triász inflexiós triász A harmadrendű görbék ismert tulajdonsága, hogy három inflexiós pontja egy egyenesbe esik; ekkor a B_i-k koordináta-determinánsa zérus. Ez a

$$\lambda\mu\nu = 1 \quad (9)$$

feltételt adja.

Ugyanezt a feltételt kapjuk, ha azt vizsgáljuk, hogy a B_i pontok polár-kúpszeletei mikor fajulnak egyenes-párrá. A három kúpszelet egyenlete csak egy feltételt ad:

$$x - \lambda\mu\nu + 1 = \pm(x + \lambda\mu\nu - 1)$$

honnan vagy (9), vagy

$$x = 0$$

következik, de utóbbi esetben szétesö görbével van dolgunk, a mikor az inflexiós pontok határozatlanok lesznek. Azon egyenes egyenlete, mely

* Math. és termt. Értesítő VIII. 2. f.

nem szétesö harmadrendü görbe három inflexiós pontját tartalmazza koordináta-rendszerünkben

$$\mu x_1 + \mu\nu x_2 + x_3 = 0 \tag{10}$$

alakban írható. Ha ezt egység egyenesnek választjuk és

helyére
$$\begin{matrix} \mu x_1, & \mu\nu x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{matrix}$$

írunk, (7) egyenlet még így is írható:

$$(y_2 + y_3)\,(y_3 + y_1)\,(y_1 + y_2) + x' y_1 y_2 y_3 = 0, \tag{11}$$

hol az inflexiós pontokat összekötő egyenes egyenlete:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{12}$$

Az egyenlet változó x' mellett olyan görbesort képvisel, melynek kilencz alappontja közül három inflexiós pont.

Megjegyzem még, hogy egy megadott harmadrendü görbe egyenlete ily alakra mindig hozható. Ugyanis minden y_i implicite három állandót tartalmaz, tehát a (11) egyenlet tizet, a mi általában elégséges arra, hogy az általános egyenlet tíz állandója velük kifejezhető legyen.

Ha (12) végtelen távoli egyenes egyenlete, avval a görbével van dolgunk, melylyel e lapokban Törössy úr foglalkozott. (I. évf. 202. l. és köv.) E görbe i. h. 295. l. álló egyenletének alakja azonnal mutatja, hogy koordináta-háromszögül ott is triász van választva, egyszersmind azonnal következik a most tárgyalt általánosabb esetből, hogy a kiséró triász inflexiós triász, és a három inflexiós pont a végtelenbe esik stb.

4. Hátra van még a görbe egyenletének alakját Steiner-háromszögre vonatkozólag megállapítani. Ebben az esetben minden szögpont a következőnek tangenciális pontja; tehát felfogható mint amaz eset, mikor

$$B_2 \equiv A_1, \quad B_3 \equiv A_2, \quad B_1 \equiv A_3.$$

(2)-ből következik, hogy ekkor, ha az egyenlet együtthatóinak csak véges értékeket akarunk tulajdonítni,

$$a_3 = b_1 = c_2 = 0. \tag{11}$$

Az 1) egyentet tehát, α, β, γ, ρ parameterek bevezetésével így alakul:

$$U(x_1, x_2, x_3) \equiv \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_2^2 x_3 + \gamma x_3^2 x_1 + \rho x_1 x_2 x_3 = 0 \quad . \tag{13}$$

Ez az egyenlet, mivel egyik parameterrel átoszthatunk háromszorosan határozatlan görbesort képvisel. Ez megegyezik avval a ténynyel, hogy a

Steiner-háromszög megadása hat feltétellel æquivalens. (13) egyenletből könnyen kiolvasható, hogy

$$x_i = 0$$

egyenes érint,

$$x_{i+1} = 0, \quad x_i = 0,$$

metsz az

$$x_{i+2} = 0, \quad x_i = 0$$

pontban. (Az indexek mod. 3 legkisebb pozitiv maradékra redukálandók). Az egység pont czélszerű megválasztásával egy meghatározott görbénél három konstánst az egységgel tehetünk egyenlővé, úgy 13) alakja lesz:

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + \rho x_1 x_2 x_3 = 0$$

Szétesö görbét kapunk, ha a parameterek közül egy vagy kettő zérus.

FELADATOK.

23. *Az ABCD egyszerü négyszög AC és BD átlói álljanak egymásra merőlegesen. Jelentsék továbbá P_1, P_2, P_3, P_4 rendre az AB, BC, CD, DA oldalok metszéspontjait az O-ból a CD, DA, AB, BC oldalakra bocsátott merőlegesekkel. Bebizonyitandó, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög derékszögü.* (Kürschák.)

24. *Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyitandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van.*

Megjegyzés. E tétel analogonja Feuerbach tételének. Ez különösen szembe tünik, ha Feuerbach tételét igy fogalmazzuk:

Ha a sikbeli teljes négyszög szemben fekvő oldalai egymásra merőlegesek, akkor az oldalok középpontjai és a szemben fekvő oldalok metszéspontjai együtt egy körön vannak, melynek középpontja a négy pont súlypontjában van. (Vályi.)

25. *Ha az ABC háromszög magasságpontja M és a BCM, CAM, ABM háromszögek körül irt körök középpontjai A_1, B_1, C_1, bizonyitassék be, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek kongruensek.* (Vályi.)

26. *Bizonyittassék be, hogy a tetraéder magasságainak hiperboloidja ahoz a fajhoz tartozik, a melynél a Laplace-egyenlet gyökeinek összege elenyészik.* (Vályi.)

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Az elektromos szikrarajzok előállításáról. A «Math. és Phys. Lapok» f. é. 1-só füzetének 40-ik lapján K. L. tagtárs úr kérdést intéz hozzám, hogy hogyan készítem a szikrarajzokhoz szükséges kén-minium porkeveréket? A kérdésre szívesen felelek; de miután K. L. tagtárs úr maga is ezen érdekes tárgygyal foglalkozik, némi szolgálatot vélek neki s tán más tagtársaknak is tenni, ha ezen alkalommal még más fogásokat is felsorolok és cizkkemet nehány egyszerűbb kisérlettel megtoldom.

1. Mindenek előtt meg kell jegyeznem, hogy az elektromos szikrarajzokkal s egyáltalában a statikai elektromosság keretébe vágó kisérletekkel *csak télen* kellene foglalkozni és pedig azért, mivel akkor a levegőnek pára tartalma a legcsekélyebb s igy a szárazabb levegő, — különösen fűtött szobában, — kutatásainkat hathatósan elősegiti.

2. A szikrarajzok tanúlmányozását legkönnyebb s egyúttal legczélszerűbb módon oly üveglombikokon kezdjük meg, melyek elszigetelő lábon (magas üvegpoharakon) nyugszanak s a melyekben 50—60 C. fokú viz foglaltatik. Csak ha a lombikokon jól begyakoroltuk magunkat, akkor térjünk át üveg-, vagy szurok-gyanta keverékkel bevont fémlemezekre.

3. Itt is legjobban járunk, ha 15—20 centiméter átmérőjű és köralakú bádoglemezeken kezdjük a kisérleteket és csak azután kisérletezünk üveglemezekkel, mert ehhez már meglehetős gyakorlottság kivántatik. A szurokgyanta keverékének összetételéről és használatáról bővebben a czikk végén szólok.

4. A *szép* szikrarajzoknak főtitka a *nagy tisztaságban* rejlik. Ezen czélból a lombikot, valamint az üveglemezeket is a kisérlet előtt szappannal megmossuk, sok vízzel leöblítjük és lehetőleg tiszta és *puha* kendővel megtöröljük. Az üveglombik akkor már elő van készítve és még csak meleg vizet kell beleönteni és szigetelőre állítani. Nem úgy az üveglemez. Azt a megtörlés után fűtött kályha mellé kell állítani s ott hagyni addig, mig észrevehetőleg át nem melegedett és akkor is sietnünk kell a kisérlettel, mig az üveglemez egészen ki nem hül. (Lángok fölött nem lehet üveglemezeket szárítani, mert felületükre vízgőzök rakódnak le!) Ha azonban az

üveglemez 50—60 centimeternyi oldalhosszal bir, akkor a kisérlettel nem szükséges sietni. A nagyobb szolin-üveglemezek nehány óra mulva is használhatók, ha felületük valami módon be nem piszkolódik és ha *alulról ónlemezzel be vannak vonva.* Az üveglemezeknél különösen arra kell ügyelnünk, hogy felületüket puszta kézzel meg ne érintsük, mert akkor csunya és foltos rajzok keletkeznek s igy a kellemetlen mosás ujra kezdhető. Ha nyáron üveglemezekkel akarunk dolgozni, akkor igen czélszerüen járunk el, ha felületüket lehetőleg *tiszta petroleummal* leöntjük s azt aztán megint tiszta kendővel jól letöröljük.

5. Vigyáznunk kell továbbá, hogy a kén-minium pornak úgy a lombikról, valamint az üveglemezekről való letörlése tiszta és *puha kendővel* történjék. Ha a letörlés után az új szikrarajzoknál sávok mutatkoznak, az annak a jele, hogy az illető felület dörzsölés által elektromos lett. Ezen a bajon könnyen segithetünk, ha a lombikot a megtörlés után 5—6 az üveglemezeket pedig 10 perczig is állani hagyuk, mig t. i. a felületükön keletkezett elektromosságot a levegő ki nem egyenlíti.

6. *A kén-minium keverék.* Mindkét por a gyógyszertárban vásárolandó, mert ott legtisztább állapotban kapható és nem is drága. A *legfinomabb* porokat kell kivánni és pedig *súlyra nézve egyenlő mértékben.* Ezen két port tiszta papirosra kiszórjuk és tiszta késsel, vagy vastag üvegcsővel addig keverjük, mig a keverék szine teljesen homogén lesz.

7. *A beporolás* legczélszerübben vastag falú *kaucsuklabdával* eszközölhető. Az ilyen kaucsuklabda vagy üveg kereskedésekben, vagy pedig játékboltokban megszerezhető s ha vörös kaucsukból van, 15 évig is használható, holott a fehér kaucsuk 3—4 esztendő mulva törékenynyé és hasznavehetetlenné válik. — A kaucsuklabdába 3—4 centimeter hosszú és ujjnyi vastagságú üvegcsövet illesztünk, mely környöskörül *régi vászonba* van be burkolva. A vászonrongyot, hogy jól összetartson, az üvegcső oldalához ragasztjuk. — Ha most a labdába 2—3 köbcentimeter porkeveréket teszünk s *tiszta lószőrrel lefojtjuk*, akkor a porló készülék készen van. (Szükség esetében a Zacherlin-féle labdácska is használható, csakhogy fémcsövét alkalmas üvegcsővel kell helyettesíteni.

8. *A kisérletezés.* A kaucsukgömböt a kellő pillanatban kezünkbe fogjuk és a megelektromozott felülettől egy kis arasznyi távolságban addig nyomogatjuk, mig a belőle kirohanó felhőcske a keletkező alakot tisztán nem tünteti elő.

9. S most lássunk a begyakorlás kedveért, egy-két egyszerübb kisérletet.

a) A legegyszerübb kisérlet az, midőn az üveglombikot a meg nem töltött leydeni palaczkkal egy pillanatra megérintjük és a megelektromozott felületet beporoljuk. — Ugyanazt a kisérletet ugyis megtehetjük, hogy a leydeni palaczk gombját a lombik felületén ide-oda mozgatjuk. A +

elektromosság szép fehér, igen szabályos és dentrit alakú rajzokat tüntet fel, mig a — elektromosság piros felületü és igen éles körterületeket mutat. Ily módon, egy és ugyanazon lombikon, 15—20 alakot is hozhatunk létre.

b) Ha a lombik egész területe az előbbi rajzokkal már be van fedve, akkor tiszta és puha kendővel letöröljük és 5 perczig érintetlenül hagyjuk. Azután a lombikot két, elszigetelő lábon álló fém csúcs közé helyezvén, azokba a megtöltött leydeni palaczkot kisütjük. Ekkor a beporozás után két (+ és —) oly gyönyörű szikrarajzot nyerünk, melynek szépségét és természetét órákig is bámulhatjuk. (Megjegyzendő, hogy a lombikokon keletkező szikrarajzok jobb kitüntetése kedveért, a lombikban levő vízhez vagy nehány csepp tintát, anilin-kéket, vagy pedig rézammoniakot kevernünk kell.)

c) Ha most a két fémcsúcsot 5—10 centimeternyi távolságra hozzuk egymáshoz, azután a lombikot lassan a két csúcs közé toljuk és a leydeni palaczkot kisütjük, akkor *a szikra sikamlási tüneményei* teljes szépségükben tárulnak szemeink elé. (Nem egy megoldandó probléma rejlik még bennök !)

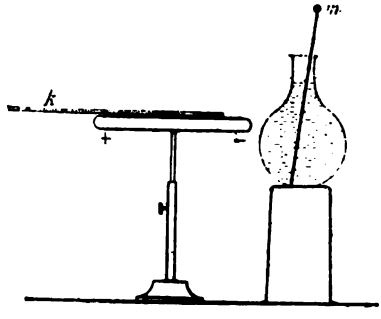
d) Erre kisérleteinket akként változtatjuk, hogy az elszigetelő lábon álló fémcsúcsot a lombik felületére (5—20 cm. távolságban) merőlegesen irányítjuk s abba a fémcsúcsba úgy sütjük ki a palaczkot, hogy a palaczknak egyik felületét a csúccsal, a másikat pedig a lombikba elhelyezett fémsodronynyal kötjük össze. (A lombikból kiálló fémdrót esetleg a földdel köthető össze.) Ezen eljárással a *sugárzó elektromosság* érdekes és még eddig kevéssé tanulmányozott tüneményeit idézzük elő. (Bővebb utasítások és képek feltalálhatók a «Zeitschrift für den phys. u. chem. Unterricht» czimü folyóiratnak 5-ik évfoly. 1-ső füz. 5—8 lapján.)

e) Az elektromos megosztás tüneményei. Ha az elektromos megosztás által nehány centimeter hosszú szikrát akarunk előállitani, akkor elszigetelő lábon álló nagyobb fémgömbre van szükségünk. (Szükség esetében az elektromos gép leszerelt gömbje is szolgálhat ilyenül.) De rendkivül szép eredményeket érünk el gömbölyü, 30 cm. átmérőjü és elszigetelő lábon álló sárgaréz asztalkával *(l. ábra.)* (Szakembereknek egy ilyen asztalka megszerzését a legmelegebben ajánlhatom.) Erre az asztalkára legelőször is róka farkkal erősen megdörzsölt *k* kaucsuklemezt teszünk s rögtön leveszszük. Akkor még semmi nemü elektromosság nem mutatkozik rajta, de a mint a kaucsuklemezt ujra feltesszük és az asztalkát ujjunkkal megérintjük, már 3—4 cm. hosszú szikrát nyerünk, midőn pedig a kaucsuklemezt levesszük, még egy hosszú szikrát csalhatunk ki az asztalkából. Mint látjuk, ez nem más, mint igen kényelmes elektrophor.

De ha most az asztalka mellé megfelelő magasságú pohárra meleg vízzel telt lombikot teszünk, akkor az *m* gombnak ujjunkkal való érintése

után, a kén-minium por segítségével, a legszebb + és — el. természetű rajzokat idézhetjük elő rajta. — Azután két, három, sőt több lombikot is állíthatunk egymás mellé és a kisütéseket tetszésünk szerint módosíthatjuk, mi által több el. tünemény meglepő egyszerűséggel kimutatható. Kevés gyakorlattal 2—10 igen szabályos felváltott jellegű és egymásban concentrikusan elhelyezett gyűrűrajzot állíthatunk elő.

Végre, ha az asztalka szélére deákflastrommal egy gombostűt vízszintesen felragasztunk és a lombikot 5—20 centimeterrel hátra toljuk, akkor a sugárzó elektromosság tüneményeit újra észlelhetjük.



f) Gyantába nyomott elektromos alakok. A «Természettudományi Közlöny» 1882. XIV köt. 180-ik lapján oly elektromos alakok vannak leirva, melyek forró puha gyantába mintegy bevésődnek. Mivel ezen még alig tanulmányozott alakok létrehozásához, a gyanta kihülése alatt, a kellő pillanatot eltalálni igen nehéz dolog, oly keveréket állítottam elő, mely órákig is puha állapotban marad és úgy a szóban levő, valamint mindenféle más és ide vágó kisérletekre alkalmas. Készítése a következő: 1 s. r. forró táblaolajban 2 s. r. fekete szurok és 6 s. r. kolophonium (gyanta) olvasztandó föl. Az igy nyert keveréket 15—20 centimeter átmérőjü és köralakú bádoglemezekre öntjük és néhány percz mulva már használhatjuk Ha az ilyen szurok-gyanta lemez esetleg megromlik, akkor egyszerüen lámpa fölött addig melegítjük, míg a megsérült felületi részek ujra össze nem olvadnak és szép sima felületet nem nyernek.

Eltekintve attól, hogy a meleg keverékbe benyomódott alakok sok elektromos tüneménynek jobb megértését teszik lehetővé, melyet másképen észrevenni sem lehetne, még azért is igen fontosak, mivel Riess által (Lehre v. d. Reibungselektricität II. Bd. §. 749.) felállított elméletet, mely szerint a Lichtenberg-féle alakok a testek felületein condensált vízgőzöknek

(páráknak) surlódásából erednek, határozottan megczáfolják, a mennyiben t. i. a meleg (sőt forró) gyantán condensált vízgőzökről szó sem lehet. Ezen kisérletek inkább a mellett tanuskodnak, hogy a *Lichtenberg- és másféle elektromos alakok keletkezése tisztán csak az elektrodoktól elszakított és dissociált állapotban levő fémgőzöknek tulajdonitandók.*

9. Ha az igy nyert alakokat mindjárt keletkezésük után kén-minium porkeverékkel behintjük, akkor azok *állandóan fixálva* s mintegy megörökítve vannak, mert a gyantáról semmi módon le nem törölhetők.

Antolik Károly.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Február 1. Rados Gusztáv: Néhány soralak az *e* számára.

Harkányi Béla: Észak-Amerika néhány tudományos intézetéről.

Február 15. Rados Gusztáv: Nehány soralak az *e* számára.

Kürschák József: Az invariánsok elméletének alaptételéről.

*

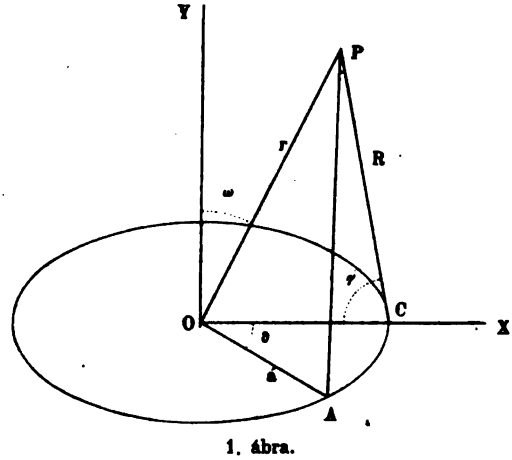
Nehány forgási test niveau- és erőgörbéi.

1. Midőn valamely test tömegvonzó erejének nagyságát és irányát ismerni akarjuk, akkor a legközvetlenebb eljárás abban áll, hogy kiszámítjuk az erőösszetevők értékét. Ez három integratiot követel, pedig sokszor már egy is elég munkát ád. Az erőösszetevők azonban ama nevezetes tulajdonsággal bírnak, hogy egy bizonyos függvénynek, a potentiálnak a coordináták szerint vett differential-hányadosai. Ismerve tehát a potentiált, kiszámíthatók az erőösszetevők. Ily módon csak egy integratio végezendő, a differentiálás pedig mindig könnyen elvégezhető.

Más előnye is van a potentiálnak: ha t. i. arról van szó, hogy mintegy egy szempillantással az erő viselkedésének átnézetes képét nyerjük, hol nagy az erő, hol kicsiny, hol változik leggyorsabban a nagysága vagy iránya, akkor a potentiál igen jó szolgálatot tesz: graphikai módszert szolgáltat az erőviszonyok feltüntetésére.

Azon pontok ugyanis, melyekben a potentiál egy és ugyanazon állandó érték, egy felületet, niveau-felületet alkotnak. A potentiál elmélete pedig azt tanítja, hogy az erő valamely pontban az azon ponton áthaladó niveau-felületre merőleges. Ismervén tehát a niveau-felületek alakját, ismerjük egyszersmind az erő irányát. De az erő nagyságára is vonhatunk következtetést a niveau-felületekből. Két szomszédos niveau-felület közelebb fekszik egymáshoz ott, a hol az erő nagyobb, mint a hol az kisebb. Ha ugyanis a két felület közötti potentiálkülömbség ΔV, a két felület normális távolsága egymástól az A bontban Δn, a A' pontban pedig $\Delta n'$, akkor az erő az A

pontban közelítőleg $\frac{\Delta V}{\Delta n}$, A'-ben pedig $\frac{\Delta V}{\Delta n'}$; nyilvánvaló, hogy az erő annál nagyobb, minél kisebb ugyanazon potentiál különbségre a két felület normális távolsága. Ha a vonzó test forgási test, akkor a niveau-felület is forgásfelület, az utóbbi tehát a meridiangörbével teljesen meg van határozva; ez a görbe a niveaugörbe. Azon görbék pedig, melyek a niveau-felületeket mindenütt derékszög alatt metszik, az erőgörbék. Nyilvánvaló, hogy az erőgörbe érintője megadja az érintési pontban az erő irányát. Ha a potentiál alakja ismeretes, eme görbék megszerkesztése nehézséggel nem jár, hanem annál több számítással. A következőkben nehány forgási testnek (körvonal, körlap és körkúp) niveau- és erőgörbéi vannak bemutatva; az előadandókból egyszersmind a görbék megszerkesztésének módja is kitünik.



1. ábra.

2. Igen egyszerű megfontolás mutatja, hogy a *körvonal* potentiálja oly P pontban, mely R távolságban fekszik a kör és a rajz síkjának metszéspontjától, C-től, s melyre nézve R és a kör síkja közötti szög γ

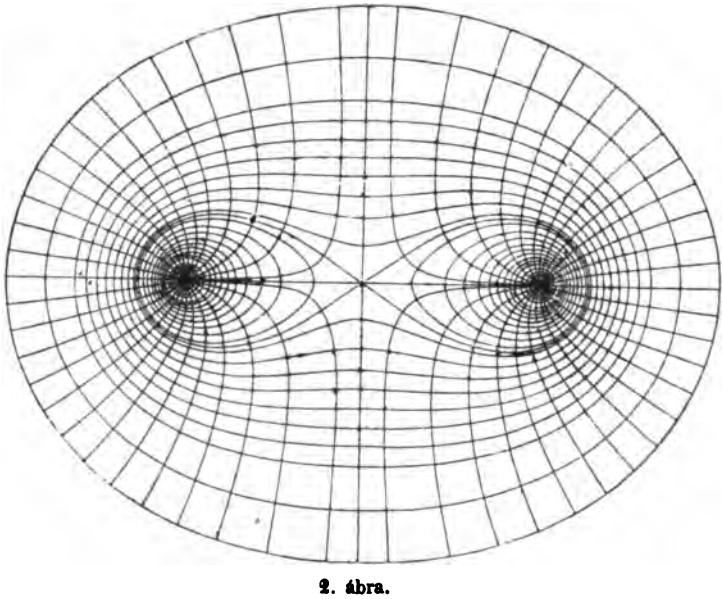
$$V = \frac{2m}{\pi\sqrt{4a^2 - 4aR\cos\gamma + R^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

$$k^2 = \frac{4a\,(a - R\cos\gamma)}{4a^2 - 4aR\cos\gamma + R^2}$$

hol a a kör sugara, m pedig a tömege.

Ezen képlet segítségével az $m=1$ és $a=1$ esetre C-ből kiinduló és 10°-ról 10°-ra húzott sugarak mentén kiszámítottam a potentiál értékét

oly æquidistans pontokban, melyek egymástól a kör sugarának huszadára feküsznek. Ezután minden egyes sugáron egyszerű arányos interpolatióval felkeresem ama pontokat, melyekben a potentiál egy és ugyanazon állandó érték. Eme pontokat folytonos görbével összekapcsolván, megkaptam a niveaugörbéket; az erőgörbéket azután úgy rajzoltam, hogy a niveaugörbéket mindenütt derékszög alatt messék. Ily módon készült a 2. ábra. A kör a rajz síkjára merőleges és áthalad azon két ponton, melyből az erőgörbék kiindulnak. A zárt görbék a niveaugörbék, a többiek az erőgörbék. A rajz úgy készült, hogy a négy legbelső niveaugörbén a potentiál értéke



2. ábra.

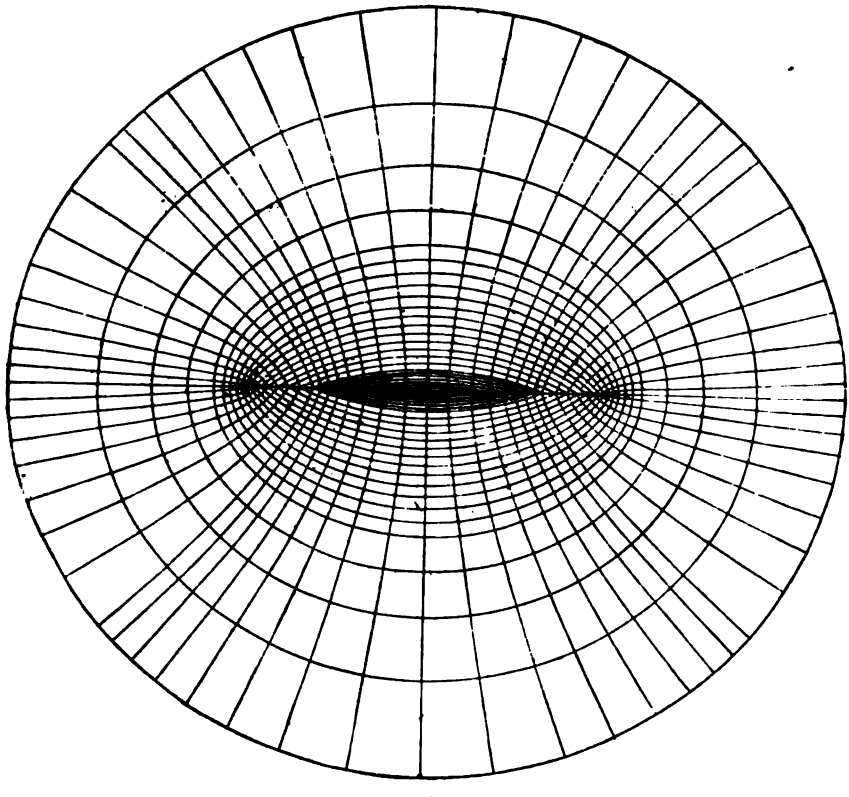
1,580, 1,500, 1,420, 1,340 úgy hogy a potentiálkülömbség 2 szomszédos görbe között 0,080; ugyanakkora a külömbség a három legszélső görbén. A közben fekvő görbék közötti potentiálkülömbség pedig 0,040. Csak a középponton átmenő nyolczas alakú görbe és két szomszédja közötti külömbség 0.020; azért van ez a három görbe oly közel egymáshoz.

Az erő nagyságának változását a niveaugörbék mentén a rajz világosan mutatja; a körhöz közeledvén, a niveaugörbék közelednek egymáshoz s az erő arra nagyobbodik. Magában a körben az erő végtelen nagy, azért oly sürüek a görbék a kör közelében. A kör közepén az erő nulla: ott a két szomszédos görbe messze fekszik egymástól.

3. A *körlemez* potentiálját sikerült ugyan zárt alakban is előállítani, de

ez a numerusos számításra nem alkalmas. Azonban igen egyszerű módon alkalmas sorfejtésre lehet jutni. Ha ugyanis valamely testnek symmetriatengelye van, P pedig eme tengelyben r távolságra fekszik eme tengely valamely O pontjától, akkor a potentiál V_0 a P pontban általánosságban előállítható ily alakú sorral

$$V_0 = a_0 + \frac{b_0}{r} + a_1 r + \frac{b_1}{r^2} + a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3} + \ldots$$



3. ábra

A gömb függvények elmélete pedig arra tanít, hogy akkor a potentiál értékét egy tetszőleges a tengelyen kívül fekvő P pontban, melynek O-tól számított távolsága r a tengelylyel ϑ szögletet képez, a következő sor adja

$$V = \left(a_0 + \frac{b_0}{r}\right) Q_0 + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\right) Q_1 + \left(a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^3}\right) Q_2 + \ldots$$

hol Q_k $\cos\vartheta$-nek k-ed rendű egész függvénye s pedig

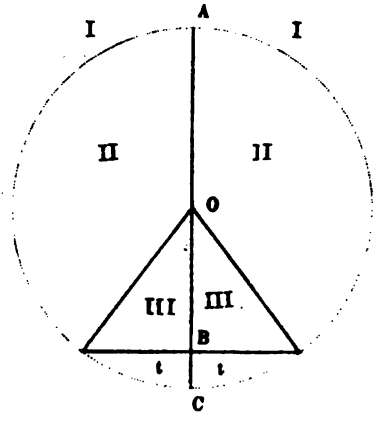
$$Q_k = \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{1.2.3\ldots k}\left[\cos^k\vartheta + \frac{k.k-1}{2.(2k-1)}\cos^{k-2}\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{k.(k-1)\,(k-2)\,(k-3)}{2.4.(2k-1)\,(2k-3)}\cos^{k-4}\vartheta + \ldots\right]$$

A körlemeznek is van symmetriatengelye, t. i. a lemez tengelye. Igen egyszerű számítás mutatja, hogy az a sugarú lemez tengelyében a középponttól r távolságon fekvő P pontban a potentiál

$$V = 2\pi\rho\sqrt{a^2+r^2} - r$$

hol ρ a lemez sűrűsége.

Ez pedig, ha $r > a$, $\frac{a}{r}$ —, ha pedig $r<a$, $\frac{r}{a}$ szerint könnyen hatványsorba fejthető; az előbbi tételt alkalmazván, a tér bármely pontjára ér-

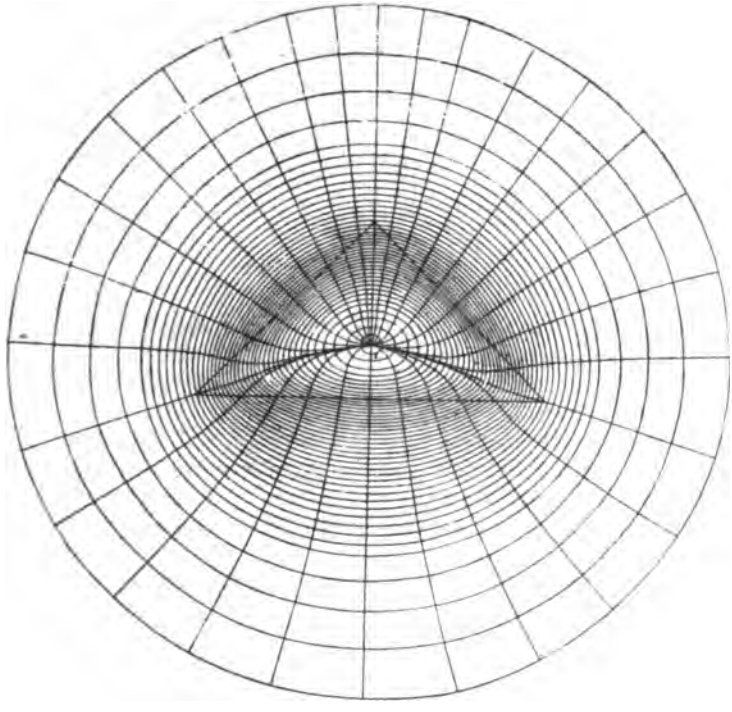


4. ábra.

vényes sorfejtéshez jutunk. A niveaugörbék (3. ábra) jól mutatják a felületen eloszlott ható jellemző sajátságát, hogy a felületen az erő iránya nem változik folytonosan, a niveaugörbének ott szögpontja van; alulról vagy felülről közeledve a felülethez, az erő iránya különböző. Az is látszik, hogy a körlemez széléhez közeledés közben az erő nagyobbodik: a niveaugörbék ott sűrűbben rendezkednek.

4. A *kúp* potentiálját véges alakban nem sikerült előállítani; hanem az előbb említett tétel alkalmas sorfejtésekhez vezetett. És pedig 4 sorhoz

jutunk, melyek egyike szolgáltatja a potentiál értékét azon pontokban, melyek oly gömbön kívül fekszenek, melynek középpontja a kúp csúcsa és átmegy az alap szélén (I. tartomány); a második sor convergens és a potentiált adja a II. térben, convergens a kúp belsejében és a $t - t$ térben is, de nem adja a potentiál értékét; egy harmadik sor a $t - t$ térben érvényes, róla ugyanaz áll, mint az előbbiről; egy negyedik sor végre



5. ábra.

a kúp belső pontjaira érvényes. Említettem, hogy a II. sor összetartó a kúp belsejében is, de nem adja a potentiál értékét, hanem attól eltér. $2\pi\sigma r^2 (\cos\alpha + \cos\vartheta)^2$-nel, ha σ a sűrűség, r a kérdéses pont távolsága a kúp csúcsától; α a kúp fél nyilásszöge és ϑ az r és a kúp tengelye képezte szög; a kúp palástján, hol $\cos\alpha = -\cos\vartheta$ a különbség nulla, a két sor ugyanazon értéket adja úgy a potentiálra, mint annak differentiál-hányadosára, mert hisz $\cos\alpha + \cos\vartheta$ a négyzeten fordul elő. A második differentiálhányadosra azonban a 2. sor különböző értéket ad, megegyezőleg a po-

tentiál azon nevezetes tulajdonságával, hogy a második differentiálhányados a határfelületen nem folytonos.

A potentiál értéke a legbelső görbén 2,300; a következőkön: 2,280, 2,240, 2,200 stb., úgy hogy a potentiálkülömbség 0,040; az öt legszélső görbénél azonban 0,080. A rajz megtekintéséből rögtön kitünik, hogy a niveaugörbék a kúp határán sürüsödnek, az erő arra nagyobbodik. A honnan az erőgörbék kiindulnak, ott a potentiálnak szélső értéke van, ott az erő zérus, a niveaugörbék egymástól távol vannak. Egyszersmind látható, hogy a kúptól aránylag kis távolságban a niveaugörbe igen közel áll a körhöz; a vonzó erő tekintetében tehát a kúp már a tömegközéppontjával helyettesíthető.

Tangl Károly.

Helyreigazitás.

M. és Ph. Lapok III. kötete 38. lapjának alulról számított 8. sorában «venyige-coordináta-rendszert» helyett olvasd:

a szőlőindának a szőlőveszsző körüli természetes fonódása után «inda-coordináta-rendszert»

41. lapjának második sorában «lap)» után tétessék: ezek határozzák meg a korong mindenkori helyzetét; ellenben ϑ_2 és ϑ_3 a belső- s végre ϑ_3 a külső gyűrűét.

43. lapjának 10α) formulája második sorában $B\cos^2\vartheta_2$-be helyébe $B\cos^2\vartheta_{2_0}$ tetessék.

43. lapjának a 12β) egyenletei után következő sorában az első egyenletnek $A=A_1+A_2$-nek kell lennie.

ADALÉK A PRIMITIV GYÖKÖK ELMÉLETÉHEZ.

I. Tétel. *Ha $p = 4n + 3$ törzsszám és $p-1$ a 2 törzstényezőn kivül még csak a q törzstényezőt tartalmazzā, akkor vagy 2 vagy q p-nek primitiv gyökei.*

Bebizonyítás. 1) $2q = p - 1$ a p-nek quadratikus nem-maradéka minthogy

$$2q \equiv -1 \pmod{p}$$

és -1 minden $4n+3$ alakú törzsszámnak nem-maradéka; ennek következtében

$$\left(\frac{2q}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = -1$$

és igy a 2 és q számok közül az egyik p-nek maradéka a másik pedig nem-maradéka.

2) A p modulusra nézve valamely szám csakis a

$$2, \quad q, \quad 2q$$

kitevőkhöz tartozhat, mert ezek a $p-1=2q$ számnak összes pozitiv osztói.

3) A 2 kitevőhöz csak egyetlen egy szám tartozhat, mert

$$\varphi(2) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1;$$

ez a szám: -1.

A q kitevőhöz csakis p-nek quadratikus maradékai tartozhatnak. Ha ugyanis D p-nek maradéka, akkor

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv D^q \equiv 1 \pmod{p}$$

és viszont minden szám, mely a $q = \frac{p-1}{2}$ kitevőhöz tartozik p-nek maradéka.

A $p-1=2q$ kitevőhöz tehát csakis a p-nek -1-től különböző nem-maradékai tartoznak, tehát ezek és csakis ezek lesznek p-nek primitiv gyökei.

4) Minthogy 2 és q maradékjellege ellenkező, 1) és 3) alapján következik, *hogy e számok egyike p-nek primitiv gyöke,* a mivel a fönt felállított tétel be van bizonyítva.

Jegyzet. Ha $q=4n_1+3$ alakú törzsszám, akkor

$$p = 8n_1 + 7$$

lévén

$$\left(\frac{2}{p}\right) = +1$$

lesz és így

$$\left(\frac{q}{p}\right) = -1,$$

a miből következik, hogy ebben az esetben a q a *p-nek primitiv gyöke.*

Ha $q=4n_1+1$ alakú törzsszám, akkor

$$p = 8n_1 + 3$$

lévén,

$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1;$$

tehát *a 2 a p-nek primitiv gyöke.*

II. Tétel. *Ha $p=4n+1$ és $n>1$ törzsszámok, akkor*

$$2, \quad \frac{p-1}{2}, \quad \frac{p+1}{2}$$

a p-nek primitiv gyökei.

Bebizonyítás. 1) A p modulusra nézve valamely szám csakis a

$$2, \quad 4, \quad 2n, \quad 4n$$

kitevőkhöz tartozhat, mert ezek a

$$p-1=4n$$

összes osztói.

2) Ha D a p-nek quadratikus maradéka, akkor

$$D^{2n}=D^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$$

lévén, D p-nek nem primitiv gyöke, hanem a

$$2, \quad n, \quad 2n$$

kitevők valamelyikéhez tartozik. Viszont minden szám, a mely a

$$2, \quad n, \quad 2n$$

kitevők valamelyikéhez tartozik, p-nek quadratikus maradéka, mert a

$$D^2\equiv 1, \quad D^n\equiv 1, \quad D^{n2}\equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenciák maguk után vonják a

$$D^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenczia fennállását.

Ebből következik, hogy p-nek minden quadratikus nem-maradéka a

$$4, \quad 4n$$

kitevők valamelyikéhez tartozik.

3) *a.* 2 a p-nek quadratikus nem-maradéka, mert a p-re vonatkozó feltevések folytán p $(8n_1+5)$-alakú törzsszám; ennek következtében 2 vagy a 4 vagy pedig a $4n$ kitevőhöz tartozik. 2 a 4 kitevőhöz nem tartozhat, mert a

$$2^4\equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenciából következik, hogy

$$(2^2+1)(2^2-1)\equiv 0 \pmod{p}$$

és minthogy $2^2-1=3$ p-vel nem osztható, kellene hogy

$$2^2+1=5\equiv 0 \pmod{p}$$

legyen, a mi csak úgy volna lehetséges, hogy

$$p = n + 1 = 5,$$

de ekkor feltevésünk ellenére

$$n = 1$$

lenne.

Minthogy 2 a 4 kitevőhöz nem tartozik, kell tehát, hogy a

$$4n = p - 1$$

kitevőhöz tartozzék, *tehát* 2 *p-nek primitiv gyöke.*

β. Határozzuk meg most $\frac{p-1}{2} = 2n$-nek indexét a 2 primitiv gyökre nézve; a szerint a mint ez a $p-1=4n$-hez képest relativ törzsszám vagy nem, $\frac{p-1}{2}$ a p-nek primitiv vagy nem-primitiv gyöke.

Minthogy 2 p-nek primitiv gyöke

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv (2^{\frac{p-1}{2}} - 1)\,(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p};$$

ugyanezen oknál fogva nem állhat fenn a

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

kongruenczia, de akkor kell, hogy

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \equiv p - 1 \pmod{p}$$

legyen; de innen következik, hogy

$$\frac{p-1}{2} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p}$$

úgy, hogy a 2 primitiv gyökre nézve

$$\text{Ind. } \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2} - 1 = 2n - 1$$

és minthogy $2n-1$ és $p-1=4n$ relativ törzsszámok, kell hogy $\frac{p-1}{2}$ *p-nek primitiv gyöke legyen.*

γ. Határozzuk meg végül $\frac{p+1}{2}$ indexét a 2 primitiv gyökre nézve. Minthogy 2 p-nek primitiv gyöke

$$2 \cdot 2^{p-2} \equiv 2^{p-1} \equiv 1 \equiv p + 1 \pmod{p},$$

de innen következik, hogy

$$\frac{p+1}{2} \equiv 2^{p-2} \pmod{p},$$

úgy hogy

$$\text{Ind.}\ \frac{p+1}{2} = p - 2$$

és minthogy $p-2$ és $p-1$ relativ törzsszámok, $\frac{p+1}{2}$ *p-nek primitiv gyöke.*

Klimkó Mihály.

A KÖRMÉRÉS ELMÉLETE ÉS TÖRTÉNETE.

(Hetedik közlemény.)

VII. A ludolfi számnak transzczendens voltáról.

A ludolfi számnak ismeretes analitikai kifejezései nem alkalmasak arra, hogy LIOUVILLE tételeinek segítségével belőlük a π-nek természetére vonatkozó következtetéseket vonhatnánk. Még MACHIN képlete is sokkal lassabban konvergáló sorokat tartalmaz, hogy belőlük ily módon akár csak π irráczionális voltát felismerhetnők. LIOUVILLE vizsgálatai tehát ez ideig a körmérés történetében csak úgy szerepelnek, mint egy fontos alapfogalom jogosultságának első bebizonyításai, de nem mint módszerek annak felismerésére, hogy a π szám is eme fogalomnak — a *transzczendens szám* fogalmának — körébe tartozik.*

A π szám transzczendens volta tényleg egészen más módszerekkel ismertetett fel, t. i. azokkal, melyeknek HERMITE a GORDAN-hoz és BORCHARDT-hoz intézett leveleiben vetette meg alapját s melyekkel utóbb «*Sur la fonction exponentielle*» című** nevezetes értekezésében az e transzczendens voltát kimutatta. A kitevős függvényre vonatkozó eme vizsgálatokat ugyanis LINDEMANN-nak sikerült annyira folytatnia, hogy az

$$e^x + 1 = 0$$

egyenlet gyökeinek, melyek π-től csak egy $(2k+1)i$-alakú tényezőben különböznek, transzczendens volta is kitűnt.

---

* A transzczendens számok létezésének egy másik, CANTOR-tól eredő, bebizonyítását l. KŐNIG *Analizis* I. 167—9. lap.

** Comptes rendus, t. LXXVII., 1873.

Midőn ily módon LINDEMANN-nak értekezése «*Über die Zahl π*» a Mathematische Annalen 20. kötetében 1882-ben a körquadratura lehető vagy lehetetlen voltának évezredek óta vitás kérdését végleg eldöntötte, melyik szakember ne érdeklődött volna fejtegetései iránt? Fájdalom, ezek igen nehezen voltak érthetők, még pedig főleg azért, mert HERMITE-nek a kitevős függvényre vonatkozó vizsgálatait egész terjedelmökben ismereteseknek tételezték fel. Ennélfogva századunk egyik legkiválóbb tudósa, WEIERSTRASS, igen háladatra méltó munkát végzett, mikor a berlini Sitzungsberichte 1885-iki kötetében — a vezérgondolatokat megtartva — LINDEMANN bebizonyitását oly módositott és egyszerűsített alakban reprodukálta, melyben szélesebb szakkörök is megérthették.

A nagy német mathematikusnak tárgyunk körül szerzett érdemét mivel sem csorbítja az a körülmény, hogy legújabban az e és π számok transzczendens voltát rövidebb és elemibb úton is sikerült igazolni, mint a melyet HERMITE, LINDEMANN és WEIERSTRASS követtek. 1893 elején HILBERT DÁVID mindkét szám arithmetikai természetét igen kevés számitással igazolta újra, ámde segédeszközei távolról sem elemiek. Ugyanis a kitevős függvényre vonatkozó e fajta vizsgálatokban kezdettől fogva nagy szerepet játszott az az $F(x)$ függvény, mely valamely $f(x)$ ráczionális egész függvénynek és valamennyi (nem azonosan eltűnő) differenciálhányadosának összege, s HILBERT e függvénynek következő komplikált analitikai kifejezésével operál:

$$F(x) = e^x \int_x^\infty f(z)\, e^{-z}\, dz,$$

hol az integrálás útja az (általában complex) alsó határtól kiindúlva a valós számok tengelyének pozitiv irányával párhuzamosan veendő.

HURWITZ azután csakhamar HILBERT-nek legalább az e-re vonatkozó vizsgálatait oly alakba öntötte, melyben integrálás többé nem fordul elő. Végre GORDAN-nak sikerült HILBERT-nek bebizonyitásából mindazt eltávolitani, a mi nem tartozik az analizisnek és algebrának elemeihez. Kár, hogy közleménye, mely a többi két tudóséval együtt a Mathematische Annalen 43. kötetében jelent

meg, rendkívül szükszavú, s hogy megértését nehány szokatlan, idegenszerű jelölés is nehezíti.

GORDAN bebizonyítására lehetőleg közérthető kidolgozásban a következő fejezetben fogunk áttérni.

A jelen fejezetben π transzczendens voltának bebizonyítását WEIERSTRASS nyomán közöljük, kitől apróbb külsőségeken kívül csak annyiban térünk el, hogy az egyik helyen a complex úton vett integrálok használatát elkerüljük s hazai irodalmunkra való tekintetből inkább a következő tételre * hivatkozunk:

Ha az ab úton (az a és b beleértésével) azaz minden z-re, mely

$$z = a + \vartheta(a-b) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

alakban írható,

$$|f'(z)| < \delta,$$

akkor

$$|f(z) - f(a)| < \delta' |z-a|,$$

ha csak δ' a δ-nál nagyobb pozitiv szám.

A bebizonyítás néhány különös ráczionális egész függvény értelmezésével és létezésének kimutatásával kezdődik. Majd ama segédtételek igazolása következik, melyek a bevezetett függvények legfontosabb tulajdonságairól adnak számot. Csak ezután térhetünk át az

$$e^z + 1 = 0$$

egyenlet vizsgálatára.

1. *Bármely $g(z)$ k-ad fokú ráczionális egész függvényhez egy és csak egy oly $G(z)$ ráczionális egész függvény található, mely vele a*

$$\frac{d}{dz}[G(z)e^{-z}] + g(z)e^{-z} = 0 \tag{1}$$

kapcsolatban van s e függvény $g(z)$-nek meg összes differenciálhányadosainak összege.

Ennek bebizonyításánál a $G(z)$ és $g(z)$ közti kapcsolatot a (1) egyenlet helyett inkább a vele egyenértékű

$$G'(z) - G(z) + g(z) = 0 \tag{2}$$

* V. ö. KÖNIG. Analizis I, 524—6. l.

egyenlettel fejezzük ki, mely még így is írható

$$G(z) = G'(z) + g(z).$$

Ezt az egyenletet csak oly $G(z)$ függvény elégítheti ki, mely $g(z)$-vel egyenlő fokú, mert különben az egyenlet két különböző oldalán nem egyeznének meg a z legmagasabb hatványát tartalmazó tagok.

Ha tehát a (2) alatti egyenletet ismételten differenciáljuk, akkor az így nyert

$$\begin{aligned}
G''(z) &- G'(z) &+g'(z) &= 0\\
G'''(z) &- G''(z) &+g''(z) &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
G^{(k)}(z) &- G^{(k-1)}(z) &+g^{(k-1)}(z) &= 0\\
G^{(k+1)}(z) &- G^{(k)}(z) &+g^{(k)}(z) &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszerben

$$G^{(k+1)}(z) = 0.$$

Ennélfogva ezeknek az egyenleteknek a (2)-höz való hozzáadása után oly egyenlet keletkezik, melynek értelmében

$$G(z) = g(z) + g'(z) + g''(z) + \ldots + g^{(k)}(z)$$

tartozik lenni.

Hogy e függvény valóban eleget tesz követelésünknek, azt a (2)-be való helyettesítés igazolja.

2. Legyen most már oly meghatározott egész számú együtthatókkal biró

$$f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n z + a_{n+1}$$

többtagú adva, hogy az

$$f(z) = 0$$

egyenletnek csupa egymástól különböző gyöke van.

Az adott $f(z)$-ből és bármely

$$h(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_\nu z^\nu + \ldots + c_n z^n$$

alakú többtagúból egy és csak is egy módon képezhető oly $(m+1)$-edfokú ráczionális egész függvény, melyek rendre a következő egyenleteknek tesznek eleget:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}[H_0(z)e^{-z}] + \qquad h(z)\ e^{-z} = 0\\
&\frac{d}{dz}[H_1(z)e^{-z}] + f'(z)\ H_0(z)\ e^{-z} = 0\\
&\frac{d}{dz}[H_2(z)e^{-z}] + f'(z)\ H_1(z)\ e^{-z} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dz}[H_m(z)e^{-z}] + f'(z)\ H_m(z)\ e^{-z} = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

A fennebbiek szerint $H_0(z)$ a

$$h_0 = h(z)$$

-nek és valamennyi differencziálhányadosainak összege. $H_0(z)$-ből $H_1(z)$ mint a

$$h_1 = f'(z)\ H_0(z)$$

szorzatnak és differencziálhányadosainak összege adódik ki. Ezután $H_2(z)$-t a

$$h_2 = f'(z)\ H_1(z)$$

szorzatból egészen hasonló módon képezzük s ezt az eljárást addig ismételjük, míg végre

$$h_m = f'(z)\ H_{m-1}(z)$$

és differencziálhányadosainak összege megadja $H_m(z)$-t.

Az így talált H_0 foka megegyezik h_0 fokával tehát általában n. A h_1 függvény foka $2n$ lévén, ugyanaz áll H_1-ről. Továbbá h_2 és vele H_2 foka $3n$. stb. Végre H_m foka $(m+1)n$. Ha $c_n = 0$, a $H_0, H_1, \ldots, H_m$ foka a mondottnál alacsonyabb, ellenben magasabbá sohasem lesz.

A meghatározott függvényekben z egyes hatványai a c_ν-k bizonyos egész többszöröseinek oly aggregátumaival vannak megszorozva, melyeknek egy részéből a_0, vagy annak valamely maga-

sabb hatványa kiemelhető. Így H_1 legmagasabb tagjainak együtthatója,

$$(n+1)\,c_n\,a_0,$$

a_0-t mint tényezőt tartalmazza. Ennélfogva h_2 és H_2-ben a két legmagasabb tag rendre a_0^2 illetve a_0-sal osztható. H_3-ban már három tagról áll, hogy a_0^3, a_0^2 illetve a a_0-sal oszthatók. A gondolatmenetet folytatva, végre

$$H_m(z) = C_0 a_0^m z^{(m+1)n} + C_1 a_0^{m-1} z^{(m+1)n-1} + \ldots + C_{m-1} a_0 z^{(m+1)n-m+1} + \\ + C_m z^{(m+1)n-m} + C_{m+1} z^{(m+1)n-m-1} + \ldots + C_{(m+1)n},$$

hol a C-k a c_ν-knek egész együtthatókkal biró homogén lineár függvényei.

3. A $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_m$ függvénysorozat egyszerű kapcsolatban van a

$$\frac{d}{dz}[K_m(z)\,e^{-z}] + \frac{h(z)}{m!} f^m(z)\,e^{-z} = 0 \tag{4}$$

egyenlet értelmezte $K_m(z)$ ráczionális egész függvénynyel.

Ugyanis a

$$\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f^{m-\mu}(z)\,e^{-z}$$

szorzatnak differenciálhányadosa

$$\frac{f^{m-\mu-1}(z)}{(m-\mu-1)!} f'(z)\,H_\mu(z)\,e^{-z} + \frac{f^{m-\mu}(z)}{(m-\mu)!}\,\frac{d}{dz}[H_\mu(z)\,e^{-z}],$$

tehát — az alkalmilag már használt

$$h_0 = h(z),\ h_1 = f'(z)\,H_0(z), \ldots, h_m = f'(z)\,H_{m-1}(z)$$

jelzést tovább is megtartva — a (3) alatti egyenletek értelmében

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_\mu(z)}{(m-\mu)!} f^{m-\mu}(z)\,e^{-z}\right] = \frac{h_{\mu+1} f^{m-\mu-1}(z)\,e^{-z}}{(m-\mu-1)!} - \frac{h_\mu f^{m-\mu}(z)\,e^{-z}}{(m-\mu)!}.$$

E számítást 0-tól m-ig minden egész számra elvégezvén, a következő egyenleteket nyerjük:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_0(z)}{m!}f^m(z)e^{-z}\right] = \frac{h_1 f^{m-1}(z)e^{-z}}{(m-1)!} - \frac{h_0 f^m(z)e^{-z}}{m!}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_1(z)}{(m-1)!}f^{m-1}(z)e^{-z}\right] = \frac{h_2 f^{m-2}(z)e^{-z}}{(m-2)!} - \frac{h_1 f^{m-1}(z)e^{-z}}{(m-1)!}$$

. . . . . .

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{H_{m-1}(z)}{1!}f(z)\quad e^{-z}\right] = \quad h_m e^{-z} \quad - \frac{h_{m-1}f(z)e^{-z}}{1!}$$

$$\frac{d}{dz}\left[H_m(z)\quad .\quad e^{-z}\right] = \qquad\qquad - \quad h_m e^{-z}.$$

Ezeknek az egyenleteknek összegében a jobb oldalon

$$-\frac{h(z)}{m!}f^m(z)e^{-z}$$

áll, ennélfogva

$$(5)\qquad K_m(z) = H_m(z) + \frac{H_{m-1}}{1!}f(z) + \ldots + \frac{H_m(z)}{m!}f^m(z).$$

4. Különösen fontos függvényekre vezet

$$a_0^{m(n-1)}H_m(z)$$

-nek $f(z)$-vel való osztása, melynél az $a_0^{m(n-1)}$ szorzót csak azért csatoltuk $H_m(z)$-hez, hogy a hányadosban és a maradékban ne lépjenek fel tört együtthatók. Hogy erre a czélra a választott szorzó valóban alkalmas, az $H_m(z)$-nek 2. alatt kifejtett alakjából következik. Ha azt megszorozzuk a_0-nak $m(n-1)$-ső hatványával, akkor

$$a_0^{m(n-1)}H_m(z) = \gamma_0 a_0^{mn}z^{(m+1)n} + \gamma_1 a_0^{mn-1}z^{(m+1)n-1} + \cdots + \gamma_{mn-1}a_0 z^{n+1} + \\ + \gamma_{mn}z^n + \gamma_{mn+1}z^{n-1} + \cdots + \gamma_{(m+1)n},$$

hol a γ-k egy része az előbb C-kel jelölt együtthatókkal teljesen megegyezik, míg a többi γ a megfelelő C-nek a_0 valamely hatványával való szorzásából keletkezett. A γ-k tehát a c_ν-knek egész együtthatókkal biró homogén, lineár függvényei.

Osztásunk most már oly

$$G(z, m)$$

$(mn-1)$-ső fokú hányadosnak és

$$g(z, m)$$

legfeljebb n-ed fokú maradéknak meghatározását kívánja, melyek a

$$a_0^{m(n-1)} H_m(z) = f(z)\, G(z, m) + g(z, m) \tag{6}$$

egyenletet kielégítik. Hogy itt mindkét oldal legmagasabb tagja ugyanaz legyen, arra $G(z, m)$ legmagasabb tagjának együtthatója

$$\gamma_0 a_0^{mn-1}$$

tartozik lenni. $G(z, m)$ többi tagjának és $g(z, m)$-nek meghatározására a (6)-ból

$$G(z, m) = \gamma_0 a_0^{mn-1} z^{mn-1} + \bar{G}(z, m)$$

helyettesítéssel kiadódó

$$a_0^{m(n-1)} H_m(z) - \gamma_0 a_0^{mn-1} z^{mn-1} f(z) = f(z)\, \bar{G}(z, m) + g(z, m)$$

egyenlet szolgál. Ennek baloldala ily alakú:

$$\bar{\gamma}_0 a_0^{mn-1} z^{mn+n-1} + \bar{\gamma}_1 a_0^{mn-2} z^{mn+n-2} + \ldots + \bar{\gamma}_{mn-2} a_0 z^{n+1} + \\ + \bar{\gamma}_{mn-1} z^n + \bar{\gamma}_{mn} z^{n-1} + \ldots + \bar{\gamma}_{(m+1)n-1}.$$

Ebből az egyenletből $\bar{G}(z, m)$ első tagjának vagyis $G(z, m)$ második tagjának együtthatója

$$\bar{\gamma}_0 a_0^{mn-2}$$

lesz s ennek meghatározása után a feladat megint az előbbi módon egyszerűsbödik. A számítást folytatva $G(z, m)$ együtthatóit rendre mint

$$a_0^{mn-1},\quad a_0^{mn-2}, \ldots, a_0,\quad 1$$

-nek s a c_ν-k bizonyos egész számú együtthatókkal biró homogén lineár függvényeinek szorzatai adódnak ki.

Ennélfogva azután a

$$g(z, m) = a_0^{m(n-1)} H_m(z) - f(z)\, G(z, m)$$

maradéknak együtthatói is a c_ν-knek egész számú együtthatókkal biró homogén lineár függvényei.

Ha $h(z)$-nek rendre z-nek zérusadik, első, stb. végre n-dik hatvá-

nyát választjuk s a megfelelő $G(z, m)$ és $g(z, m)$ függvényeket rendre

$$G_0(z, m),\ G_1(z, m), \ldots, G_n(z, m),$$
$$g_0(z, m),\ g_1(z, m), \ldots, g_n(z, m)$$

-mel jelöljük, akkor $h(z)$ bármely más választásánál

$$G(z, m) = c_0 G_0(z, m) + c_1 G_1(z, m) + \ldots + c_n G_n(z, m)$$
$$g(z, m) = c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \ldots + c_n g_n(z, m),$$

a (6) alatti egyenlet pedig a következőbe megy át:

$$(7) \qquad a_0^{m(n-1)} H_m(z) = f(z) \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu G_\nu(z, m) + \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu g_\nu(z, m).$$

A bevezetett függvények közül a $g_\nu(z. m)$-mel jelölt, egészszámú együtthatókkal biró, legfeljebb n-ed fokú egész függvények a legfontosabbak. Ámde tulajdonságaik kifejtésénél $K_m(z)$ és $H_m(z)$ vizsgálatából kell kiindulnunk.

Kürschák József.

A SÚRLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Második közlemény.)

II. Adott szilárd vonalon mozgó anyagi pont differenciálegyenleteiről.

5. Legyen a mozgó pont tömege az egység; legyenek t időpontban koordinátái x, y, z; az adott szilárd görbe érintője, első görbületi sugara, és a második legyenek sorban f, r, b; abban az esetben, ha ezen szilárd görbe maga is mozog, a tömegpont leírta pálya különbözni fog tőle; jelöljük a pályagörbe érintőjét, első görbületi sugarát és a másodikat sorban v, ρ, β-val.

Az f értelme essék össze a tömegpont relatív sebességének értelmével a szilárd görbéhez képest.

Az anyagi pontra ható P szabad erőn kívül tekintetbe veendő a szilárd vonal N *reakczió ereje*, mely az (r, b) normálsíkban működik, és F *súrlódási ereje*, mely az f relativ sebességgel egyenlő irányú és ellenkező értelmű.

Hogy a tömegpont differenciálegyenleteit fölirhassuk, csak azt kell meggondolnunk, hogy egyrészről a gyorsulás komponensei a v, ρ, β koordináta-rendszerben sorban

$$\frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{\rho}, 0,$$

és hogy más részről ezt a gyorsulást létrehozzák a P, F, N gyorsító erők; minélfogva a gyorsulás komponense bármely egyenes irányában egyenlő e gyorsító erőkével együttvéve. Ezen egyenes gyanánt sorban az f, r, b vonalakat választván, e következő egyenletekre jutunk:

$$\frac{dv}{dt}\cos(v, f) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, f) = P\cos(P, f) - F,$$
$$\frac{dv}{dt}\cos(v, r) + \frac{v^2}{r}\cos(\rho, r) = P\cos(P, r) + N\cos(N, r), \qquad (1)$$
$$\frac{dv}{dt}\cos(v, b) + \frac{v^2}{r}\cos(\rho, b) = P\cos(P, b) + N\sin(N, r),$$

Ez egyenletek épen a tömegpont összes mozgási differenciálegyenletei. Belőlük négyzetre emelés és összegezés után, — ha mindjárt tekintetbe veszszük, hogy az f, r, b irányok egymásra merőlegesen állnak, — a görbe vonal *összes* ellenállását meghatározó ezen egyenlet következik:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} + P^2 - 2P\left(\frac{dv}{dt}\cos(v, P) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, P)\right) = F^2 + N^2. \quad (2)$$

6. A mozgási egyenletek kevésbbé szimmetrikusok, de sokkal egyszerűbbekké lesznek, ha *a szilárd görbe mozdulatlan; a problema ekkor mindig quadraturára vihető vissza.* Ekkor ugyanis f, r, b azonosak v, ρ, β irányokkal, minélfogva

$$(v, f) = (r, \rho) = (b, \beta) = 0$$
$$(v, b) = (v, r) = (\rho, f) = (\rho, b) = \frac{\pi}{2}.$$

Ezeknek tekintetbe vételével a mozgási egyenleteket a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{dv}{dt} - P\cos(P, v) = -F,$$
$$\frac{v^2}{\rho} - P\cos(P, \rho) = N\cos(N, \rho), \qquad (3)$$
$$-P\cos(P, b) = N\sin(N, \rho),$$

mely egyenletekből fontos következtetések vonhatók. A másodikból és harmadikból ugyanis négyzetre emelés, összegezés és

$$\cos^2(P, \rho) + \cos^2(P, b) = 1 - \cos^2(P, v) = \sin^2(P, v)$$

ismert egyenlet folytán lészen:

$$\frac{v^4}{\rho^2} - 2\frac{v^2}{\rho}P\cos(P, \rho) + P^2\sin^2(P, v) = N^2. \qquad (4)$$

Ámde a surlódási erő alaptörvénye értelmében

$$F = k \,.\, N, \tag{4a}$$

hol k a súrlódási együttható, mely vagy állandó, vagy a v függvénye. A (4) és (4*a*) egyenletek tekintetbe vételével tehát így írhatom a (3) alatti egyenletek elsejét:

$$\frac{dv}{dt} = P\cos(P, v) - k\left(\frac{v^4}{\rho^2} - 2\frac{v^2}{\rho}P\cos(P, \rho) + P^2\sin^2(P, v)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Ezen egyenlet integrálása mindig quadraturára vezethető vissza. Jelöljük ugyanis a görbe vonal ívhosszát s-sel; akkor minden, az egyenletben előforduló mennyiség úgy fogható fel, mint az s függvénye; legyen

$$\begin{aligned} P\cos(P, v) &= f_0(s), \\ 1 : \rho^2 &= f_1(s), \\ -2\frac{P}{\rho}\cos(P, \rho) &= f_2(s), \\ P^2\sin^2(P, v) &= f_3(s), \end{aligned}$$

Más részről

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dq}\,\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}. \tag{6}$$

Az (5) egyenlet ezeknél fogva így írható:

$$\frac{dv^2}{ds} = f_0(s) - k(f_1(s)v^4 + f_2(s)v^2 + f_3(s))^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

ez pedig, tekintettel arra, hogy k vagy állandó vagy csak a v függvénye, egy *elsőrendű közönséges* differenciál-egyenlet v és s változók között.

7. Különösen egyszerűvé válik ezen differenciál-egyenlet, ha a *szabad erő P az adott kényszerpálya simuló síkjában működik.*

Ekkor $(P, b) = \frac{\pi}{2}$ lévén, a (9) egyenletek harmadika folytán $\sin(N, \rho) = 0$, vagyis a N erő az első görbületi sugár irányában működik. Minélfogva így írhatók a (3) egyenletek:

$$\frac{dv}{dt} - P\cos(P, v) = -F,$$

$$\frac{v^2}{\rho} - P\cos(P, \rho) = N,$$

úgy hogy $F=kN$ tekintetbe vételével a probléma megoldása

$$\frac{dv}{dt} = P\cos(P, v) - k\left(\frac{v^2}{\rho} - P\cos(P, \rho)\right)$$

azaz ezen differenciál-egyenletre van visszavezetve:

$$\frac{dv}{dt} + k\frac{v^2}{\rho} = P(\cos(P, v) + k\cos(P, \rho)).$$

Ez a (7) fölhasználásával még így irható:

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \frac{kv^2}{\rho^2} = P(\cos(P, v) + k\cos(P, \rho)). \tag{8}$$

MAYER *ezen egyenlet érvényességét ahhoz a speciális föltevéshez kötötte volt, hogy a pálya síkgörbe és a P erő a pálya síkjában működik.* Miként látjuk, a tétel érvényességi köre lényegesen nagyobb.

Ha k állandó, akkor a (8) differenciál-egyenlet v^2-ban lineáris, minélfogva integrálása tényleg élvégezhető. Ugyanis legyen

$$\int\frac{ds}{\rho^2} = F(s),$$

$$P(\cos P, v) + k\cos(P, \rho)) = f(s), \tag{9}$$

$$v^2 = ue^{-2kF(s)}.$$

Akkor ebből az egyenletből deriválással

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} = \frac{1}{2}\frac{du}{ds}e^{-2kF(s)} - k\frac{dF(s)}{ds}ue^{-2kF(s)}$$

azaz a (9) egyenletek elseje folytán

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \frac{kv^2}{\rho^2} = \tfrac{1}{2}e^{-2kF(s)}\frac{du}{ds},$$

minélfogva a (8) egyenlet megoldását

$$\frac{du}{ds} = 2e^{2k\,F(s)} f(s)$$

szolgáltatja. Ha tehát jelölésül

$$2\int e^{2k\,F(s)} f(s)\,ds = \varphi(s), \tag{10a}$$

akkor a (8) egyenlet megoldása:

$$v^2 = (c + \varphi(s))\,e^{-2k\,F(s)}. \tag{10}$$

8. *Egy második eset,* a midőn az (5) egyenlet egyszerűvé válik, akkor áll elő, ha *a P erő mindenütt merőleges a pálya simuló síkjára.*

Ekkor

$$(P, v) = (P, \rho) = \frac{\pi}{2};$$

minélfogva az (5) így hangzik:

$$\frac{dv}{dt} = -k\left(\frac{v^4}{\rho^2} + P^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

mely egyenlet a (6) tekintetbe vételével ezen alakot ölti:

$$\frac{dv^2}{ds} = -\frac{2k}{\rho}(v^4 + \rho^2 P^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Az erőre nézve az imént kimondott föltétel ki van elégítve, ha a pálya horizontális síkon fekvő bármilyen görbe, és a mozgó pontra ható szabad erő a nehézségi erő.

Legyen még közelebb a *pálya ρ sugarú körvonal* és *k állandó.* Akkor a (17) integrálja, ha a gyorsulást g-vel jelöljük és $v = v_0$, ha $s = 0$,

$$-\frac{2k}{\rho}s = \int_{v_0^2}^{v^2} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2 g^2}},$$

azaz

$$-\frac{2k}{\rho}s = l \cdot \frac{v^2 + (v^4 + \rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}}}{v_0^2 + (v_0^4 + \rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ebből

$$v^2 + (v^4 + \rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}} = c^2 e^{-\frac{2k}{\rho}s},$$

tehát

$$v^2 = \tfrac{1}{2}(c^2 e^{-\frac{2ks}{\rho}} - \rho^2 g^2 c^{-2} e^{\frac{2ks}{\rho}}), \tag{12}$$

hol

$$c^2 = v_0^2 + (v_0^4 + \rho^2 g^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{12a}$$

A mozgás mgszünik, ha $v=0$ lesz, a mi bekövetkezik, ha

$$\frac{c^4}{\rho^2 g^2} = e^{\frac{4ks}{\rho}},$$

azaz

$$\frac{2ks}{\rho} = l \cdot \frac{c^2}{\rho g}.$$

Ha a pálya körvonal, de k a v^2 *racionális függvénye*, akkor is elvégezhető a (11) egyenlet integrálása legföljebb körméreti (logarithmikus) függvényekkel; ha k a v-nek magának racionális függvénye, akkor legföljebb elliptikus függvényekkel. Ugyanaz mondható akkor is, ha a *levegő ellenállását* is tekintetbe veszszük és a szokott hipotézissel élünk, hogy ez a pont tényleges mozgásával ellenkező irányú és nagyságra a v^2 illetőleg a v racionális függvénye, mondjuk, l. Ekkor a P erőhöz számítandó ez is, és pedig

$$P\cos(P, v) = -l,$$
$$P\cos(P, \rho) = o,$$
$$P\sin(P, v) = g,$$

minélfogva az (5) egyenletből lesz:

$$\frac{dv}{dt} = -l - k\left(\frac{v^4}{\rho^2} + g^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

honnan

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

folytán:

$$s = -\int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{l + \frac{k}{\rho}(v^4 + g^2\rho^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ha tehát ρ állandó, a k és l pedig a v^2 raczionális függvényei, akkor $v^2 = z$ helyettesítésből folyólag az integrál legföljebb körméreti függvényre; míg ha k és l magának a v-nek rationális függvényei, akkor az integrál legföljebb elliptikus transzczendensre vezet.

Réthy Mór.

IRODALOM.

A Tesla-féle kisérletek.

Experimente mit Strömen hoher Wechselzahl und Frequenz. Zusammengestellt von Etienne de Fodor. Revidirt und mit Anmerkungen versehen von Nikolas Tesla. Wien, Pest, Leipzig. A. Hartlebens Verlag 1894. Ára 1 frt 65 kr.*

A nagyszámu vállalkozások közt, melyek újabb időben az elektromos tüneményeknek technikai téren való felhasználása czéljából létesültek, Tesla Miklós„ Amerikában működő elektrotechnikus kisérletei széles körben kiváló érdeklődést keltettek. Lehet, hogy eme érdeklődésnek oka részben abban a sajátságos eljárásban keresendő, melylyel Tesla találmányait ismerteté, t. i. a tudományos népszerű előadásokban, melyeket ő a művelt világ csaknem minden részében tartott s azokban a fényes segédeszközökkel végrehajtott szemkápráztató, kitünő kisérletekben, melyek a napilapoknak is kedvesen fogadott szórakoztató anyagot szolgáltattak. Ehhez járultak a nagy arányu perspektivák, melyeket az előadó megrajzolt: «A jövő századok világítása», «motorok hajtása nagy távolságból vezető drótok nélkül», és még több ilyenféle dolog. Habár eme vérmes reményeket illetőleg a kedélyek lassankint ismét napirendre tértek s habár Tesla elsőrendű gyakorlati czélja, az egysarku izzólámpa, melyet gyorsan váltakozó nagy feszültségü áram táplálna, csak a késő jövőben látszik elérhetőnek: a Tesla-féle kisérletek mégis nagyon figyelemre méltók, mivel az elektromosságnak úgy elméleti, mint gyakorlati oldalára vonatkozólag sok említésre méltót tárnak fel. Sajnos, hogy még most is igen nehéz a Tesla eredményeit áttekinteni s itéletet mondani felettük, mivel az ő törekvései, elvei és elért eredményei csupán csak egyes czikkekben, felolvasásokban, továbbá ezekről és szabadalmai bejelentéséről szóló értesítésekben találhatók, melyek nagyobbára nehezen megközelíthető szaklapokban vannak szétszórva. Éppen ezért örvendetes eseményül kell fogadnunk az atheni elektromos középponti állomás igazgatójának,

---

* L. *Naturwissenschaftliche Rundschau* IX. évf. 1—3. füzet.

Fodor István-nak az idézett czímen megjelent művét, melyben a Tesla-féle nyilatkozatokat, előadásokat, jelentéseket összegyűjté és kiadta.

A szerző szigoruan követi Teslát; mindig Teslát beszélteti, s ezáltal nagyon is szolgálatába szegődik az elbeszélőnek s maga is sajnálja, hogy még mindeddig nem létesült egy jól rendezett teljes ismertetés, mely a részleteket minden oldalról átdolgozva s megvilágítva nyujtaná, miért is az, a ki a kérdéses tárgyban fennforó nehézségeket ismeri, nem fog neki szemrehányást tehetni. Tesla eredményeinek rövid összefoglalása és szakszerű kritikai áttekintése tehát az ajánlásra méltó könyv megjelenése után sem látszik egészen fölöslegesnek.

A Tesla-féle kisérleteknek fő és pedig nagy értéke úgy látszik abban áll, hogy ő az első, ki ama jelenségeket, melyeknek egy részét az elmélet kilátásba helyezte, más részük pedig a laboratoriumokban már meg is figyeltetett, nagyszerű eszközökkel létesítette és oly alakban igyekezett azokat előállítani, melyben a technika is hasznosíthatja. Eközben a sok gátoló nehézséget nagy ügyességgel legyőzte és az ő fáradságot nem ismerő munkásságának köszönhető némely mellékkörülménynek felfedezése s az eljárási mód tökéletesítése, melyek most viszont a laboratoriumi munkánál hasznosíthatók.

A feladat, melynek megoldására ő — ha nem is elsőnek — de legkitartóbban törekedik az, hogy az irányukat periodikusan szaporán változtató s nagy feszültségű áramokat gyakorlatilag értékesítse.

A gyorsan váltakozó, nagy feszültségű áramok jelentősége, törvényeik sajátszerűségei, melyek a közönséges áramokéitól gyakran oly eltérők, hogy látszólagos képtelenségek támadnak — milyenek pl. az, hogy elektromos jó vezetők, mint a fémek, az elektromos kiegyenlítődések utját akadályozzák és a kiegyenlítődés az úgynevezett rossz vezetőkön át történik — a physikai laboratoriumok kis mérvű kisérleteiben már régebben észleltettek. Hertz az, ki úttörő s széles körben ismeretessé lett kisérleteivel * alapját veté meg a gyorsan váltakozó elektromos mozgásokat kisérő különös jelenségek tanulmányozásának s ezzel az újabb kutatásokra oly nagy kedvet keltett, hogy ma a physika terén működő munkaerők többsége eme jelenségek tanulmányozásával foglalkozik.

Már Hertz előtt kimutatta Sir William Thomson (jelenleg Kelvin lord) és Kirchhoff elméleti okoskodások utján, Feddersen pedig gyönyörű kisérleteivel, hogy ha valamely sürítő, például egy közönséges leydeni palaczk nem nagy ellenállásu. de szikraadásra képes záró körben süttetik ki, akkor a feszültség nem a szokott módon a positiv fegyverzettől a negativ felé tartó elektromos áramban egyenlítődik ki, hanem a töltés igen gyors ide-oda

* L. Természettudományi Közlöny XXI. köt. 353. l.

oscillálása áll be és csak az ily egyes *elektromos rezgések* kisebb vagy nagyobb száma után sül ki tényleg a palaczk. Bezold kimutatta továbbá, hogy ez oscillatiók drótokba vezetve, bennök hullámzási és interferentia tüneményeket s álló hullámokat idézhetnek elő. Ezekhez hasonló, de Bezoldtól függetlenül rendezett megfigyelésekből Hertz, ki a Maxwell-Helmholtz-féle theoriából indult ki, a tovaterjedési sebesség létezését állapította meg és az önmagát kisütő condensator rezgési számából s a tőle függő, közvetlenül mérhető hullámhosszból következett az első fontos eredmény, az t. i., hogy az elektromos háborgás kiegyenlítődésének a térfoglalásra idő kell, azaz, hogy az elektromos hatások véges sebességgel és pedig éppen azzal a sebességgel terjednek el a térben, mint a fényhatások. Kimutatta továbbá Hertz, hogy az elektromos erőknek ilyen periodikus változásai: *elektromos hullámai* valamely *vezetőn* való keresztül haladástól függetlenül is, önállóan sugározhatnak ki a térbe és közelebbről megvizsgálta ezen *elektromos erő sugárzásának* sajátságát. Ekkor aztán a theoriától kilátásba helyezett, de azért nem kevésbbé meglepő eredmény mutatkozott, az, hogy ezen sugárzás törvényei teljesen azonosak a fény- és hősugárzás törvényeivel. Ezzel a theoriának egy másik része: *az elektromágneses theoria*, melyet Maxwell állított fel, nyert kisérleti igazolást. Ez a theoria a fénytünemények hullámzási theoriájához hasonlóan periodikusan váltakozó, hullamszerüleg terjedő állapotváltozást tételez fel, de nem rugalmas kiterjedésből és összehuzódásból származtatja, mint a közönséges hullámzási elmélet, hanem épen olyan periodikusan váltakozó elektromos- s ezzel összeköttetésben magnetikus erőkből, milyeneket Hertz kisérleteinél használt. Ezzel ismertebbé lett a fény és elektromosság sokat vitatott szoros összefüggése.

Más kutatók azt találták aztán, hogy az ilyen szapora elektromos rezgések feltünő mértékben képesek ritkított gázokat, melyek kellően megritkított levegőjü üvegedényekbe vannak bezárva, világítókká tenni még akkor is, ha az edény nincsen is fémvezetőkkel felszerelve olyan módon, mint az általánosan ismert Geissler-féle csövek.

Tesla az elektromos rezgések keltésére szolgáló szaporán váltakozó elektromos áramokat kezdetben oly gépekkel létesítette, melyek elvben a váltakozó áramot fejlesztő közönséges gépekhez hasonlítottak. avval a különbséggel, hogy jóval több dróttekercscsel voltak ellátva. Igy pl. az ő szapora váltakozásu áram-fejlesztőinek egyik mintája kovácsolt vasgyürűből áll, melynek belső felén 348 fog van; ezek köré elszigetelt drótvezeték van feltekerve, keresztül-kasul, többféle helyzetben; ha e vezetéken áram megy át, akkor a fogak mind mágnesekké lesznek és pedig csucsaik felváltva déli és északi magnességüek. E gyürű belsejében egy aczél korong, melyre kovácsolt vasabroncs van erősítve, gyors forgásba hozható. Ezen az abroncson 384 drótte-

kercs van egyenlő közökben elhelyezve, melyek együtt a fegyverzetet alkotják. A fegyverzetben keletkező áramok a külső gyűrű fogaira vezettetnek s a tekercseknek a mágneses fogak előtt való elfordulása alkalmával irányát folyton változtató áram keletkezik, melyet a tengelyt dörzsölő fém rugó vesz át. Tesla az által, hogy ily módon gépében sok kicsiny elektromágnest és tekercset alkalmaz és azáltal, hogy az igen gondosan készített belső szerkezetet rendkívül gyors forgásba hozza, olyan áramokat fejlesztett, melyek *másodperczenkint* 30,000-szer változtatták irányukat. Ezek a váltakozó áramok aztán egy *transformatorban* nagy feszültségű áramokká változnak át; ez úgy történik, hogy az áramok csekély számu kanyarulatokkal biró elsőrendű tekercsbe vezettetnek, melyet a másodrendű, sok kanyarulattal biró, jól elszigetelt vékony drótból álló tekercs veszi körül épen úgy, mint a közönséges inductiós gépeknél. Az elsőrendű tekercs áramának minden erősségváltozása a másodrendű vezető tekercsben elektromótoros erőt kelt, mely egyéb körülmények egyenlősége mellett annál erősebb, minél gyorsabb egymásutánban követik egymást a főtekercs áramának erősségbeli változásai. Ha tehát Tesla az ő gyorsan váltakozó áramát ilyen transformatorba vezeti, akkor igen nagy feszültségű áramra tesz szert. Ezek ugyan még nem oly nagy feszültségűek, milyeneket közönséges elektrostatikai gépekkel, pl. a Holtz- vagy a Töpler-féle megosztó gépekkel előállíthatunk; a Tesla-féle eljárásnak azonban az az igen nagy előnye van, hogy igen nagy mennyiségű elektromosságot képes mozgásba hozni és ez lehetővé teszi, hogy a kisérletek egész sora nagy arányokban hajtható végre, holott e kisérletek a közönséges elektrostatikai gépekkel, melyek csekély mennyiségű elektromosságot szolgáltatnak, csak igen korlátolt mértékben vihetők keresztül.

De még a másodperczenkinti 30,000 irányváltozás — Ewing 50,000 irányváltozást ért el gőzturbinával közvetlenül hajtott *alternatorával!* — nem elég ahhoz, hogy az elektrostatikai kisüléssel járó jellemző tünemények nagyban állíttassanak elő, s így jött Tesla arra, hogy azt a berendezést használja kisérleteihez, mely sokkal gyorsabb elektromos rezgéseket eredményez, mint bármely váltakozó áramu gép. Ez a berendezés, mint már említve volt, a condensatorok kisütése.

Mindazon berendezéseknek, melyeket Tesla feltalált s melyekkel tulajdonképeni kisérleteit végrehajtotta, alapelve a következő: váltakozo áramot termelő, többnyire kis váltakozási számú géppel váltakozó irányu áramot létesít s ezt aztán elsőrendű transformator segélyével nagy feszültségűvé változtatja át. A feszültségnek oly nagynak kell lennie, hogy a másodrendű áramkörbe iktatott s egymáshoz közelálló két fémgolyó között a levegőn keresztül erős szikra létesüljön. A szikrakőzzel teljesen zárt másodrendű áramkörben aztán a különböző berendezések szerint majd egyik,

majd másik ponthoz vezető sodronyok vannak erősítve, melyek két egyenlő sűrítőnek egyik fegyverzetéhez — pl. a belső fegyverzetéhez — vezetnek, a mennyiben a sűrítőt leydeni palaczknak képzelhetjük. A másik — tehát a külső fegyverzetpárt — egy másik transformator elsőrendű vezetősodronyai révén, tehát *a nagy feszültségüvé alakító transformator* közvetítésével vannak egymással vezető összeköttetésben. A váltakozó áramot termelő gép működése közben az egyik sűrítőnek belső fegyverzete negativ-, a másiké pedig positiv töltést kap mindaddig, míg a két gömb közt szikra üt át; ebben a pillanatban kezdődik a kisülés. Ez azonban, mint azt már Feddersen kimutatta, oscilláló természetű s azért a nagy feszültséget létesítő transformator elsőrendű vezető drótjain, melyek a sűrítők külső fegyverzetét kötik össze, Feddersen-féle váltakozó áramok czikáznak át. Néhány pillanat mulva a belső fegyverzetek újra töltve vannak és pedig ellenkező értelemben és az oscillálás játéka minden egyes szikra keletkezésével ismétlődik és így tovább. A nagy feszültségű áramot létesítő transformatorban működő erőt tehát már nem a váltakozó áramu gép váltakozó lüktetései szolgáltatják, hanem a váltakozó áramtól megtöltött és önmagukat kisütő elektromos rezgései.

A sűrítők révén létrejövő eme rezgések azonban oly sűrűen követik egymást, hogy még a legkitünőbben szerkesztett, nagy feszültségű áramot fejlesztő gép sem közelíti meg. Már Feddersen is tanulmányozott oly rezgéseket, melyek a másodpercznek nehány százezred része alatt váltakoznak; mindig kisebb és kisebb sűrítőket használván, olyan váltakozó áramok létesíthetők, melyek másodperczenkint milliószor, sőt százmilliószor változtatják irányukat. Hertz azt, hogy kisérleteit egy közönséges laboratorium szük körében létesíthette, igen kicsiny sűrítők alkalmazásával érte el, melyekben a kisülés alkalmával az elektromosság oly gyorsan oscillált ide-oda, hogy daczára a másodperczenkint 300,000 kilométernyi rendkívüli nagy terjedési sebességnek, csak nehány deciméter hosszuságu elektromos hullámok keletkeztek, s ezeket már könnyen lehetett tanulmányozni.

A váltakozó áramnak ily átalakítása még más eredményre is vezet. Ugyanis minél gyorsabban váltakozik az elsőrendű indító áram, annál nagyobb feszültségű áram indíttatik a transformator másodrendű vezető drótjában.

Ha tehát Tesla gépének 30,000-szer váltakozó árama helyett a sűrítők 100-szor, sőt 1000-szer gyorsabban váltakozó kisülési áramait működteti az elsőrendű (primär) vezető tekercsekben, akkor azon eredmény mellett, melyet a váltakozó áram nagyszámu változása létesít, még rendkívül nagy feszültség is jön létre, oly feszültség, mely a legnagyobb hatásu elektrostatikai gépekével is teljesen fölér.

A sűrítők oscilláló kisülésének a váltakozó áramokra való alkalmazása

és a váltakozó áramok átalakítása abból a czélból, hogy feszültség és szapora váltakozás létesüljön, miket eddig ez úton előállítani nem törekedtek, Tesla-nak legnagyobb érdeme.

Habár a gyorsan váltakozó áram előállításának a Hertz-féle kisérletek nyomán teljesen meghonosult módszere óta igen egyszerűnek s könnyen megoldhatónak látszik is ezen áramoknak a laboratoriumokban való alkalmazása, mégis a nagyban való előállításának különféle, részben előrelátható, részben váratlanul meglepő akadályok gördülnek eléje, melyek csak részben tekinthetők legyőzötteknek, melyeknek legyőzésére azonban Tesla a különleges berendezések egész sorát gondolta ki. Csak nehány említtessék fel: Ha bő áramu váltakozó áramot termelő géppel dolgozik az ember, akkor a szikrák, melyeknek gyors megszünése igen fontos, nemcsak el nem mulnak, hanem a két gömb között vezető fényív képződik, mely a gömb anyagát is gyorsan megolvasztja. Tesla, mint előtte sokan, erős légárammal fújja el az ívet s hűti egyidőben a gömböket, vagy pedig, mint szintén már más kutatók is tették, a szikranyalábra merőlegesen hegyes végű sarkfegyverzettel ellátott erős elektromágnest állít fel, a fegyverzetet pedig a szikraátcsapás ellen csillámborítékkal védi. A mágnessark áramtaszító ereje a szikrákban ellentétes irányban haladó elektromos áramlásokat kettéválasztja s igy a sűrítők kisülése szabad tért nyer.

Különös gondosságot igényelt a nagy feszültséget létesítő transformator megszerkesztése is, mivel közönséges berendezés mellett a rendkivüli feszültség, melynek létesülnie kellett, mindent szétrombolt volna. Első sorban tehát a vezetők megfelelő elszigeteléséről kellett gondoskodni. Tesla elsőrendü vezetőül igen vastag elszigetelő-réteggel bevont vastag drótnak nehány rövid kanyarulatból álló egy vagy két tekercsét használta. Az erre alkalmazott másodrendü vezetők szintén két, de ellentétes irányban hajlított drótból állanak. Minden drót különállólag vastag falú gummiszekrényekben van elhelyezve s az elsőrendü vezető tekercseket fedő szekrények egymás mellett állanak. A drótok középen összeköttetésben vannak egymással; mivel ellentétes irányu kanyarulatokkal birnak, azért a transformator belsejében az indukáló hatások növekednek és az átütés veszélye úgy az elsőrendü vezető kanyarulatai közt, mint a másodrendü vezető felé csökken.

Ezen kívül még az egész transformator nagy faszekrényben áll, mely olajjal (parafin olajjal) van megtöltve. Az olaj igen jó elszigetelőnek bizonyult s emellett a szilárd szigetelők fölött még más nagy előnyei is vannak. Bebizonyult ugyanis, hogy a nagy feszültséget létesítő transformatornál az elszigetelő anyagban rejtőző igen csekély légbuborék is, rombolólag hat; ott, a hol a vezető drótok elszigetelő anyaga közt, vagy az egyes kanyarulatok közt levegő van, csaknem szabályszerüséggel bekövetkezik az átütés.

Nyugvó (statikai) elektromossággal tett kisérleteknél a levegő, legalább a száraz levegő, a legjobb szigetelők egyike. Nem így áll a dolog a szaporán váltakozó elektromos mozgásoknál; az elektromos oscillatiók sajátságos módon támadják meg a gázokat s az oscillatiók vezetőjévé teszik. Ha azonban minden közöcskét folyékony szigetelő tölt ki, teljesebben el lehet hárítani a levegőt, mintha a közök szilárd szigetelőkkel töltettek volna ki. Hogy a czél lehetőleg teljesen és biztosan el legyen érve, az egész transformatort, miután már össze van állítva, kifőzik saját olajában. Ez előnyökön kivül a folyékony szigetelők, névszerint az olajok, u. n. *elektromos szilárdsággal* birnak, azaz nagy ellenálló képességgel a szikra átütése ellenében, mely a rezgési számmal gyorsan nő. Például terpentin olaj 79-szer nagyobb biztosságot ad, mint a száraz levegő, mely a váltakozó áramkörben eszközölt palaczk kisütéseknél szerepel. Végül a folyékony szigetelőnek még az az előnye is van, hogy ha valamely helyen netalán szikra ütne át, a vezetéken így támadt sérülést azonnal megjavítja,

Tesla, hogy a legnagyobb feszültségek létrejöttekor a vezető sodronyok elszigetelőjének külső részén mindezen elővigyázat ellenére fellépő nagy energia veszteséget okozó lángocskák és fénypamatok képződését megakadályozhassa, a szigetelő réteget vékony aluminium lemezzel veszi körül, s ezzel a drótrendszer a szigetelővel együtt a környezettől teljesen elzárt elektromos teret határol. Végül az olajos szekrényt a földdel összeköttetésben levő czinkszekrénybe helyezi el.

Ez a transformator a hasonló czélra szolgáló eszközöktől még abban is különbözik, hogy nincsen benne vas, holott a közönséges transformatoroknak éppen ez az egyik lényeges alkotó részük. A vasnak mágnesessé válására idő kell, de az áramnak oly gyors váltakozása mellett, a milyenről itt szó van, a mágnesség nem állana be idején, hanem elkésve létesülne, a miből zavarok származnának. Épen ezért a Tesla-transformatorok elsőrendü vezető tekercsei nem vasmagra, vagy lágy vasdrót nyalábra, hanem kemény fából készített s olajban való kifőzés útján teljesen légmentessé tett hengerre vannak szerelve.

Ennyi a Tesla-féle kisérletek berendezéséről. A kisérletek közül említsük mindenekelőtt azokat, melyeket egészen úgy, vagy legalább is hasonló módon más kisérletezők is előállítottak s azután az ő eredetibb kisérleti eredményeit, melyekre támaszkodva az ő kitűzött czélja: a »jövő világossága« felé tart.

Mint már említve volt, a Tesla-féle berendezések lehetővé teszik, hogy az elektromágneses gépek az elektrostatikai gépek működését megközelítik. És azért előre látható volt, hogy ő nemsokára mindazon tüneményeket létesíteni fogja, melyeket jókora nagy, több koronggal biró nagy mennyiségü elektromosságot szolgáltató Töpler-féle megosztó géppel is elő lehet

állítani. Figyelmét különösebben a légüres csövekre fordította, melyek elektrodok s egyéb segítők nélkül felvillannak, ha a transformatorral össze sem kötve, ennek, vagy az ezzel összeköttetésben levő vezető sodronyoknak közelébe állíttatnak.

Ez a megfigyelés igen régi; már Hittorf látott felvillanni egyszerű légüres csöveket, ha ezek önmagukat kisütő leydeni palaczkok közelébe, tehát elektromos oscillatiók körébe állíttattak. E tüneménynyel mindannyiszor találkozunk, valahányszor a cső közelében az elektromos állapot szaporán váltakozik. Ugyanezt sokan igen különböző módokon megmutatták.*

Persze Tesla ezt a kisérletet nagyszerűen mutatja be. Egyik felolvasása alkalmával a kisérletező asztal fölé, melyen az ő légüres üveggolyói, csövei és gyürüi szanaszét feküsznek, több négyzetméternyi területü fémtáblát vizszintesen függeszt fel, transformatorának egyik sarkával összeköti, a másik sarkot pedig a földdel közlekedteti. Így tehát az oscillatiók játéka alkalmával ő maga is a váltakozó elektromos térben áll; a csövek, melyeket kezébe vesz, világítani kezdenek s büvös fényt terjesztenek. Más alkalommal két nagy, a transformatorral összekötött fémtáblát a szobának szemközt álló két falára függeszt. Az egész térben elektromos oscillatiók czikáznak, a légüres csövek, akárhova állítják őket, mindenütt világítanak. Fémernyővel ellátott csövek elektromos lámpákká lesznek, melyek a nélkül, hogy vezetők elektromos árammal táplálnák, világítanak, bárhol függesztik is fel a szobában.

Kérdezhetné valaki, hogy a szoba lakóit nem érintik-e kellemetlenül ezek a rajtuk keresztül-kasul járó elektromos rezgések? A tapasztalat azt mutatta, hogy a váltakozó áramok, legalább az ilyen nagy feszültségüek, azon arányban lesznek ártalmatlanabbakká, a mily arányban a váltakozás száma nő. A magyarázatot a Hertz-től kisérletileg bebizonyított ama tény szolgálgáltatja, hogy a szapora elektromos rezgések a vezető anyagba csak igen csekély mélységig hatolnak. Ha az efféle elektromos rezgéseket testünkbe vezetjük, úgy ezek éppen csak a test felületén terjednek el anélkül, hogy az epidermisbe egy századrészmilliméternyire behatolnának. Ezért foghatta meg Tesla transformatorának hatalmas szikrákat szóró sarkát anélkül, hogy baj érte volna s ezért volt képes egy csövet úgy világíttatni, hogy egyszerűen az egyik kezébe fogta, másik kezével pedig a nagy feszültséget létesítő transformátor egyik sarkát érinté. A nézőkre, kik előbb a sarkokon támadó hatalmas elektromos lángokat látták, ez a kisérlet természetesen igen nagy hatást tett, bár a Tesla-féle áram nagy szaporasága igen egyszerűen magyarázza. A változó áramok ezen tulajdonságából magyarázható az, hogy az Észak-Amerikában megkisérlett elektromos kivégzések

* L. Természettud. Közlöny XXI. köt. 358. l.

egyes esetekben nem sikerültek: nagy feszültségűvé átalakított váltakozó áramokkal kisérlették meg.

Egy másik kérdés, nem hat-e a térnek az elektromos rezgésektől gerjesztett mágnessége mindazon élő lények állapotára, melyek ebben a térben vannak? D'Arsonval a tengeri nyulakon változásokat észlelt az anyagcsere lefolyásában; embereknél, kiket nagy sodronytekercsbe állított, melyen szapora elektromos rezgések czikáztak át s így gyorsan váltakozó mágneses mező képződött bennök, állítólag lélekzési nehézség jelentkezett. Az elektromos világításnak előbb említett módja, a mely bizonyos értelemben az elektromos világítás ideálja volna, ha nem is tekintjük az oscillatióknak még közelebbről megvizsgálni való élettani hatását, minden esetre igen költséges volna. Bizonyos, hogy sok energia megy itt kárba, mert daczára a nagy segédeszköznek, a fény homályos, bár a phosphorescentia segítségével fokozható és igen szépekké és hatásosakká tehetők a fényjelenségek; rubin, kéncalcium vegyületek, uránüveg stb. gyönyörüen világítanak légüres czövekben.

Még sajátságosabbak és érdekesebbek, mivel oly segédeszközökkel, milyeneket Tesla állított elő, még nem kisérleteztek, ama tünemények, melyek meg nem ritkított, szabad levegőben állanak elő, ha a nagy feszültségü áramot létesítő transformator végeit csupaszon, vagy csak kurta sodronyokkal felszerelve a levegőben végeztetjük. A mint a generator működésbe lép, a végeken hatalmas fénynyalábok, valóságos lángok keletkeznek, melyek sajátságos zörgés- és süvöltéstől kisérve, fölséges látványt nyujtanak sötétben. Tesla az ilyen «elektromos láng»-nak ötféle változatát különbözteti meg, melyek a potential növekedésének megfelelő, más szóval az áramváltozások szaporaságának emelkedésétől függő rendben követik egymást. A lángok oly tulajdonságuak, mint a nagy elektromozó gépeknél észlelhető pamatszerü kisülések, csakhogy a mozgásba hozott elektromosság jóval nagyobb mennyisége miatt sokkal intensivebbek, s legtöbbször egész kiterjedésökben fehér fényüek.

Még gyönyörüebben mutatkoznak ezek a fénytünemények, ha a sarkok közé, melyekre esetleg golyók is vannak erősítve, nem világító testek, például vastag kaucsuklemezek helyeztetnek el; ekkor a fényoszlopok átcsapnak ezekre s ennek következtében a lapok annyira felmelegednek, hogy egymásután megolvadnak. Megesik gyakran az is, hogy a szigetelő réteg, fóként ha üveg vagy csillám, teljesen szétzuzódik. Tesla igen szép tüneményeket létesített azáltal is, hogy a vastag kaucsuklemez egyik oldalát staniol fegyverzettel látta el, mely aztán transformatorának egyik sarkával volt összekötve, a kaucsuklemez másik oldalára pedig vagy sodronyhálóval bevont gyürüt, vagy pedig valamely nevet kifejező alakká hajlított elszigetelt sodronyt erősített s ezt összeköté a másik sarkkal. Ekkor aztán

úgy tetszik, mintha a szigetelő lemez a fémvezetőktől fénypamatokat huzna ki s ezek egészen elborítják apró lángokkal a lapot; így világítá ki például londoni egyik felolvasása alkalmával Sir WILLIAM THOMSON nevét ragyogó fényirásban; oly hódolat volt ez, mely nem maradhatott hatás nélkül. Ha a sarkokra sodronygyűrűk, vagy egy sodronygyűrű és egy fénygömb, vagy párhuzamos fémrudak állíttatnak, akkor a lángok átcsapnak ezek közt s az első esetben «fénylő nap», a másodikban világító gömb s az utolsóban ragyogó fénykéve támad.

A transformator sarkához egy darab hajlékony drótot erősítvén, a drót a készülék működésének megindításakor ragyogó fénypamatba burkolózik, nyomban forgásnak is indúl, úgy, hogy ezáltal az egész tünemény a transformator sarkán álló világító gömbként tünik fel. Ugy ezen tünemény, mint általában valamennyi itt leirt jelenség, rendkívül feltünően mutatkozik, ha a másik sark nem végződik egyszerüen, hanem nagyságához mért, gondosan csiszolt elszigetelt fémlemezzel van összekötve. Megjegyzendő még, hogy ha az egyik sarkra oly pálczát helyez az ember, melynek egyik vége csúcs, a másik vége gömb, ezen szapora rezgésü és nagy feszültségü elektromos rezgése alkalmával a csúcson és a gömbön egyaránt létrejött a kiáramlás; ismeretes dolog, hogy ha a csúcs és a gömb az egyszerü elektromos gép sarkával közlekedik, az összes elektromosság csaknem kizárólag a csúcson áramlik ki.

Ezen tünemények gyakorlati jelentőség tekintetében még igen távol állanak attól, hogy tényleg felhasználhatók legyenek és így egyelőre csak «szép» látványosságot nyújtanak. TESLA ugyan azt véli, hogy a váltakozások számának fokozása által végtére kizárólag elektromos úton valóságos láng létesíthető, világítani és melegíteni is lehet vele, de hozzáteszi ő maga is, hogy ma még ettől igen távol vagyunk.

TESLÁ-nak legfontosabb s egyszersmind gyakorlati felhasználhatósághoz legközelebb álló vívmányai az ő világító anyagot tartalmazó izzó lámpái, melyek a nagy feszültséget létesítő transformatorhoz csak egy dróttal vannak kapcsolva és a már használatban levő izzó lámpákétól jelentékenyen eltérő módon válnak világítókká.

Az úgynevezett TESLA-lámpa először is, mint minden izzó lámpa, gömb, vagy körte alakú légüres üvegből áll. Ebbe azonban csak egy platina drót van beolvasztva, mely egyenes vonalban a gömbnek körülbelül közepéig nyúlik s egész terjedelmében üvegbe van beolvasztva. A drót végére többnyire egy kis vastag szénpeczek van erősítve, melyen aztán széngömböcske áll. A szén vezeti az elektromosságot. TESLA azonban szerkesztett és sikerrel hozott működésbe oly lámpákat is, melyekben a vezető fémdrótra nem vezető testek voltak erősítve; ha rubin golyócska tétetett rá, akkor felséges fénytünemények keletkeztek. Alkalmilag használt ezen czélra

Carborundum-ot is, a silicium és szén egy új vegyületét, mely a csiszoló munkáknál a gyémántport helyettesítheti. Az elektromos rezgéseket platina drót vezeti be a lámpába; közönséges értelemben vett áram tehát itt nem jöhet létre, hiszen a vezető szén vagy a rubin golyócskában végződik. A Tesla-lámpát *nem zárt áram* teszi világítóvá; itt tehát azokat az áramokat, melyek az elektromosság régebbi elméleteiben oly sok nehézséget okoztak s melyeknek hatalmunkba kerítését Hertz-től tanultuk meg, technikailag tényleg felhasználva látjuk. Felhasználásuk azzal a nagy előnnyel jár, hogy csak egy vezető drót szükséges.

Ha a lámpákat a csak imént leírt alakban akarná valaki használni, akkor azt tapasztalná, hogy a platina-drótot körülvevő üvegréteg gyorsan fölmelegszik és szétpattan. A lámpa ezen része tehát még külön megvédést követel. Tesla először csillámréteggel veszi körül, melyet aztán ismét fémvédővel, aluminium lemezből készített boritékkal oltalmaz. A csillám és aluminiumréteg leért egészen az izzó anyagig. Tesla a tulajdonképeni légüres lámpagolyót gyakran még egy második, szintén légüres üvegburokkal is körülveszi, mert különben a lámpa nagyon fölmelegszik. Némely lámpák, melyek a rezgések vezetését eszközlő fémhorog segítségével a szoba felső padozatához vannak erősítve, fémből készített ernyővel szereltetnek fel; ennek az ernyőnek azonban itt a fénynek lefelé vetítésén kívül még az is a rendeltetése, hogy közvetlenül a lámpa közelében nagy mennyiségű elektromosságot gyűjtsön össze, tehát egyidejűleg *sűrítőül* is működik.

Tesla olyan lámpákat is szerkesztett, melyeknek egyáltalában nem kell fémi összeköttetésben lenniök az áram elvezető vezetékkel. A transformátorral közlekedő drót vége csavarszerűen van összehajlítva. A lámpa belsejében, az alsó részen hasonló alakú drót van, mely két széngömböcskében végződik. Ha a lámpa az elsőbb említett tekercsbe tétetik, akkor itt bizonyos tekintetben megint transformatorral van dolgunk. A váltakozó áram megindításakor elektromos rezgések létesülnek a belső drótban is és mivel a rezgések száma nagy, ezek hatása alatt a széngömböcske fehér izzóvá válik. Sőt Tesla alkalmilag még a dróttekercset is és egyáltalán minden vezetőt mellőzött egyik lámpájánál s így a gondolható legegyszerűbb alakot találta meg. Alul bezárt, felfelé vékonyodó üvegcső tetején üveggömb van; az egész szerkezet légüres. A gömböt egy másik üveggömb burkolja körül, concentricusan; a két gömb közötti tér szintén légüres. Az így szerkesztett lámpának üvegcsövét a vezetéknek csavarszerűen összehajlított végébe kell helyezni. Előbb már említve volt, hogy a ritkított gáz elektromos rezgések hatása alatt fém közvetítése nélkül is világítóvá válik; ezáltal vezetővé lesz s az energiát a belső gömbhöz vezeti, mely most világító testként tünik fel s minden irányban sugárzik.

A lámpák belsejében a vezetők végén levő világító testek gyakran mér-

sékelt számu váltakozás mellett is fehér izzókká válnak; az így elért erős fényhatások mellé azonban a szapora elektromos rezgések sajátságának látszó zavaró körülmény is szegődik, az t. i., hogy a molecularis szerkezet lassankint meglazul s a világító testek szétporlanak. Következőleg az ilyen lámpák kevés ideig tartanak.

Tesla lámpáin alkalmilag észrevette, hogy *kisülések érzékeny a mágneses hatásokkal szemben.* A legjobb lámpákban — azokban, a melyekben vezető anyag nincsen — fénynyaláb képződik, mely irányát azonnal megváltoztatja, mihelyt a lámpához mágnest közelítünk; ha a mágnes kellő helyzetben megerősítetik, akkor a fénynyaláb állandó körforgásba hozható; ha a mágnest megfordítjuk úgy, hogy a ható sarkot kicseréljük, akkor a nyaláb forgása ellenkező irányúvá lesz. Teslá-nak voltak olyan érzékeny lámpái is, melyeknek fénynyalábjai a földmágnesség csekély hatása alatt is forgásba jöttek s így az a páratlan szépségü látvány létesült, hogy az egy lámpából kiinduló s különböző erősségü sugarak, éppen mintha világító toronyból indultak volna ki, egy síkban körülforogtak s a megvilágítás egész terét fénynyel árasztották el. Elektromos gépek és induktorok létesítette fénykévéknek a mágnesek körül való ilynemü forgását előbb is észlelték már; ez esetben azonban az a feltünő, hogy itt váltakozó áram működik, mely a világító testeket egyik pillanatban éppen olyan mértékben tölti meg positiv elektromossággal, mint a rákövetkező pillanatban negativval. Az, hogy a mágnes az egymásra következő ellentétes irányu kisülésekre mégis egy és ugyanazon értelemben irányítólag hat, azt mutatja, hogy a kétféle kisülés nem lehet teljesen æquivalens.

Nem érdektelenek amaz elméleti nézetek sem, melyeket Tesla kisérleteire támaszkodva kifejtett.

Theoriájának alapját Crookes-nek *molecuták bombaszerü mozgásáról* táplált véleménye képezi. Ez a vélemény igen kényelmes, de nem kielégítő. Bizonyára nem tagadható, hogy nevezetesen az elektromos oscilláló kisülések hatása alatt — és úgy látszik, hogy más kisülés, mint oscilláló kisülés nincs is — az anyag jelentékeny mértékben porlik s aztán az elvált részecskék egyenes vonalban egészen az edény faláig röpíttetnek, úgy, hogy ez esetben az anyagrészecskék valósággal bombákhoz hasonlóan mozognak. Ama sugárzári tünemények azonban, melyek a légüres térben a kathodok közelében mutatkoznak, nem magyarázhatók meg az elektródul használt szilárd anyag, vagy a gáz részecskéinek tovaröpüléséből. Pedig éppen ezen tünemények azok, melyeket Crookes az ő *sugárzó anyaga* alat ért. Hogy ezek a fényjelenségeket, melyeket Hittorf jóval Crookes előtt tanulmányozott már s melyek éppen ezért helyesebben Hittorf-féle sugártünemenyeknek nevezendők, tisztán æthermozgások és nem sugárszerüen mozgatott anyagmoleculák hozzák létre, azt kimutatták előbbi időben

Wiedemann E. és Goldstein, újabb időben Wiedemann, Ebert és Hertz kisérletei, egészen kézzelfogható módon pedig Lénárd kisérletei. Mindezen kisérletek alkalmával a Hittorf-féle sugarak akadály nélkül keresztül hatoltak fémlemezeken, melyek a könnyen mozgatható hydrogén moleculákat sem bocsátották át, a mennyiben a rájuk nagy nyomást kifejtő hydrogénnel szemben gáztól mentesen tartották a tért.

Tesla az ő Crookes-féle nézetét még sajátságos módon ki is szinezi. Felfogásának jellemzésére hadd szóljon ő maga: «Bátran elfogadhatjuk, hogy a moleculák odaütődésének nagy része van a felmelegedés előidézésében még akkor is, ha ez ritkított levegőjü térben történik is. Ha ez utóbbi esetben a moleculák száma aránylag jelentéktelen, kevés az ütközések száma is, de a moleculák sokkal nagyobb sebességre tehetnek szert, úgy, hogy az ezen okból származó hőhatás jelentékenynyé lehet. Mi szakítja le a moleculákat? Erre nézve Tesla így nyilatkozik: «A világító test olyam áramtermelővel köttetik össze, melynek árama nagy és gyorsan változó potentiállal bir s ezáltal a gáz-moleculák arra indíttatnak, hogy másodperczenként igen sokszor rendkívüli sebességgel a testhez ütközzenek és ezt ezáltal izzóvá tegyék.» Hogy tulajdonképpen mi «indítja» itt a moleculákat, az nincs megmondva. A transformátor egyik sarkával összekötött drót-pörgettyüre vonatkozólag ezt mondja: «Ha a transformátor dróttekercsét nagy számu váltakozással biró áramok járják át, akkor ez a légmoleculákat ütemszerüleg magához vonja és eltaszítja. Minthogy az erő, mely eltaszítja őket, nagyobb mint az, mely vonzotta őket, azért az eredmény a szárnykerék felületére ható taszítás lesz.»

Az æthernek és az anyagnak kölcsönhatásáról, melynek itt bizonyára szerepe van, ezt a képet alkotja magának Tesla: «Mindazon képek közül, melyeket az ember a természetről alkot, tudományos alapon az a legbiztosabb, mely egy anyagot, egy erőt és teljes egyformaságot tételez föl mindenütt. Legvalószinübbnek látszik előttem egy olyan mérhetetlen világegyetem, melyben a moleculák s ezek atomjai pályákon mozognak, mint az égitestek s magukkal viszik az æthert s azt valószinüleg mozgásra indítják. A moleculák s ætherburkolatuk mozgása ætherfeszültségeket vagy elektrostatikai áramlásokat létesít, az ætherfeszültségek kiegyenlítődése pedig æthermozgásokat vagyis elektromos áramokat, ellenben a pályákon való mozgás mágneses hatásokat létesít.»

Az itt röviden ismertetett kisérletek a legfényesebbek közé tartoznak, a melyeket az elektromosság segítségével egyáltalában tenni lehet. Ezek kigondolása nagy érdeme Teslá-nak, s ennek elismerése nem szenved csorbát, ha elméleti nézeteit a tudomány óvatossággal fogadja.

Dr. *H. Ebert* u. közli: *Ratkovszky Pál.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

16. *Valamely p torzió-együtthatóju szál alsó végére T tehetetlenségi nyomatéku tömeg van függesztve. Mekkora szöggel fordul el ez a tömeg a szál mint függélyes tengely körül, ha a szál felső végét t idő tartamában a szöggel egyenletesen megsodorjuk? A szál tömege a felfüggesztett testéhez képest elenyésző.* (Czógler.)

*

Megoldás Szontagh Gusztáv főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Ha szilárd test fix tengely körül forog, minden pontja t időben ϑ szöget ír le s

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

szögsebességnek neveztetik,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

az ú. n. szögsurlódás.

D'Alembert elvéből következik:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{F}{T}$$

ha F a forgási nyomatékot, T pedig a test tehetetlenségi nyomatékát jelöli. A forgási nyomaték itt a szál sodrása folytán jön létre s arányos a sodrási szöggel, a mely tetszőleges t idő utan $(a-\vartheta)$-val egyenlő.

$$F = p\,(a-\vartheta)$$

lévén

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{p}{T}\,(a-\vartheta).$$

Ezen differentiál egyenletet integrálva nyerjük ϑ-t kifejezve t-nek függvényében. Az integrálás útja ez:

$$2\frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 2\frac{p}{T}(a-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{p}{T}(a-\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \int 2\frac{p}{T}(a-\vartheta)\,d\vartheta + C$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2pa}{T}\vartheta - \frac{p}{T}\vartheta^2 + C}$$

$t=0$ időben $\vartheta=0$ s a szögsebesség is $\frac{d\vartheta}{dt}=s$ lévén, $C=0$, s ennélfogva

$$dt = \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2pa}{T}\vartheta - \frac{p}{T}\vartheta^2}}$$

Ezen egyenlet integrálásából *:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\frac{p}{T}}}\operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{\vartheta}{a}\right) + C$$

$$t\sqrt{\frac{p}{T}} = \operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{\vartheta}{a}\right) + C$$

A C állandó meghatározására azon körülmény szolgál, hogy $t=0$ időben $\vartheta=0$ s így

$$C = -\operatorname{arc\,cos} 1$$

azaz $C=0$, s így

$$t\sqrt{\frac{p}{T}} = \operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{\vartheta}{a}\right)$$

miből végre:

$$\vartheta = a\left(1-\cos t\sqrt{\frac{p}{T}}\right)$$

A mozgás tehát periodikus, $t=0$-tól $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}$-ig $\vartheta<a$; ha $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}$, akkor $\vartheta=a$; ezen túl $\vartheta>a$, míg $t=\pi\sqrt{\frac{T}{p}}$ idő mulva $\vartheta=2a$ maximális értékét érte el. Ezen időponttól fogva ϑ fogy, míg $t=\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}$ időben megint $\vartheta=a$ etc.

---

* Fröhlich: Math. repertorium 130. lap 31. képlet.

A feladatnak ez a kitétele: «. . . ha a szál felső végét t idő tartalmában a szöggel *egyenletesen* megsodorjuk» azt mondja, hogy $2t$ idő tartamában $2a$ szöggel, $3t$ idő tartamában $3a$ szöggel, és í. t. sodorjuk meg.

E szerint a

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{p}{T}(a - \vartheta)$$

egyenlet integrálása közben a *nem tekinthető állandónak*, hanem a egyelőre például $= at$, hol a az időegységenkénti sodrás.

Uj változó bevezetésével a fentebbi egyenlet a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$$

alakra hozható, melynek integrálja ismeretes, s melynek állandói szintén azon feltételből határozhatók meg, hogy $t = 0$ időben úgy ϑ mint $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$.

Az eredmény a levezetetthez hasonló, periodikus mozgást előtüntető képlet lesz: melynek taglalása szintén nem érdektelen. CZÓGLER.

A feladatnak ugyanily megoldását beküldte Fuchs Károly főgymn. tanár úr Pancsován.

---

17. *Egy 20 m. hosszaságú tekepálya 2 m. magasságú hengerdobban végződik; a 10 m.-nyi sebességgel elindított golyó 0·10 surlódási együtthatókkal mozog. Mekkora sebességgel érkezik a golyó a dob tetejére?*

(FRÖHLICH.)

*

Első megoldás Szontagh Gusztáv főreálisk. tanár úrtól Brassón.

Az $s=20$ m. hosszaságú síkpályán $c=10$ m. sebességgel elindított golyó az állandó surlódási erő behatása alatt egyenletesen lassudó mozgással halad. A mozgást lassító erő gyorsulása γ ez esetben negativ, értéke pedig:

$$\gamma = \beta g = 0{\cdot}10\ g = 0{\cdot}981\ \text{m/mp}^2$$

ha β a surlódás együtthatóját jelenti.

Legyen a sebesség a síkpálya végén v_1 s legyen t az idő, mely alatt a golyó ezen a pályán végig halad.

A lassudó mozgás képleteiből

$$v_1 = c - \gamma t$$
$$s = ct - \tfrac{1}{2}\gamma t^2$$

az idő kiküszöbölése után

$$v_1 = \sqrt{c^2 - 2\gamma s}$$

Az értékeket behelyettesítvén,

$$v_1 = 7{\cdot}79 \text{ m.}$$

Ezzel a sebességgel indul a golyó a dobban felfelé, még pedig egyenlőtlenül lassudó mozgással. miután most az akadályozó erők többé nem állandók. A golyó a dobban körpályán mozog. Mozgását két erő lassítja; az egyik az mg nehézségi erő tangentiális componense, a másik a surlódás, a mely szintén az érintő irányában hat s a normális nyomás β-szorosával egyenlő, ha β a már említett surlódási tényező.

Ha a golyót körpályájának egy tetszőleges A pontjában vesszük figyelembe, a mely ponthoz tartozó érintő ϑ szöggel hajlik a vízszinteshez, úgy ott az akadályozó t. i. lassító erők

$$P_t = mg \sin \vartheta$$
$$R = \beta N$$

hol P_t a nehézségi eró tangentiális compenensét, R a súrlódási erőt, N pedig a normális nyomást jelenti. Ez utóbbinak értéke nyilván

$$mg \cos \vartheta + \frac{mv^2}{r},$$

ha r a dob sugara s v a szemügyre vett pontban a mozgás sebessége. A surlódási erő e szerint

$$R = \beta \left(mg \cos \vartheta + \frac{mv^2}{r} \right).$$

$$P_t + R = mg \sin \vartheta + \beta mg \cos \vartheta + \beta \frac{mv^2}{r}$$

Az ismeretes

$$v dv = p ds$$

képletből kiindulván *, mindenek előtt a p gyorsulást kell kifejezni, a mely ezen esetben negativ. Értéke

---

* Ugyanis az eleven erő tétele itt, ha mp a pályamenti összes erő (a ds-re merőleges componens itt nem végezhet munkát):

$$d\left(\tfrac{1}{2} mv^2\right) = (mp)\, ds = -(P_t + R)\, ds.$$

F.

$$p - = \frac{P_t + R}{m}$$

$$-p = g \sin \vartheta + \beta g \cos \vartheta + \beta \frac{v^2}{r}.$$

Ennek következtében:

$$v dv = -\left(g \sin \vartheta + \beta g \cos \vartheta + \beta \frac{v^2}{r}\right) ds$$

De $ds = r d\vartheta$ lévén

$$v dv = -gr \sin \vartheta d\vartheta - \beta gr \cos \vartheta d\vartheta - \beta v^2 d\vartheta.$$

Ez tehát a mozgás differentiálegyenlete, melyet integrálni kell, hogy bármely ϑ-nak megfelelő v-jét megnyerhessük.

Hogy az egyenlet integrálható legyen, előbb ily alakban írjuk:

$$v dv + \beta v^2 d\vartheta = -gr \sin \vartheta d\vartheta - \beta gr \cos \vartheta d\vartheta$$

s azután az egyenlet mindegyik tagját $2\beta e^{2\beta\vartheta}$-val megszorozzuk *

$$2\beta e^{2\beta\vartheta} v dv + 2\beta^2 v^2 e^{2\beta\vartheta} d\vartheta = -2\beta gr e^{2\beta\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta - 2\beta^2 gr e^{2\beta\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta.$$

A baloldal most teljes differentiál, u. i.

$$d(\beta v^2 e^{2\beta\vartheta}) = -2\beta gr e^{2\beta\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta - 2\beta^2 gr e^{2\beta\vartheta} \cos \vartheta d\vartheta.$$

Integrálván s β-val rövidítvén,

$$1)\quad v^2 e^{2\beta\vartheta} = -2gr \frac{2\beta \sin \vartheta - \cos \vartheta}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta} - 2\beta gr \frac{2\beta \cos \vartheta + \sin \vartheta}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta} + C.$$

A constans meghatározására azon körülmény szolgál, hogy $\vartheta = 0$ értékére $v = v_1$, hol v_1 a már kiszámított kezdeti sebesség. Ha $\vartheta = 0$, az 1)-ből:

$$2)\quad v_1^2 = \frac{2gr - 4\beta^2 gr}{1+4\beta^2} + C.$$

Az 1) egyenletből a 2) egyenletet kivonván, C kimarad.

---

* Ha rövidség kedvéért

$$-2gr\left\{\sin \vartheta + \beta \cos \vartheta\right\} = F(\vartheta),$$

a differentiálegyenlet:

$$\frac{d(v^2)}{d\vartheta} + 2\beta(v^2) = F(\vartheta),$$

mely (v^2)-re nézve első rendű s első fokú. Ennek a közönséges úton való megfejtése szintén szolgáltatja a szöveg eredményét. *F.*

$$v^2 e^{2\beta\vartheta} - v_1^2 = \frac{4\beta^2 gr - 2gr}{1+4\beta^2} - \sin\vartheta \frac{4\beta gr + 2\beta gr}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta} -$$

$$- \cos\vartheta \frac{4\beta^2 gr - 2gr}{1+4\beta^2} e^{2\beta\vartheta},$$

miből végre

$$v^2 = \left[v_1^2 + \frac{2gr(2\beta^2-1)}{1+4\beta^2}\right] e^{-2\beta\vartheta} - \frac{6\beta gr}{1+4\beta^2} \sin\vartheta -$$

$$- \frac{2gr(2\beta^2-1)}{1+4\beta^2} \cos\vartheta.*$$

A dob tetején $\vartheta=\pi$ lévén:

$$v^2 = \left[v_1^2 - \frac{2gr(1-2\beta^2)}{1+4\beta^2}\right] e^{-2\beta\pi} - \frac{2gr(1-2\beta^2)}{1+4\beta^2}.$$

Az értékeket helyettesítvén:

$$v = 2{\cdot}03\ m/mp.$$

*

Második megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

1) A mozgást a hengerdob tengelyére merőleges síkban képzelvén: először is meghatározzuk a sebességet, melylyel a golyó a henger alkotójához ér.

A surlódás, mint a mozgással ellenkező irányú erő fogható fel s ez esetben mérsékelt sebességű mozgásról lévén szó, a nyomással, a mi itt a golyó súlya, egyenesen arányosnak vehető.

E szerint a síkpályában nyilvánuló lassító erő

$$m\frac{d^2s}{dt} = -\gamma mg$$

hol γ a surlódás coefficiense, m a golyó tömege és g a nehézség okozta gyorsulás.

Az egyenletet

---

* vagy még:

$$v^2 = v_1^2 e^{-2\beta\vartheta} + \frac{2gr}{1+4\beta^2}\left\{(1-2\beta^2)(\cos\vartheta - e^{-2\beta\vartheta}) - 3\beta\sin\vartheta\right\}.$$

Ha súrlódás nincs: $\beta=0$ és marad a közönséges kifejezés $v^2=v_1^2-2gr(1-\cos\vartheta)$, hol $r(1-\cos\vartheta)$ a golyó magassága a pálya vízszintes része fölött. *F.*

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2\gamma g ds,$$

alakba hozván, integrálás útján lesz

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - 2\gamma g s$$

hol c^2 az integrálás állandója az $s=0$-nak megfelelő: a kezdő sebesség négyzete, mely adva van.

E szerint a síkpálya bármely pontjában a sebesség:

$$\frac{ds}{dt} = V = \sqrt{c^2 - 2\gamma g s}.$$

A pálya végén ($s=h$) pedig

$$V_h = \sqrt{c^2 - 2\gamma g h}.$$

2) A golyó további mozgása feltétel szerint egy vertikális kör belső kerületén történik s így a mozgást akadályozó (lassító) erő:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\varphi - \gamma\left\{mg\cos\varphi + \frac{m}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\},$$

azaz: a golyó súlyának tangentiális componense és normális componensének meg a centrifugalis erőnek föltételezett arányos része.

Ha minden tagot m-mel osztunk és a pálya ívéből képezett differentialhányadosokat φ középponti szöggel fejezzük ki, φ-t a verticális és a mindenkori vezérsugár zárván be úgy, hogy az idővel nő, lesz $s=r\varphi$, miből

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d^2s}{dt^2} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Ezekből pedig

$$d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{r}\sin\varphi d\varphi - \frac{2g\gamma}{r}\cos\varphi d\varphi - 2\gamma\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 d\varphi.$$

Tétessék $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = y$, akkor

$$dy + \left[2\gamma y + \frac{2g\gamma}{r}\cos\varphi + \frac{2g}{r}\sin\varphi\right]d\varphi = 0,$$

mely egyenlet integrálja:

$$y = e^{-2\gamma\varphi}\left[C - \frac{2g}{r}\int e^{2\gamma\varphi}(\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)\,d\varphi\right]^*$$

---

* Vész: F. M. I. k. 170. l. 3.

és:

$$\int e^{2\gamma\varphi}\sin\varphi d\varphi = \frac{e^{2\gamma\varphi}}{4\gamma^2+1}(2\gamma\sin\varphi-\cos\varphi);\quad \text{sí.t.}^*$$

tehát:

$$y = Ce^{-2\gamma\varphi} - \frac{2g}{r(4\gamma^2+1)}[(2\gamma\sin\varphi-\cos\varphi)+\gamma(2\gamma\cos\varphi+\sin\varphi)],$$

hol C az integrátio állandója.

y helyett értékét visszahelyezvén és r^2-tel szorozván:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = r^2Ce^{-2\gamma\varphi} - \frac{2gr}{4\gamma^2+1}[(2\gamma\sin\varphi-\cos\varphi)+\gamma(2\gamma\cos\varphi+\sin\varphi)].$$

Ha $\varphi=0$

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2-2\gamma gh = r^2C+\frac{2gr}{4\gamma^2+1}(1-2\gamma^2)$$

és:

$$r^2C = \frac{(c^2-2\gamma gh)(4\gamma^2+1)-2gr(1-2\gamma^2)}{4\gamma^2+1},$$

azaz:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 =$$

$$\frac{[(c^2-2\gamma gh)(4\gamma^2+1)-2gr(1-2\gamma^2)]e^{-2\gamma\varphi}-2gr[3\gamma\sin\varphi-(1-2\gamma^2)\cos\varphi]}{4\gamma^2+1}$$

vagy röviden:

$$V' = [(Ae^{-2\gamma\varphi}-B_1\sin\varphi+B_2\cos\varphi)]^{\frac{1}{2}},$$

a sebesség a körpálya bármely pontjában, hol az új állandók értékét egyszerű összehasonlítás mutatja.

$\varphi=\pi$ esetében:

$$V' = \sqrt{(Ae^{-2\gamma\pi}-B_2)}$$

a sebesség a vertikalis átmérő felső végén.

A numerikus értékek helyettesítése után:

$$A=42{\cdot}27,\ B_2=18{\cdot}49,\ e^{-2\gamma\pi}=0{\cdot}5336,$$

$$V' = 2{\cdot}03\frac{m}{mp}.$$

---

* Fröhlich: M. R. 150. l. 5 és 6.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Márczius 1. GRUBER NÁNDOR: A Gramme-féle gyűrű elmélete.

Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről.

Márczius 15. Dr. HOÓR MÓR: A villámhárító elméletéről.

Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről.

*

Az észak-amerikai observatóriumokról.*

A mult évben, a nyár folyamán tett amerikai tanulmányutam egyik főczélja volt az ottani fontosabb csillagászati intézetek megtekintése. Az ez alkalommal tett főbb tapasztalataimról leszek bátor e helyen beszámolni.

Az első utamba eső jelentékenyebb observatórium a washingtoni U S. Naval Observatory volt. Ezen intézet még pár évvel ezelőtt a Potomac folyó partján állott, de nem régiben Washington észak-nyugati külvárosába, Georgetownba helyezték át, egy domb tetejére, hol a Potomac gőzei kevésbbé zavarják az észlelést, mint az intézet előbbi helyén. A mintaszerűen berendezett és igen szépen felszerelt observatorium monumentális fehér márvány palotában van elhelyezve. Főműszere a 26″-es refractor. Mechanikai felszerelése igen kényelmes; a beállítás megkönnyítésére egy Prof. HARKNESS-től származó berendezést alkalmaztak a tengelyekre, mely lényegében véve két durván fokokra osztott számlapból áll, egy-egy mutatóval; egyik a declinatiót, másik a rectascensiót mutatja, úgy hogy a műszer alulról a legnagyobb könnyűséggel beállítható közelítőleg az ég kivánt pontjára a nélkül, hogy a pontosabb osztású körökhöz tartozó mikroskópokat használni kellene. Ez a műszer már sok szolgálatot tett a tudománynak: vele végezte A. HALL igen pontos kettős csillag-méréseit és fedezte fel

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat f. é. február 1-én tartott rendes ülésén.

1877-ben Mars két kísérőjét is. Az intézet egyéb műszerei egy 10″-es refractor, 2 meridiánműszer és kisebb eszközök.

Minthogy az observatórium főképen a tengerészet czéljainak szolgál, egyik fontos feladata a chronometerek vizsgálata, különféle hőmérsékleteknél; ezért mindig körülbelül 50 drb chronometert tartanak készletben a tengerészek számára. Végül említést érdemel még az intézet igen szépen berendezett könyvtára is, melyben mintegy 15,000 kötet van és pedig főleg csillagászati, physikai és mathematikai munkákból.

A Naval Observatory közvetlen szomszédságában áll a jezsuiták kis csillagvizsgálója, mely főkép egy igen eredeti vizsgálati módszer miatt érdemel említést. Itt ugyanis sokat foglalkoznak az égitestek photographiai úton való helymeghatározásával egy különös, photochronographnak nevezett műszer segítségével. Ez nem egyéb, mint egy kisebb fajta — $4\frac{1}{2}$″-es — photographáló távcső, melyben az objectiv és a lemez között egy elektromágnessel mozgatott diaphragma van elhelyezve. Az elektromágneses készüléket egy chronometerrel másodperczenként megszakított áram hozza mozgásba s ennek következménye, hogy a mozdulatlan távcső mezején, tehát a phot. lemezen áthaladó csillag másodperczenként elfödetvén, a lemezen szakgatott vonalat húz. Ha ugyanazon lemezen egy másik csillag képét is végig járatják, ennek nyoma az előbbihez párhuzamos, s most ismerve mindkét esetben az első árammegszakításnak megfelelő időt, a photographia kimérése révén a két csillag AR-különbsége igen pontosan meghatározható. A két nyom távolságából a D-különbség adódik ki. A módszer s berendezése Fargis tanártól ered. A műszerrel tett vizsgálatok még nincsenek befejezve, s azért bajos a módszer megbízhatóságáról itéletet alkotni.

Ugyancsak Washingtonban van Langley magánobsorvatóriuma is, a Smithsonian Institution parkjában; ezen intézet csakis bolometeres megfigyelésekre szolgál. Mivel az Allegheny-Cityben levő observatórium is lényegében véve ezen vizsgálatokat tűzte ki fő feladatául, a kettőt összefoglalhatjuk. A Langley-féle bolometer* hősugárzás mérésére szolgál; a fémek ama tulajdonságán alapszik, hogy elektromos ellenállásuk a hőmérséklettel igen erősen változik. Szerkezete lényegében véve a következő: egy jó izolátorból, rendesen ebonitból készült gyűrűre igen finom platina- vagy vasdrótok egész hálózata van kifeszítve: ezekre hat az illető hőforrás sugárzása. Ezen vezetők egy Wheatstone-híd egyik ágát alkotják, s így ellenállásuk legcsekélyebb változását egy a hídba kapcsolt igen érzékeny galvanometer pontosan megmutatja. Természetesen az itt használt ösz-

* A módszert s a vele elért eredményeket legközelebb bővebben ismertetjük. *Szerk.*

szes ellenállásokat igen gondosan meg kell védeni minden más hőhatás ellen, mert ez utóbbiak különben a galvanometer állására szintén erősen hatnának. Ezt a rendkívül érzékeny műszert LANGLEY első sorban a a nap sugárzásának mérésére használta, főleg a légkör absorptiójának tanulmányozása czéljából. Ezért az Allegheny-ben végzett méréseket a Mount Whitney dél-californiai 4000 m. magas hegycsúcson tett méréseivel hasonlította össze. Igen érdekes, hogy ilyen méréseknél a bolometer gyakran a nap sugárzásában nagy ingadozásokat mutat, mikor pedig a légkör állapotában semmiféle szemmel látható változás észre vehető nem volt. Az ilyen változásokat szemmel nem látható, de azért jelentékeny absorptióval biró felhők okozhatják. A bolometer a spektrum hőeloszlásának tanulmányozására is igen alkalmas. Az ezen czélra szolgáló, jelenleg W.-ban felállított u. n. spektrál-bolometer törőközege egy tekintélyes nagyságú kősóprizma, s az ezáltal létrejött spektrum a mozgathatólag elhelyezett, egyetlen fémdrótból álló bolometerre esik. Hogy a sugárzás lefolyását áttekinthető alakban előállíthassák, a galvanometer mozgását photographiai úton regisztrálják, u. i. a tükörgalvanometer tükréről visszavert fénysugár egy függélyes vezetésben mozgó photographiai lemezre esik, s a lemezt a bolometerrel egyidejűleg mozgatják. A lemezen ily módon létrejövő görbe a spektrum hőeloszlását tünteti elő. A bolometer kiváló érzékenységét mutatják az igen csekély intenzitású földi hőforrásokra és a holdra vonatkozó mérések; így pl. egy 0° hőmérsékletű jégtömeg hősugárzása és a sugárzás eloszlása az utóbbinak spektrumában nehézség nélkül meg volt határozható. A hold sugárzását Alleghenyben igen behatóan tanulmányozták, holott ezen hatásnak csak puszta kimutatása is a MELLONI-féle thermomultiplicatorral a legnagyobb nehézségekkel jár. A hold korong különböző részeinek sugárzását megmérvén, sikerült az egyenlő sugárzás görbéit a hold felületén meghúzni. Sőt még azt is sikerült kimutatni, hogy holdphasis esetében a sugárzás az árnyék határára merőleges irányban másképen változik növekedő, mint fogyó holdnál. Ennek így is kell lenni, mert míg fogyó holdnál a hold felületnek a napsugaraktól átmelegített részei jutnak bele az árnyékba és ott hűlni kezdenek, addig növekedő holdnál a 14 napig tartó éjjelen át kihűlt részek kerűlnek a napsugarak melegítő behatása alá, tehát a hőmérsékletnek az első esetben az árnyék határa környékén a sötét résztől a világos rész felé menve másképen kell változnia mint az utóbbi esetben.

Az Allegheny-observatóriumban különben még ezeken kívül csillagspektrumok photographálásával is foglalkoznak, mely czélra egy középnagyságú aequatoreal szolgál.

Utamat tovább nyugat felé folytatván, elértem utazasom egyik főczélját, a californiai hegyekben fekvő Lick-Observatoriumot. Ez az intézet a legutóbbi évtizedben keletkezett, de már rövid fennállása alatt is oly nevezetes

eredményeket tud felmutatni, hogy nem csak az amerikai csillagvizsgálók között foglalja el az első helyet, hanem világhírre is tett szert. — Az intézet a nemrégiben elhúnyt JAMES LICK dúsgazdag californiai gyáros bőkezű adakozásának köszöni lételét. Nem tudni, hogy tulajdonképen mi vezette LICK-et, ki semmi különös tudományos képzettséggel nem birt s azt mondják, hogy életében még nagyobb teleszkopot nem látott soha, arra a gondolatra, hogy óriási vagyonának tekintélyes részét, 700,000$-t egy csillagászati observatórium építtetésére fordítsa. Élete vége felé ugyanis sokat gondolkozott azon, hogy mi módon tudna magának olyan maradandó emléket emelni, melylyel nevét halhatatlaná tenné, de tervei egészen más körben mozogtak: valami óriási márvány-pyramist akart magának siremlékül építtetni a san-franciscoi öbölben, vagy többszörös életnagyságú szobrait állíttatni fel az Egyesült-Államok partvidékein s több efféle. Nehány józan barátjának, közöttük első sorban Prof. DAVIDSON-nak, szerencsésen sikerült őt ezen kalandos és az utókorra nézve semmi haszonnal sem járó terveiről lebeszélni s úgy látszik ez időben jött azon gondolatra, hogy egy óriási teleszkopot építtessen. Ezért több szakértővel értekezve, végre 700,000$-nyi összeget vett fel végrendeletébe egy olyan teleszkop számára, mely nagyobb és tökéletesebb legyen, mint minden ilynemű ez időben létező műszer s evvel kapcsolatban mindenféle mechanikai berendezésre, a mi egy ilyen műszerhez szükséges, egy ezzel összeköttetésben levő tökéletes felszerelésű csillagdára és végül azon telek kisajátítására, melyet egy általa kinevezett bizottság ezen czélra ki fog jelölni. Az összeg pedig a californiai egyetem tulajdonát képezze és a csillagvizsgáló is ezen intézethez tartozzék. Helyéül olyan pontot akart választani, mely könnyen hozzáférhető és általában turisztikai szempontból is előnyös legyen, úgy hogy az ott felépítendő observatórium egyetlen-egy, a környéken megforduló utas figyelmét sem kerülhesse ki. Erre a 70-es évek közepe felé a csillagvizsgáló kérdésével megbízott bizottság NEWCOMB-ot kérte fel, hogy tanulmányozza a beszerzendő objektiv kérdését és lépjen összeköttetésbe a nevezetesebb európai és amerikai optikai czégekkel. NEWCOMB gondosan tanulmányozva az optikai üvegek készítésére vonatkozó eljárásokat, tanulmányait közölte a bizottsággal, s ennek alapján megállapodtak hogy a nagy távcső objektivja semmi esetre se legyen nagyobb 36″-nál, hogy a nyers anyag szállításával a párizsi FEIL-czéget, csiszolásával pedig CLARK cambridgeporti optikus és mechanikust bízzák meg. Az anyag előállítása nagy nehézségekkel járt ugyan, és hosszú időt vett igénybe, úgy hogy csak a 80-as évek közepén jutottak Clark-ék a szükséges nyers anyag birtokába, melynek csiszolását 50,000$-ért vállalták el. — Ezenközben a bizottság behatóan megvizsgálta az observatórium helyének a kérdését, s BURNHAM chicagói csillagászt bízta meg összehasonlító megfigyelésekkel különféle, ezen czélra alkalmasnak

látszó magas fekvésű ponton. — Az összehasonlító észlelésekből, különösen kettős csillagok megfigyeléséből kiderült, hogy a Mount Hamilton, — 1400 m. magasságú hegycsúcs a Sierrák egyik nyugati lánczolatában, — a csillagda számára kiváltképen alkalmas. Az itt végzett megfigyelések tartama alatt 60 este közül 42 egészen derült volt, úgy hogy ezeken BURNHAM a legerősebb nagyításokat használhatta a legnehezebben felbontható kettős csillagok mérésére. A hely mellett azután meg is állapodtak, miután a Santa-Clara grófság a San-José legközelebbi vasúti állomástól a hegyre felvezető kocsiútnak saját költségén való kiépítését elvállalta. Ezen út építési költségei 78,000$-ra rúgtak. Az observatórium czéljaira az állam körülbelül 2600 acre-nyi területet tartott fenn, mely nagy terület kirekesztése ezen a helyen azért szükséges, mert ezen környéken gyakori erdőégésekből eredő tűzveszélytől kellett az intézetet megóvni. Erre hozzáfogtak az építkezéshez, mely ezen félreeső, nehezen hozzáférhető helyen sok nehézséggel és nagy költségekkel járt. Különösen az építkezéshez szükséges terület kiegyengetése a hegy csúcsán, mely nagy sziklatömegek lerepesztését tette szükségessé, tartott igen sokáig, úgy hogy az intézet műszereivel együtt csak 1888-ban készült el teljesen.

A tulajdonképeni observatórium két épületben van elhelyezve; ezek mögött állanak a lakóházak a csillagászok számára, raktárak, a műhely és egyéb melléképületek. Az observatórium főépülete a 36″-es teleszkop nagy kupolájából és a 12″-es teleszkop kisebb kupolájából áll, melyeket egy 57 méter hosszú csarnok köt össze. Itt vannak elhelyezve az intézet chronometerei és kisebb műszerei, a könyvtár és a gyűjtemények és két iroda. A nagy kupola 23 méter átmérőjű és egészen vasból van készítve, kinyitható része 10 láb széles. A forgatásra, mely kifogástalanúl és aránylag igen gyorsan megy, egy vízmótor szolgál körülbelül 90,000 kg. súly mozgatására 90·5 kg súly elegendő. — Ebben a kupolában áll az intézet főműszere, a 36″ (91 cm.) nyílású óriási teleszkop, ez idő szerint a legnagyobb nyílású távcső a világon. Gyútávola 17·2 méter, úgy az általa létesített nap-kép a gyújtósíkban 15 cm. átmérőjű. Hogy ezen, csakis ocularmegfigyelésekre készült és ezért a látható sugarakra achromatizált távcsövet photographiai czélra is használhassák, egy 34″-es correctiólencsét is készíttettek hozzá, mely convergens levén, a rendszer gyújtótávolát körülbelül 2·5 m-rel rövidíti meg. Ezen objektiv rész, daczára nagy méreteinek, megfelelő gépezetek segélyével igen gyorsan feltehető és levehető. — Hogy a phot. objektiv használata közben a gyújtósíkhoz hozzá lehessen férni, a távcső ennek megfelelő helyén hosszúkás nyílás van oldalt kivágva, melyen benyúlva, a kasetták és a pillanatzár kényelmesen kezelhetők. A legfontosabb, refractorra alkalmazható mellék-készülék az intézet óriási spektroszkopja, több különböző prizmával és egy ROWLAND-féle diffractio-rácscsal nagy disper-

siókra; dispersiója oly nagy, hogy állítólag 50 egymásután felállított üveg-prizmáéval volna egyenlő, ha ugyanis lehetne ennyi prizmán át egyáltalában észlelni. — A nagy teleszkop még 3 állandóan ráerősített 6″, 4″ illetőleg 3″-es keresővel van ellátva, és szükség esetében, fotografálás alkalmával az intézet 12″-es távcsöve is könnyen rá alkalmazható keresőnek. — A műszer mechanikai berendezése WARNER & SWASEY clevelandi mechanikusok műhelyében készült, és minden tekintetben kifogástalan. A tengelyek oly jól vannak ágyazva és az összes mozgó-részek oly gondosan ellensúlyozva, hogy az egész óriási távcső kézzel mozgatható. A durva beállítás alulról kötelekkel történik, a finom mozgások úgy az oculártól mint alulról is egyaránt kezelhetők. Az elektromos control-készülékkel ellátott óragép járása szintén kifogástalan. Az észlelő kényelmére a kupola padlója GRUBB tervei szerint mozgathatólag van berendezve, úgy hogy az észlelőnek nincs szüksége magas észlelő létrára, hanem az oculárt mindig a padlón állva elérheti, mely függélyes irányban bármely tetszőleges helyzetbe hozható; a padló mozgatását hydraulikus sajtók eszközlik. A nagy refractor kitűnő optikai tulajdonságairól ottani látogatásom alatt bó alkalmam volt meggyőződni. Láttam benne a Saturnust, egy csillaghalmazt és a gyűrűködőt a Lyrában; a képek élessége és egyúttal rendkívüli fényessége meghaladt mindent, mit eddig kisebb műszereken láttam. Leginkább a gyűrűköd lepett meg, mely különben elég fénytelen és csekély kiterjedésű objektum, bámulatos fényesnek mutatkozott, és még gyakorlatlan szem is felismerhetett rajta olyan részleteket, melyeket kisebb műszeren még egyáltalában alig volt lehetséges meglátni. A kis csillag a köd közepén igen tisztán látható volt, és a képek még erős, 1000 nagyítás mellett sem szenvedtek semmit élesség dolgában. Megjegyzendő, hogy az achromatizálás daczára a különböző hullámhosszú sugarak gyújtótávola eléggé különböző úgy, hogy a legszélső látható viola sugarakról a vörösekre átmenve, a műszer ocularjának beállításán több cm.-t kell változtatni, és ezért pl. bizonyos monochromatikus fényű ködök és esetleg szomszédságukban levő csillagok sohasem láthatók ugyanazon beállítás mellett egyenlő élesen.

Az observatórium egyéb műszerei a már említett 12″-es refractor, egy 6½″ nyílású kisebb transportabilis æquatoreal, melynek lencséje a REPSOLD-féle ugyanily nyílású meridiankörhöz is használható mint a déli collimator objektivja; ezen meridiankör a főépület mögött álló meridiánszobában van elhelyezve. E mellett áll egy 4″-es passage-műszer, mely egyúttal a HORREBOW-TALCOTT-féle módszerre is használható, továbbá egy vízszintes photoheliograph a passage-szoba mellett, s más kisebb csillagászati, meteorologiai és földrengést-jelző műszerek.

A csillagda állandó személyzete ez idő szerint hat csillagászból áll, beleértve HOLDEN igazgatót is. A munka felosztása, különösen a mennyiben a

nagy refractorra vonatkozik, nagyon eltér attól, mit az európai csillagvizsgálókon találunk, és *sok észlelőnek* teszi lehetővé a kitünő műszer mentül többoldalú használatát. Hetenként két estén HOLDEN igazgató és segédje használják photographiai munkálatokra, másik két estén CAMPBELL és segédje spektroskopi vizsgálatokra, két estén BARNARD és SCHAEBERLE csillagászok kettős csillagok, vagy bolygók és üstökösök megfigyelésére és más vegyes észleletekre, és végül minden héten egy estén: szombaton LICK végrendelete értelmében nyitva van az intézet a közönség számára 10 óráig. LICK ugyanis a csillagda alapítása által nem csak a tudomány előmozdítását, hanem annak népszerüsítését és széles körben való terjesztését is tűzte ki feladatául. Ilyen estéken szép számú közönség szokott összegyülni, és nagy érdeklődést mutat a csillagászat iránt. A nagy műszeren mindenki megnézhet egy-két objectumot a látogatók számához képest, s e mellett a 6½ "-es és 12"-es távcsövek is rendelkezésre állanak. Minden műszer mellett van egy csillagász, ki a közönségnek mindennemü felvilágosítással szolgál. — A többi műszerek is meghatározott észlelőkre vannak bízva, de nem annyira megkötött programmal.

A LICK-observatórium eddigi nevezetesebb munkálatai a következőkben foglalhatók össze: 1. Napfogyatkozások megfigyelése és a napcorona photographiai felvételei, melyek SCHAEBERLE-t a corona új elméletére vezették; 2. bolygók és üstökösök észlelése, Jupiter és Saturnus photogr. felvételei CAMPBELL által, s legutóbb az observatórium egyik legnevezetesebb felfedezése az 5-dik Jupiter-hold, BURNHAM-tól; 3. kettős csillagok mérése és új kettős csillagok felfedezése, ugyancsak BURNHAM-tól, számszerint 198 új kettős csillag; 4. meridián-észlelések főleg a fundamentális csillagok helymeghatározása és a refractió vizsgálata czéljából; 5. SCHAEBERLE vizsgálatai a photogr. hatású sugarak absorbtiójára vonatkozólag, mely vizsgálatok főleg a photographált csillagok nagyságrendjének megállapítására nézve fontosak. 8. BARNARD-nak a csillaghalmazok, ködfoltok és a tejút szerkezetére vonatkozó tanulmányai, melyek egy új üstökös felfedezéséhez vezettek; 9. a hold photographiái, melyeknek felvételére a nagy gyútávolú és kitünő definitiójú műszer kiválóan alkalmas. Ezeknek készítését addig fogják folytatni, míg a hold korának minden órájára nem lesz egy-egy felvétel. Ilyen úton a hold felületén végbemenő esetleges változások a legbiztosabban lesznek felismerhetők. Ezen többnyire utólag megnagyított holdképeket WEINEK L. hazánk fia, a prágai csillagda igazgatója a legnagyobb gonddal lerajzolja, s a rajzokat azután HOLDEN-nel együtt tüzetes vizsgálatnak veti alá, melynek eredménye sok új, az eddigi legtökéletesebb MAEDLER és SCHMIDT-féle holdtérképeken sem található részletek felfedezéséhez vezetett; 10. végül CAMPBELL spektroszkopi vizsgálatai, melyek legnevezetesbike a Nova Aurigae új csillag spektrumának meghatározása volt. Ez az új csillag gyönge

fénye miatt más kisebb műszereken alig volt megfigyelhető, s C. vizsgálatai őt arra a következtetésre vezették, hogy a Nova újabban ködd é vált, mely utóbbi vélemény újabban tüzetes díscussió tárgya volt, de még eddig nincs általánosan elfogadva.

Eme rövid összeállításból láthatjuk, hogy a Lick-observatórium különös súlyt fektet a photographiai módszerekre, és erre a czélra igen jól van felszerelve. Ily módon lehet kitünő távcsövüket legjobban kihasználni mulékony, rövid tartamú jelenségeknek mintegy regisztrálására; a photographia gyorsan elkészül és teljesen hiteles, és eredményei bárhol és bármikor tanulmányozhatók és biztosan összehasonlíthatók más vizsgálók eredményeivel. Eredményeinek közlésében a Lick-csillagda igen liberalisan jár el; negativjait vagy más észleleteit minden más csillagda vagy competens kutató rendelkezésére bocsátja, mintegy a nyers anyagot szolgáltatván nekik, s ezzel lehetővé teszi, hogy ilyen több más intézettel való összemüködés révén bizonyos kérdések esetleg nehány hónap alatt elintéztessenek, mire egy külön álló csillagvizsgálónak több évre volna szüksége, ha csupán saját segédeszközeire volna utalva.

Utam végén meglátogattam a Harvard egyetemet Bostonban, az Egyesült-Államok egyik legrégibb és legnevezetesebb tanintézetét. Ennek, valamint a többi amerikai egyetemeknek, szervezete igen lényegesen különbözik az európai ilynemű intézetekétől és pedig főleg az intézetek igen nagy sokoldalúsága lepett meg. A Harvard egyetem, és a szervezetében hozzá hasonló princetoni egyetem New-Jersey államban, melyet szintén meglátogattam, körülbelül felöleli mindazon tantárgyakat, melyek Európában egy egyetemen, műegyetemen és gazdasági főiskolán együtt véve előadatnak. A Harvard-egyetem pl. következő osztályokból áll; a művészeti és tudományos facultás, mely alá tartoznak a Harvard College és a Tudományos Iskola (Scientific School), végül a «Graduate School»; az első és második kiterjeszkedik a régi és modern philologiára, philosophiára, történelemre, zenére és képzőművészetekre, exact és természettudományokra, a technika minden fontosabb ágára és a régiségtanra. Az első két intézetben a hallgató egészen szabadon választja tárgyait, a második különösen a baccalaureusi fokozatra készít elő és hét kötelező cursusra oszlik; a Graduate School körülbelül ugyanezeket a tudományokat öleli fel, de főleg a doctori rangra képezi ki hallgatóit, és magasabb, speciális tanfolyamokból áll haladottabbak számára. Ezen kivül van az egyetemnek még hét szakiskolája (Professional Schools) a megfelelő facultásokkal névszerint a hittudományi, jogi, orvosi, fogorvosi, állatorvosi iskola, továbbá a Bussey-Intézet a mezőgazdaság számára és a hasonnevü facultások. — Eme különböző intézetek épületei 3 terjedelmes telepet képeznek, a város különböző részein. Az intézetek felszerelése, ha nem is állhatja ki a versenyt az europai egyetemekével, mindenesetre

kielégítőnek mondható, ha tekintetbe vesszük, hogy tulajdonképen a tanítás alacsonyabb színvonalon áll, mint Európában, mert az első két évnek legnagyobb részt azon tantárgyak adják a tananyagát, melyek nálunk a középiskolák felsőbb osztályaiban adatnak elő; a hallgatók túlnyomó része (a prof. school-okét leszámítva) nem is szakképzettség megszerzése végett jön az egyetemre, hanem csak általános műveltség megszerzése végett, s későbbi életében visszatér egyéb polgári foglalkozásához; csak igen kevés hallgató készül tanári pályára. — Az épületek általában jól megfelelnek czéljuknak, a labaratoriumok és gyűjtemények tágasak és kényelmesek, de felszerelésük nem mindig kielégítő, így pl. a princetoni physikai intézetet gondosan megszemléltem ugyan, de egyebet, mint az előadási készülékeknek meglehetősen teljes gyűjteményét és néhány érdekes FRANKLIN-tól származó reliquiát alig találtam benne; finomabb mérésekhez szükséges præcisio műszerek csaknem teljesen hiányoztak itt.

A Harvard-egyetem csillagdája az amerikai csillagdák közt előkelő helyet foglal el. Épületei külön telepen vannak csekély távolságban az egyetem többi épületeitől. Felszerelése igen gazdag és egy 15″ és 6″-es refractorból, 8″-es meridián-műszerből és öt photographiai távcsőből áll melyek nyílásai 12″, 11″ és 8″, továbbá 28″ és 15″, melyek reflectorok. Ezenkívül az observatórium Peruban, Arequipában is tart fenn négy jól felszerelt állomást a Boyden-alapból — jelenleg 214,000$ — különböző magasságokban a tenger színe felett; ezen állomás számára készül jelenleg egy óriási photogr. készülék 24″-es objektivval Miss BRUCE 50,000 $-nyi adományából. — Az intézet személyzete ehhez mérten igen számos: — Arequipa állomást is beleértve —, mintegy 40 alkalmazottból áll, kik közt 17 hölgy van, mindannyian a photogr. munkálatoknál alkalmazva. A Harvard-csillagda megtekintésénél a műszerek nagy száma mellett különösen azok rendkívül kezdetleges kivitele lepett meg. Ezen számos különféle műszer között talán egy sincs, mely a modern mechanikai követelményeknek teljesen megfelelne, mindegyiknél csak a legszükségesebb alkatrészekre szorítkoztak, s azok is csak durván látszanak összetákolva lenni, úgy hogy egyik-másik ilyen műszer inkább csak kezdetleges provizóriumnak látszik.

A csillagda munkaköre igen sokoldalú: terjedelmes meridián észleléseken kívül újabban, különösen mióta E. C. PICKERING az intézet igazgatója, igen behatóan foglalkoznak az állócsillagok photometriájával úgy a visualis, mint a photographiai fényesség meghatározása végett. Az első czélra PICKERING sokféle műszert alkalmazott; a legutolsó, melylyel igen sokat dolgoznak, a jelenleg is használt meridián-photometer volt. Ez egy kelet-nyugati irányban felállított vízszíntes helyzetű távcső két objektivvel, melyek mindegyike egy totalreflexiós prizmával van ellátva. A prizmák egyikét minden észlelésnél a sarkcsillagra (α Ursae min.) állítják, és ezzel hasonlít-

ják össze a többi, a látmezőn átvonuló csillagokat, melyek képét a második objektiv szolgáltatja. A fényesség mérése polarisatióra alapított extinctió-photometerrel történik.

Ujabb időben az observatórium igen behatóan foglalkozik csillagászati photographiával. Henry Draper dúsgazdag magántudós özvegyének bőkezű adakozásából tartják fenn az intézet erre a czélra rendelt «Henry Draper Memorial» név alatt ismert osztályát. — Az itt készülő csillagászati photographiák igen sokfélék; a legfontosabbak a térképfelvételek (10 m-től 60-ig terjedő is hosszabb expositióval), a spektrál felvételek (10 m-től 60 m-ig terjedő expositióval) és a nyom-felvételek (trail-plates) többszöri, megszakitott expositióval nyugvó távcsővel felvéve. — Ezen felvételeket a legnagyobb gonddal elteszik és rendszeres lajstromot vezetnek rólok. A térképfelvételek főczélja változó vagy esetleg új csillagok felkeresése, miért is azokat a meglevő csillagtérképekkel és csillagjegyzékekkel gondosan összehasonlítják, továbbá a gyönge fényű csillagok photographiai nagyságrendjének megállapítására is használják őket s ez utóbbi czélra a cambridgei és az arequipai 8″-es távcsövekkel készült felvételeket használják. Ezen photometriai meghatározások mintegy 40,000 csillagra fognak kiterjeszkedni. A spektrumlemezeket főleg ritkább spektrumu csillagok felkeresésére használják, továbbá bolygószerű ködöket is keresnek rajtuk. Az ilyen objektumokat gyakorlott szem igen könnyen felismeri és megkülönbözteti a többi csillagoktól, s ily módon könnyen akadnak változó csillagokra, melyek spektrumuk bizonyos sajátságaiból biztosan megállapíthatók. — Ily módon rövid idő alatt a változó csillagokra vonatkozó igen gazdag és teljesen megbízható adathalmaz birtokába jutnak, a mi ocularmegfigyelések utján sokkal tovább tartana, és főleg az egyes észlelők subjektiv különbségei folytán nehezebben volna felhasználható. — Ezen vizsgálatok fontosabb eredményei a ξ Ursae min. kettős voltának E. C. Pickering-től eredő kimutatása spektrumából, mely 2 componens mintegy 52 nap alatt tesz egy teljes körülforgást. Ez eredményt a spektrum ama tulajdonságából vonták le, hogy vonalai szabályos időközökben megkettőződnek. — Ugyanilyen módon jutott Miss Maury a β Aurigae kettős rendszer felismerésére, mely sokkal érdekesebb az előbbinél, mivel periodusa csak $3^d\ 23^h,5$. Mindkét pár componensei olyan közel állanak egymáshoz, hogy feloldásuk optikai úton még eddig nem sikerült. A harmadik objektum, mely szintén ebbe az osztályba látszik tartozni, β Lyrae, melynek spektrumában a sötét és világos vonalak egymáshoz való helyzetüket megváltoztatják. — Az eddigi ilyen irányú vizsgálatok összesen 23 új változó csillag felfedezéséhez vezettek.

Harkányi Béla.

Igen tiszlelt Tagtárs Ur!

A Mathematikai és Physikai Társulat választmányának határozatából szerencsém van értesíteni, hogy társulatunk II. rendes közgyülését f. é. május hó 12-én s a rákövetkező napokon fogja megtartani.

Az I. közgyülés sikere arra indította a választmányt, hogy a II. közgyülést is előadásokkal, ujabb kisérletek bemutatásával, fővárosi tanintézetek szertárainak, valamint a szaktársakat érdeklő gyári- és ipartelepek megtekintésével tegye a résztvevő t. Tagtársaknak érdekesebbé és tanulságossá.

Ezt jelentvén, bátorkodom t. Tagtárs urat a választmány nevében a közgyülésre tisztelettel meghivni, azzal a kéréssel, hogy megjelenéséről mennél előbb értesíteni sziveskedjék. Ha a résztvevők számára nézve legalább közelitőleg tájékozódunk, lehetséges lesz a tárgysorozatot oly módon egybeállitani, hogy elintézése a t. Tagtárs urak figyelmét és erejét tulságosan ne terhelje.

A részletes tárgysort legkésőbb május 6-án fogjuk szétküldeni. Egyelőre csak annyi van megállapitva, hogy a közgyülés május 12-én reggeli 8 órakor fog a tud. egyetem physikai intézetében megnyittatni.

Reméljük, hogy a pünkösdi szünet számos tagtársunkat fogja a közgyülésen való megjelenésre késztetni: mi azon leszünk, hogy a II. közgyülés az I-sőnek méltó folytatása legyen

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT VÁLASZTMÁNYA MEGBIZÁSÁBÓL

Budapesten, 1894. április 20. *Bartoniek Géza,*
ügyvivő titkár.

Franklin-Társulat nyomdája

A FOGYATKOZÁSOK GRAPHIKUS MEGHATÁROZÁSA.

(Első közlemény.)

A Nap- és Holdfogyatkozások ez idő szerint divatos analytikai tárgyalása — nagy általánosságánál fogva — kétségkivül igen tökéletes, de megértése nagyobb mathematikai készültséget követel meg. LALANDE a fogyatkozások előre való kiszámitásának egy elemi, tisztán graphikus módszerét adta meg, mely teljesen kielégitő pontosságu. Tanulságos, sőt mulatságos volta arra késztet, hogy — csekély módositásokkal — e helyen tárgyaljam.

A hold- és a napfogyatkozások tárgyalásának alapgondolata velejében egy és ugyanaz; a külömbségek, melyek a holdfogyatkozások esetében a physikai fogyatkozással, azaz egyidőben az egész fél Földön látható sötétedéssel, a napfogyatkozások esetében pedig az optikai fogyatkozással, azaz a megfigyelőnek a Hold- és Naphoz való pillanatnyi helyzetével számolnak, legvilágosabbban a szerkesztésnél fognak majd feltünni.

I. Holdfogyatkozások.

Ha a Hold a földpálya (ekliptika) síkjában oppositióba kerül a Nappal (telehold), tehát közel áll a hold- és földpálya egyik metszési pontjához (csomójához), holdfogyatkozás bekövetkezhetik. A földárnyék keresztmetszetét a Hold H távolságában az 1. ábra adja. Ha N és F a Nap és Föld középpontja, π és p e két test horizontalis æquatorealis parallaxisa, R a Nap, ρ a földárnyéknak a holdtávolságában való látszöge,

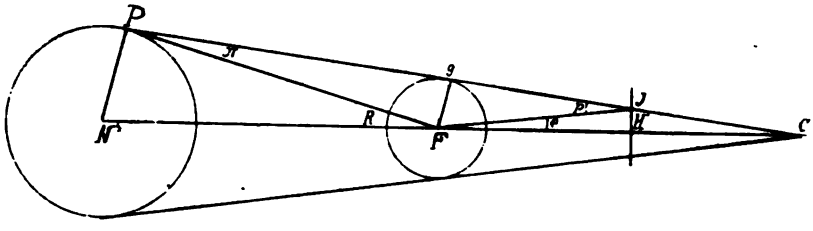
$$PFI\measuredangle = 180° - R - \rho = 180° - p - \pi$$

a miből

$$\rho = p + \pi - R.$$

Mivel p, π és R változó mennyiségek, melyek illetve 53′ 53,0″ — 61′ 27,0″, 8,7″—9,0″ és 15′ 45,5″— 16′ 17,5″ értékek között váltakoznak, világos, hogy ρ minimum és maximum értéke 37′ 44,5″ és 45′ 50,2″ lehet.* A holdfogyatkozásoknál észlelt sugártörés miatt az árnyékkorong átmérőjét $\frac{1}{30}$-részszel nagyobbnak szokás venni.

Mivel ρ mindig nagyobb, mint a Hold látszöge, gyürüs holdfogyatkozás nem lehetséges; és világos, hogy a részleges fogyatkozás határa beáll, ha a Hold széle a földárnyék korongját éppen kivülről érinti, s hogy még éppen teljes a fogyatkozás, ha a két korong belső érintésben van. Az első esetben a Hold középpontja az árnyékkorong középpontjától $\rho + r$, a másodikban $\rho - r$ távol-



1. ábra.

ságban van, ha r-vel jelöljük a Hold látszögét. A Hold középpontjánál derékszögü $AH\mathfrak{Q}$ sphærikus háromszög, melyet az $AH-\rho+r$ vagy $\rho-r$ távolság, az árnyék középpontja *(A)* és a csomó ($\mathfrak{Q}$) közötti ekliptika-ív és a Hold *(H)* meg a csomó közötti holdpályaív alkot, a holdpálya i hajlásával megadja a földárnyék csomótávolát fogyatkozás esetén:

$$\sin A\mathfrak{Q} = \frac{\sin AH}{\sin i}.$$

Mivel r értéke 14′ 43,0″ és 16′ 46,5″ között változhatik, $\rho+r$ 52′ 27,5″ és 62′ 36,7″ és hasonlóképen $\rho-r$ értéke 23′ 1,5″ és 29′

* Úgy ezen, mint az alábbi maximumok és minimumok képzésénél tekintetbe veendő, hogy $\frac{\pi}{R}$ = const. és $\frac{p}{r}$ = const. vonatkozásoknál fogva a parallaxis maximumához vagy minimumához mindig a látszög maximuma vagy minimuma tartozik.

3,7″ határok között ingadozik. Ha az AH minimumával a hajlás maximumát (5° 18′), AH maximumával i minimumát (5° 0′) összevetjük, a következő táblázathoz jutunk:

	szükséges határa:	lehetséges határa:
Teljes holdfogyatkozás	4° 9,5′	5° 34,0′
Részleges holdfogyatkozás	9 30,5	12 3,7

Azaz: ha telehold alkalmával a földárnyék (vagy, mivel ezzel szemben mindig a Nap áll, a Nap) a legközelebbi csomóponttól 4° 9,5′-nél kisebb távolságra van: *okvetlenül teljes*, ha 4° 9,5′ és 5° 34,0′ között áll, *okvetlenül teljes vagy részleges*, ha 5° 34,0′ és 9° 30,5′ között áll, *okvetlenül részleges* holdfogyatkozást észlelünk; ha 9° 30,5′ és 12° 3,7′ között áll, részleges fogyatkozás még *lehetséges*, míg 12° 3,7′-on túl fogyatkozásnak többé *helye nincs*. Mivel az $AH = r \pm \rho$ ív a hajlás négyzetével egyenlő rendű tagokig a Hold szélességével azonos, az előbbi határok helyébe előzetes számitás kikerülésével egyszerüen a Holdnak: 23′ 1,5″, 29′ 3,7″, 52′ 27,5″ és 62′ 36,7″ előbb talált szélességi határai léphetnek, melyek az ephemerida-gyüjteményben adott holdhelyekkel szintén közvetlenül összehasonlithatók.

A teljes holdfogyatkozás átlagos tartama könnyen megállapitható; a Nap perczenkénti mozgása 2,46″ s ennyi természetesen a földárnyéké is; a Hold közepes siderikus mozgása ugyanez irányban 32,94″, tehát a Holdnak relativ mozgása az árnyékkoronghoz képest 30,48″. Centrális átvonulásnál a Hold útja

$(1 + \frac{1}{60})$ közepes árnyékátmérő + a Hold átlagos átmérője

s ezért a centrális fogyatkozás tartama

$$\frac{(1 + \frac{1}{60})\ 83'\ 34{,}7'' + 31'\ 29{,}5''}{30{,}48''} = 229^m = 3^h\ 49^m$$

a miből

$$\frac{(1 + \frac{1}{60})\ 83'\ 34{,}7'' - 31'\ 29{,}5''}{30{,}48''} = 105^m = 1^h\ 45^m$$

a teljes sötétülésre esik.

A teljes holdfogyatkozás egyes fázisainak meghatározására egy

konkrét példát használok fel, és pedig az 1895. márczius 10-iki holdfogyatkozást. A szerkesztés alapját a fogyatkozásnak úgynevezett elemei alkotják, melyeket a csillagászati ephemeridák jó előre közölnek; ezek a Hold és Nap szembenállása pillanatában e két égi test declinatiója, óránkénti mozgása declinatióban és rectascensióban, horizontális-æquatoreális parallaxisa és sugaraik. Példánk számára az 1895-diki Berliner Jahrbuch a következő adatokat közli:

Oppositio rectascensioban: 1895 márczius 10. $16^h\,25^m\,0^s.9$, berlini közép idő.

☾ declinatiója	$=$	$+\ 3^\circ\ 59'\ 35{,}0''$
☉ «		$-\ 3^\circ\ 50'\ 3{,}5''$
☾ mozgása rectascensióban 1^h alatt	$=$	$+\ 33'\ 7{,}8''$
☉ « « « «	$=$	$+\ 2'\ 17{,}9''$
☾ mozgása declinatióban 1^h alatt	$=$	$-\ 17'\ 54{,}3''$
☉ « « « «	$+$	$58{,}8''$
☾ horiz. æquat. parallaxisa	p	$= 60'\ 53{,}3''$
☉ « « «	π	$= 8{,}9''$
☾ sugarának látszöge	r	$= 16'\ 37{,}2''$
☉ « «	R	$= 16'\ 5{,}6''$

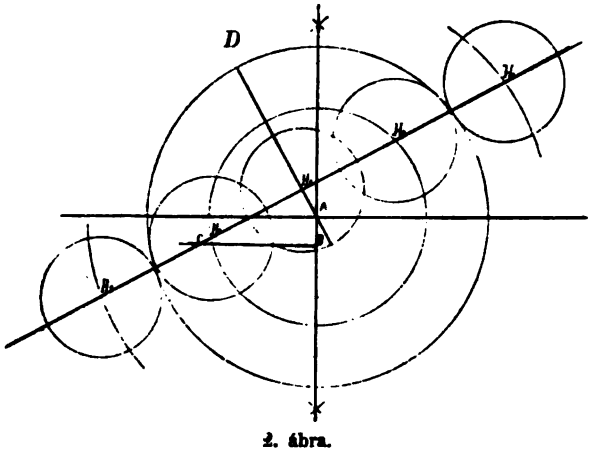
Ha ez elemek nem volnának meg, akkor az ephemeridákból nagyon könnyen levezethetők. Egyszerű interpolatió segítségével keressük az időt, melyben a Nap és Hold rectascensiókülömbsége éppen 180° (oppositió). A fogyatkozási határok előbb levezetett értékei csakhamar megmutatják, várható-e fogyatkozás vagy sem. Ha igen, akkor az oppositió pillanatára interpoláljuk az ephemerida azon értékeit, melyek a fenti táblázatban szerepelnek, s ha az ephemeridák alapját tevő meridián helyett más délkör — pl. a budapesti — volna kivánatos, a két délkör hosszúságkülömbsége mindjárt az interpolátiónál tekintetbe vehető.

Ezen interpolált értékekből, vagy a kész táblázatból:

$$o = p + \pi - R = 44'\ 56{,}6'' \qquad p + \tfrac{1}{60}\,o = 45'\ 41{,}5''$$

Ha most (2. ábra)* pl. 1′ = 1 mm. mértékkel 45,7 mm. sugarú kört húzunk, ez az árnyékkorongnak a Hold távolságában való átmetszetét adja. Mivel a fogyatkozás elemei mind az æquatorra vonatkoznak, *A*-n, az árnyékkorong középpontján átmenő vizszintes vonal a parallel vagy declinatiókör, a rá merőleges egyenes az árnyék órakörének képéül tekinthető.

Az oppositió pillanatában a Nap declinátiója −3° 50′3,5″, a vele az átmérőn szemben fekvő árnyék declinatiója tehát + 3° 50′3,5″, és ennél a Hold 3° 59′35,0″ − 3° 50′3,5″ = 9,5 mm.-rel



2. ábra.

északabbra esik; ha tehát $AO = 9{,}5$ mm., akkor O az oppositió pillanatában a Hold középpontjának relativ helye az árnyék közepéhez képest.

A Holdpálya relativ fekvését az 1 órai mozgás adja: a Nap declinatiója óránként 58,8″-czel nő, az árnyéké tehát ugyanannyival fogy; a Hold saját mozgása ez irányban ugyancsak − 17′54,3″, és ennélfogva relativ óránkénti declinatiómozgása − 16′55,5″, vagyis

* A szövegbeli rajz az eredetinek ½-re van redukálva. Minden szám az 1 ivpercz = 1 mm. alapmérték szerint készített eredetire vonatkozik. Természetes, hogy a graphikai megoldás annál pontosabb eredményre vezet, minél nagyobbnak vétetik az alapméret.

$OB = 16{,}9$ mm. délfelé, a fogyó declinatió irányában kitűzve. A Nap óránkénti rectascensió változása $+2'17{,}9''$ (kelet felé) és ugyanez az árnyék közepének mozgása is; a Holdé $+33'7{,}8''$, tehát a nyugvó árnyékhoz képest a Hold rectascensiója óránként $30'49{,}9''$ nő (kelet felé). E növekedésnek az æquatoron a mi rajzunkban 30,83 mm. felel meg; de a Hold nem ott, hanem $\delta = +3° 59' 35{,}0''$ magasságu declinatiókörben halad, melynek kerülete az æquatoréhoz képest $\cos \delta : 1$ arányában rövidebb, miért is a Hold útja még $\cos \delta$-val szorzandó. Ha tehát

$$BC = 30{,}83 \cos (3^c\ 59{,}6') = 30{,}8 \text{ mm.}$$

kelet felé véve, akkor $OC = 35{,}1$ mm. a Holdnak egy órai útja nagyság és irány szerint; vagyis OC a Hold relativ pályája.

A részleges, illetve teljes fogyatkozás kezdődik vagy végződik, ha a Hold tányérja az árnyékot kivülről, illetve belülről érinti. Ha tehát A körül $\rho \pm r$-rel, azaz $(1 + \frac{1}{60})\ 44'56{,}6'' \pm 16'37{,}2''$ értékeknek megfelelőleg 62,3 és 29,1 mm.-nyi sugarakkal köröket húzunk, ezek a holdpályát a H_1, H_2, H_4, H_5 pontokban metszik, melyek sorban a részleges fogyatkozás kezdete, a teljes fogyatkozás kezdete, a teljes fogyatkozás vége és a részleges fogyatkozás vége számára adják a Hold középpontjának helyét. A fogyatkozás közepét végül megadja az AH_3 merőleges. Ha ezen $H_1, \ldots H_5$ pontok távolát mérjük O-tól, a következő számokhoz jutunk: 57,2; 23,3; 4,6; 32,4; 66,3 mm., melyek a Holdnak az oppositióig, illetve az oppositió óta megtett útjait jelentik. Mivel a Hold az előbbi szerkesztés értelmében óránként az $OC = 35{,}1$ mm.-nyi útat futja be, az $OH_1, OH_2, \ldots$ útak sorban 1,63; 0,66; 0,13; 0,92; 1,89 órának felelnek meg, és mivel O a hold helye az oppositió alkalmával ($16^h\ 25{,}0^m$) világos, hogy az első két szám ez időből levonandó, a többi három hozzáadandó, hogy a fogyatkozás egyes fázisait találjuk. E szerint:

		berlini k. idő	
A fogyatkozás kezdete általában:	márcz. 10.	$14^h\ 47{,}2^m$	$(47{,}1^m)$
A teljes sötétülés kezdete	15	45,4	(45,0)
A fogyatkozás közepe	16	32,8	(32,9)
A teljes sötétülés vége	17	20,2	(20,7)
A fogyatkozás vége általában	18	18,4	(18,6)

hol a zárjeles perczek a Berliner Jahrbuch közölte időket jelentik. Látnivaló, hogy az eltérés teljesen a szerkesztéshiba határain belül van, sőt még csökkenthető volna, ha a Berliner Jahrbuch újítása szerint az árnyéknövekedést nem $\frac{1}{60}$-nak, hanem $\frac{1}{50}$-nek vettük volna. — Az *AD* vonal viszonya a holdátmérőhez 54,0 : 33,2 = 1,626 (a Berliner Jahrbuch szerint 1,628) a fogyatkozás nagyságát adja a holdátmérő részeiben.

Éppen oly könnyen állapítható meg szögmérő segítségével a szög, mely alatt az árnyék a holdtányér északi részétől kelet felé számítva be- vagy kilép (positiószög).

Berlintől nem túlságosan messze fekvő helyek számára elegendő az időben kifejezett hosszúságkülömbség tekintetbevétele; nagyobb távolságok esetében a Holdnak parallaxis- és sugárkülönbözősége is játszhatik szerepet, mi az ephemeridák segítségével úgy a hold-, mint a napfogyatkozásoknál az interpolatióban könnyen tekintetbe vehető.

Annak eldöntésére, vajjon a fogyatkozás egyes fázisai hol és mikép láthatók, legegyszerűbben a Földglóbus szolgál. A glóbus északi vagy déli pólusát annyival emeljük a horizont fölé, a hány fokot a Hold északi vagy déli declinatiója kitesz; ez által a Hold parallelköre a teke legmagasabb pontján halad át. Hozzuk Berlint (általában a fogyatkozásban adott időnek megfelelő helyet) a rézmeridián alá, állítsuk a glóbus számlapját a fogyatkozás kezdetét jelző időre és forgassuk a tekét nyugot felé, míg a mutató az éjféli órát nem adja; akkor nyilván (mivel a Nap és a telehold egymással szemközt állanak) a glóbus egész alsó fele a Napot látja, míg felső, a horizont felett lévő félgömbje a fogyatkozás kezdetét pillantja meg, és eldönthetjük, a fahorizont *nyugoti* oldala mentén mily helyek latják a fogyatkozó Holdat a *kelés*, vagy a horizont *keleti* oldalán mily pontok a *nyugvás* pillanatában, s melyek számára jut a Hold a zenithbe. Ugyanez a művelet ismételhető a fogyatkozás többi fázisaira nézve is, mivel a jelenségnek a földön való teljes lefolyásának hű és elegendő pontos képét nyerjük. Végül pedig világos, hogy a részleges fogyatkozás szerkesztése éppen úgy eszközölhető; ennél persze a 2. és 4. momentum elesik.

Kövesligethy Radó.

ALGEBRAI VIZSGÁLATOK A FÜGGVÉNYTANBAN.

(Első közlemény.)

CAUCHY, PUISEUX és WEIERSTRASS kutatásaiból tudjuk, hogy az:

$$f(x, y) = 0$$

algebrai egyenlet y-t mint az x *analitikai* függvényét definiálja és ez oly hely környezetében, mely *sem elágazási hely, sem pedig y legmagasabb hatványa együtthatójának zérus-helye, hatványsorba* kifejthető. Az ilyen függvényeket *algebrai* függvényeknek nevezzük.

De kérdés, hogy ha adva van egy hatványsor, hogyan lehet annak természetéből algebrai vagy transzczendens voltára ráismerni? azaz: *együtthatói között lévő összefüggésből eldönteni*, hogy *eleget tesz-e valamely algebrai egyenletnek vagy sem?*

E feladathoz hasonlónak megoldását már EULER is ismerte, a mi kitünik GOLDBACH-hoz irt leveléből (1771. decz. 4.), melyben kimondja, hogy $\sqrt[n]{1-an^2}$ kifejtésében a együtthatói egész számok.

1852-ben a berlini akadémia Monats-Bericht-jeinek juliusi számában bebizonyítás nélkül jelent meg EISENSTEIN következő tétele:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \mathfrak{P}(x)$$

racziónális együtthatókkal biró sor csakis akkor tehet eleget egy

$$f(x, y) = 0$$

egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, ha van oly a egész szám, melyre nézve $ax\mathfrak{P}(ax)$ *hatványsor együtthatói egész számok.*

E nevezetes tételt, mely még csak *szükséges* de *nem elegendő feltételt* foglal magában arra nézve, hogy valamely raczionális együtthatókkal biró sor eleget tehessen egy egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, először HEINE *, azután HERMITE ** bizonyította be.

A bebizonyítás, melyet én mutatok be, alapul szolgál egyszersmind e tétel általánosításának is, melyről a további közleményekben kívánok szólani.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \mathfrak{P}(x) \tag{1.}$$

raczionális együtthatókkal biró hatványsorban c_0-t *egész számnak* tételezem fel, mert ha nem az, mindig alkalmas számmal megszorozhatom annak az egyenletnek a gyökeit, melynek $\mathfrak{P}(x)$ hatványsor eleget tesz, úgy hogy oly egyenlethez jutok, a melyre nézve c_0 egész szám.

Ha $\mathfrak{P}(x)$ *raczionális együtthatókkal* biró sor eleget tesz az

$$f(x, y) = 0 \tag{2.}$$

egész *számú együtthatókkal* biró algebrai egyenletnek, akkor

$$f(x, \mathfrak{P}(x)) \equiv 0;$$

tehát minden differenczialhányadosa szintén azonosan egyenlő zérussal; megvizsgálom a 2) alatti egyenlet többtagújának n-ik differenczialhányadosát az $x=0$ helyen.

Jelöljük $f(x, y)$-ban azokat a tagokat, a melyek *y-nal nincsenek* megszorozva $\psi(x)$-el; a többit pedig rendezem x hatványai szerint; ha továbbá az y-nal szorzott tagokban x legalacsonyabb hatványának kitevője m, a legnagyobbénak pedig s, akkor

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) \equiv x^m \varphi_0(y) + x^{m+1} \varphi_1(y) + \cdots + x^r \varphi_{r-m}(y) + \cdots + \\ + x^s \varphi_{s-m}(y) + \psi(x) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.}$$

---

* CRELLE J. 48. Bd. 1854.

** Proceedings of the London Mathematical Society 1876. ápr. 13.

hol a φ-k y függvényei s a fentebb mondottak alapján

$$\varphi(0) \equiv 0.$$

A (3) n-edrendű differenciálhányadosát a LEIBNITZ-féle formula szerint képezem; könnyű belátni, hogy $x^r \varphi_{r-m}(y)$-nak n-edrendű differenciálhányadosa az $x=0$ helyen

$$\left[\frac{d^n x^r \varphi_{r-m}(y)}{dx^n}\right]_{x=0} = r! \binom{n}{r} \left[\frac{d^{n-r} \varphi_{r-m}(y)}{dx^{n-r}}\right]_{x=0}.$$

$\psi(x)$-é pedig $n!c$, hol c $\psi(x)$-ben x^n együtthatója, tehát egész szám, sőt zérus is lehet.

A mondottak megfontolása után már könnyű lesz felírni a (3) alatti egyenlet többtagújának n-edrendű differenciál-hányadosát az $x=0$ helyen, mely:

$$m! \binom{n}{m} \left[\frac{d^{n-m} \varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} + (m+1)! \binom{n}{m+1} \left[\frac{d^{n-m-1} \varphi_1(y)}{dx^{n-m-1}}\right]_{x=0} + \cdots +$$
$$+ n! \binom{n}{n} [\varphi_{n-m}(y)]_{x=0} + n!\, c = 0,$$

Ha itt még tekintetbe veszszük, hogy

$$\binom{n}{m+j} = \frac{n!}{(m+j)!\,(n-m-j)!}$$

s azután az egész egyenletet elosztjuk $n!$-sal, akkor a következő kifejezéshez jutunk:

$$\frac{1}{(n-m)!} \left[\frac{d^{n-m} \varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} + \frac{1}{(n-m-1)!} \left[\frac{d^{n-m-1} \varphi_1(y)}{dx^{n-m-1}}\right]_{x=0} + \cdots +$$
$$+ [\varphi_{n-m}(y)]_{x=0} + c = 0,$$

melynek összevont alakja:

$$\sum_{j=0}^{n-m} \frac{1}{(n-m-j)!} \left[\frac{d^{n-m-j} \varphi_j(y)}{dx^{n-m-j}}\right]_{x=0} + c = 0. \qquad (4.)$$

E kifejezés *nevezőiben* előforduló *fakultások* a végeredményben *törtet nem hoznak* létre; mert

$$\left[\frac{d^r\varphi(y)}{dx^r}\right]_{x=0} \tag{5.}$$

kifejezés minden egyes tagja osztható $r!$-sal; ugyanis $\varphi(y)$ egész számú együtthatókkal szorzott y^s alakú tagokból áll, ha tehát y^s-nek r-ik differenciálhányadosa az $x=0$ helyen osztható $r!$-al, akkor az (5.) egyenletnek minden egyes tagja szintén osztható $r!$-al, már pedig

$$\frac{d^r y^s}{dx^r} = \frac{d^r y^{s-1} y}{dx^r} = y^{s-1}\frac{d^r y}{dx^r} + \cdots + \binom{r}{r_1}\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\frac{d^{r-r_1} y}{dx^{r-r_1}} + \cdots,$$

de mivel

$$\left[\frac{d^r y}{dx^r}\right]_{x=0} = r!\,c_r,$$

tehát az első tag az $x=0$ helyen osztható $r!$-sal; az általános tag

$$\binom{r}{r_1}\left[\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\frac{d^{r-r_1} y}{dx^{r-r_1}}\right]_{x=0} = \frac{r!\,(r-r_1)!}{r_1!\,(r-r_1)!}\,c_{r-r_1}\left[\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\right]_{x=0}$$

szintén osztható $r!$-sal, ha

$$\left[\frac{d^{r_1} y^{s-1}}{dx^{r_1}}\right]_{x=0} \qquad (r_1 \leqq r)$$

osztható $r_1!$-sal, ez pedig a mondottak után osztható $r_1!$-sal, ha

$$\left[\frac{d^{r_2} y^{s-2}}{dx^{r_2}}\right]_{x=0} \qquad (r_2 \leqq r_1)$$

osztható $r_2!$-sal s ú. t. Mivel pedig y első hatványának r-ik differenciálhányadosa az $x=0$ helyen $r!$-sal osztható, azért y^s-nek, valamint $\varphi(y)$-nak is az r-ik differenciálhányadosa az $x=0$ helyen osztható $r!$-sal, tehát a (4.) egyenlet *nevezőiben előforduló törtek a végeredményben eltünnek.*

Irjuk most szummánknak azt a tagját, melyben $j=0$ külön; ez által a 4. alatti egyenlet a következő új alakban jelenik meg:

$$\frac{1}{(n-m)!}\left[\frac{d^{n-m}\varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} + \sum_{j=1}^{n-m}\frac{1}{(n-m-j)!}\left[\frac{d^{n-m-j}\varphi_j(y)}{dx^{n-m-j}}\right]_{x=0} + c = 0$$

Ismeretes, hogy

$$\frac{d\varphi(y)}{dx} = \varphi'(y)\,y'$$

$$\frac{d^2\varphi(y)}{dx^2} = \varphi'(y)\,y'' + \varphi''(y)\,(y')^2$$

$$\frac{d^3\varphi(y)}{dx^3} = \varphi'(y)\,y''' + 3\varphi''(y)\,y'y'' + \varphi'''(y)\,(y')^3$$

. . . . . .

. . . . . .

Általában

$$\frac{d^n\varphi(y)}{dx^n} = \varphi'(y)\,y^{(n)} + \sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r \\ (2\leqq r\leqq n,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=n)}} g(y)\,y^{(\alpha_1)}y^{(\alpha_2)}\dots y^{(\alpha_r)}, \tag{7.}$$

hol $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ az $1, 2, \dots, n-1$ sorban található pozitiv számok és $g_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}$ y-nak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$-től is függő függvénye. A (6.) képlet első tagja tehát a következő alakban írható:

$$\frac{1}{(n-m)!}\left[\frac{d^{n-m}\varphi_0(y)}{dx^{n-m}}\right]_{x=0} = \frac{1}{(n-m)!}\left[\varphi_0'(y)\,y^{(n-m)}\right]_{x=0} +$$

$$+ \sum_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}\left[g(y)\,y^{(\alpha_1)}y^{(\alpha_2)}\dots y^{(\alpha_k)}\right]_{x=0} = \varphi'(c_0)\,c_{n-m} + \sum_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k} G(c_0)\,c_{\alpha_1}c_{\alpha_2}\dots c_{\alpha_k},$$

melyben

$$\left.\begin{aligned} k\geqq 2,\quad k\leqq n-m \\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k = n-m \end{aligned}\right\} \tag{8.}$$

G pedig c_0-nak az a-któl is függő függvénye.

A (7.) alatti egyenlet figyelembe vételével, könnyű látni, hogy a (6.) alatti egyenlet második tagja, még a következőképen is írható:

$$\sum_{j=1}^{n-m}\frac{1}{(n-m-j)!}\left[\frac{d^{n-m-j}\varphi_j(y)}{dx^{n-m-j}}\right]_{x=0} = \varphi_{n-m}(y) +$$

$$+ \sum_{\beta_1\beta_2\dots\beta_l} h(y)\,y^{(\beta_1)}y^{(\beta_2)}\dots y^{(\beta_l)} = \varphi_{n-m}(c_0) + \sum_{\beta_1\beta_2\dots\beta_l} H(c_0)\,c_{\beta_1}c_{\beta_2}\dots c_{\beta_l},$$

hol

$$l \geqq 1,\ l \leqq n-m-1$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_l \leqq n-m-1 \tag{9.}$$

H pedig c_0-nak a β-któl is függő függvénye.

A legutóbbi elért eredmények a következő képlethez vezetnek:

$$\varphi_0'(c_0)\, c_{n-m} + \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} G(c_0)\, c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \ldots c_{\alpha_k} + \\ + \sum_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_l} H(c_0)\, c_{\beta_1} c_{\beta_2} \ldots c_{\beta_l} + \varphi_{n-m}(c_0) + c = 0 \tag{10.}$$

minthogy az α-k, valamint a β-knak is mindegyike kisebb $n-m$-nél, azért kifejezésünk azt mondja ki, *hogy* $\varphi_0'(c_0)\, c_{n-m}$ *nevezőjében nem fordulhatnak elő oly más prímszámok, mint a milyenek az* $n-m$*-nél alacsonyabb indexü* c*-k nevezőiben is előfordulnak.*

A $\varphi'(c_0)$ egész számot jelöljük röviden γ-val és $n-m$ legyen egyenlő az egységgel, akkor, mivel γc_1 nevezőjében csak c_0 nevezője fordulhat elő, de ez utóbbi egész szám, azért

$$\gamma c_1$$

egész szám.

γc_2 nevezőjében csak c_1 nevezője fordulhat elő, tehát γ, még pedig annyiadik hatványon, a mennyi a (10.) egyenleten c_1 legmagasabb hatványkitevője, midőn $n-m=2$, könnyü látni, hogy az első szummában c_1 előfordul a négyzeten, de a másodikban csak az első hatványon, ennélfogva γc_2 nevezőjében előfordulhat γ^3, tehát

$$\gamma^3 c_2$$

egész szám.

Hasonlóképen találjuk, hogy $\gamma^5 c_3$ szintén egész szám.

Általában kimutatom: *hogy ha*

$$\gamma^{2s-1} c_s$$

egész szám, akkor

$$\gamma^{2s+1} c_{s+1}$$

szintén az.

Ugyanis γc_{s+1} nevezőjében csak $c_1, c_2, \ldots, c_s$ nevezői fordulhatnak elő, vagyis γ-nak bizonyos hatványa, melyet a következőképen határozunk meg.

A (10.) egyenlet első szummájában előforduló tagok általános alakja eltekintve az egész számú együtthatótól

$$c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} \dots c_{\alpha_k};$$

a jelen esetben $n-m=s+1$, tehát

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = s+1;$$

minthogy az α-k mindegyike kisebb $(s+1)$-nél, tehát általában c_α nevezőjében előfordulhat $\gamma^{2\alpha-1}$; az általános tag nevezőjében γ hatványa tehát

$$2\alpha_1 - 1 + 2\alpha_2 - 1 + \cdots + 2\alpha_k - 1 = 2s+2-k$$

mely legnagyobb, *ha r a legkisebb értékét (az $k=2$ értéket) veszi fel, ennélfogva az első szummában előforduló tagok nevezőiben γ-nak legmagasabb hatványa $2s$.*

A (10.) egyenlet második szummájában az általános tag

$$c_{\beta_1} c_{\beta_2} \dots c_{\beta_l}, \quad (l \geqq 1,\ l \leqq s),$$

hol

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_l \leqq s$$

tehát az általános tag nevezőjében γ hatványkitevője

$$2\beta_1 - 1 + 2\beta_2 - 1 + \cdots + 2\beta_l - 1 \leqq 2s - l$$

a mi kimondja, hogy a második szummában γ-nak $2s-1$-nél magasabb hatványa nem fordulhat elő a nevezőben; ezzel kimutattuk, hogy a (10.) *egyenletben $n-m=s+1$ alkalomkor γ-nak $2s$-ediknél magasabb hatványai már nem fordulhatnak elő a nevezőben; tehát*

$$\gamma^{2s+1} c_{s+1}$$

egész szám, ha $\gamma^2 = a$, akkor az $ax\mathfrak{P}(ax)$ *hatványsor együtthatói egész számok,* a mi bebizonyítandó volt.

Bebizonyításunk és γ-nak közölt meghatározása csak egy esetben nem használható közvetlenül, ha t. i.

$$\varphi_0'(c_0) = 0.$$

Ha $\gamma = 0$, akkor a (10) alatt levő egyenletet következőképen rendezem:

$$\gamma c_s + \gamma_1 c_{s-1} + \ldots + \gamma_r c_{s-r} + \ldots + \gamma_{s_1} c_{s_1} + \varphi_{s_1-1} = 0, \quad (11)$$

$(s=n-m)$

hol

$$s_1 = \frac{s+1}{2}, \text{ (ha } s \equiv 1 \pmod 2)$$

$$s_1 = \frac{s+2}{2}, \text{ (há } s \equiv 0 \pmod 2)$$

és γ_r a $c_0, c_1, \ldots, c_r$ együtthatóknak-; φ_{s_1-1} pedig c_0, c_1, c_{s_1-1} egészszámú együtthatókkal biró függvénye.

Ha s elég nagy, akkor a γ-k mindegyike nem lehet zérus; mert különben egyenletünk azonosan zérus lenne. Legyen γ_r az első zérustól különböző γ, mit egész számnak tételezhetünk fel, minthogy $c_1, c_2, \ldots, c_r$ legkisebb közös többszörösével megszorozhathatjuk a (11) egyenlet gyökeit.

A (11) egyenlet kimondja: *hogy $\gamma_r c_{s-r}$ nevezőjében nem fordulhatnak elő olyan prímszámok, melyek $s-r$-nél alacsonyabb indexű c-k nevezőjében nem fordulnak elő.*

Az előző fejezetben megállapított módszerrel találjuk, hogy

$$\gamma_r c_{r+1},\ \gamma_r c_{r+2}^3,\ \ldots,\ \gamma_r c_{r+1}^{2^{s-1}}$$

egész számok, tehát ax $\mathfrak{B}(ax)$ együtthatói is azok, ha

$$a = \gamma_r^2.$$

Számelméleti alkalmazások. Levezetésünk nem csak Eisenstein tételének általánosítására vezető útat mutat, hanem számelméleti tételek kimondására is igen alkalmas segédeszköz; mert ha ismerem azt az egyenletet, melynek az adott raczionális együtthatókkal biró sor eleget tesz, könnyen meghatározhatom azt a számot, melylyel az általános tag együtthatóját szorozva egész számot kapok, a mivel egyszersmind oszthatósági tétel fog kiadódni.

1. Példa

$$y^n - (1+x)^r = 0$$

illetve

$$(1+x)^r y^n - 1 = 0$$

egyenletnek eleget tesz

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{\pm r}{s} x^s .$$

A jelen esetben

$$r = \varphi_0'(c_1) = n$$

tehát

$$\binom{\pm r}{s} n^{2s-1}$$

egész szám, vagyis

$$\frac{r(r \mp n)(r \mp 2n) \ldots (r \mp (s-1)n)}{1.2.3 \ldots s} n^{s-1}$$

egész szám.

2. Példa.

Jelentse $P^n(x)$ szokás szerint a következő gömbfüggvényt:

$$P^{(n)}(x) =$$

$$\frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{1.2.3 \ldots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \cdots\right)$$

Az

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a^n P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

hatványsor, melyben a a változó és x csak parameter, eleget tesz ennek az egyenletnek:

$$f \equiv (1 - xa + a^2)y^2 - 1 = 0,$$

melyben az együtthatók az x parameternek egész számú együtthatókkal biró egész függvényei.

A sor állandó tagja:

$$P^{(0)} = 1,$$

továbbá

$$r = \varphi_0'(c_0) = 2.$$

Ennélfogva

$$2^{2n-1}P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

az x-nek egész együtthatókkal biró egész függvénye.

Ha még tekintetbe vesszük, hogy $P^{(n)}(x)$ együtthatói a

$$2^n P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right)$$

együtthatóiból rendre

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$$

-nel való szorzás utján keletkeznek, kimondhatjuk, hogy

$$2^{n-1} P^n(x)$$

együtthatói egész számok.

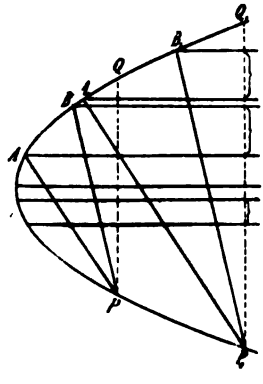
Surák József.

TÉTELEK A PARABOLÁRÓL ÉS A HIPERBOLIKUS PARABOLOIDRÓL.

1. *Ha valamely parabola két tetszés szerinti pontján P és P_1-en át a PA és P_1A_1-et egymással párhuzamosan, továbbá PQ-t és P_1Q_1-et a parabola tengelyére merőlegesen húzzuk, és ezek a parabolát másodízben az A és A_1, illetve Q és Q_1 pontokban metszik, akkor A és Q-n, valamint A_1 és Q_1-en át a parabola tengelyével párhuzamosan haladó egyenesek ugyanabban az értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők.*

Az AP és A_1P_1 húrok felező pontjai a parabola tengelyével párhuzamos egyenesben feküsznek és fél akkora távolságra vannak a tengelytől, mint az A és Q-n, valamint A_1 és Q_1-en át a tengelylyel párhuzamos egyenesek, — miből már is következik a tétel helyessége.

2. *Ha valamely parabola P, P_1 pontjain át két-két pár párhuzamos egyenest PA-, P_1A_1-et; PB-, P_1B_1-et húzunk, melyek a parabolát másodízben az A, A_1; B, B_1 pontokban metszik, akkor az A, és B-n valamint A_1 és B_1-en át a parabola tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanabban az értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők.*



Ha P illetve P_1-ből a tengelyre merőleges húrok másik végpontja Q illetve Q_1, akkor A, B, Q, valamint A_1, B_1, Q_1 pontokon át a tengelylyel párhuzamos egyenesek közül az A és Q-n illetve

A_1 és Q_1-en átmenő párhuzamosak, úgyszintén B és Q-n és B_1 és Q_1-en átmenő párhuzamosak ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők. Ebből következik, hogy A, B-n és A_1, B_1-en átmenő párhuzamosak szintén ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egymás között egyenlők.

3. *Ha valamely parabola A, B, valamint A_1, B_1 pontján át annak tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők; ha továbbá AP, BP sugarak egymást a parabola P pontjában metszik: akkor A_1, B_1 ponton át AP, illetve BP-vel párhuzamos A_1P_1, B_1P_1 sugarak P_1 metszéspontja szintén a parabolán fekszik.*

A B_1P_1 sugár metszéspontját a parabolával P_1'-nek nevezvén, ha ezen át AP-vel párhuzamos egyenes a parabolát A_1'-ben metszi, akkor A_1' és B_1-en és A és B-n át a parabola tengelyével párhuzamosan haladó egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők.

De a föltétel szerint A_1 és B_1-en illetve A és B-n át a tengelylyel párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők; ezért A_1 és A_1'-en át a tengelylyel párhuzamos egyenesek és így A_1 és A_1'; P_1 és P_1' pontok is összeesnek.

A tétel még így is fogalmazható:

3a. «*Ha valamely parabola A, B, valamint A_1, B_1 pontján át annak tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők, ha továbbá valamely APB szög csúcsa P a parabolán mozog, szárai pedig az A, B pontokon mennek át, akkor egy másik változó szög $A_1P_1B_1$ csúcsa P_1, ha A_1P_1, B_1P_1 szárai APB szög AP, BP száraival párhuzamosak, ugyanazt a parabolát írja le*».

Jegyzet. Ha az A, B, A_1, B_1 pontok ugyanazon körön feküsznek és az AB hur $= A_1B_1$ hurral, és a változó APB szög csúcsa a körön mozog, akkor a változó $A_1P_1B_1$ szög P csúcsa ugyanazt a kört irja le.

4. «*Ha A, B a p parabola két pontja; A_1, B_1 két a parabola*

síkjában, vagy egy evvel párhuzamos egyenesben a parabolán kívül fekvő pont, de A, B-n, valamint A_1B_1-en át a parabola tengelyével párhuzamos egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők; ha továbbá egy változó APB szög P csúcsa a parabolán mozog: akkor egy másik változó szög $A_1P_1B_1$, P_1 csúcsa, melynek A_1P_1, B_1P_1 szárai APB szög AP, BP száraival párhuzamosak, p parabolával kongruens parabolát ír le.»

Legyen p parabolának A_1B_1-hez párhuzamos húrja CD; ennek felezőpontja E. Rakjunk CD-re E-től mérve mindkét oldalt A_1B_1 felével egyenlő egyenesdarabot F illetve G-ig ($FE = EG = \frac{1}{2}A_1B_1$), és nevezzük az F és G-n át p parabola tengelyével párhuzamos egyenesek metszéspontját a parabolával A_1', B_1'-nek; p-nek $A_1'B_1'$ húrja párhuzamos és egyenlő A_1B_1-gyel. Ha már most a tételben kifejezett APB szög AP, BP száraival A_1', B_1'-en és A_1, B_1-en át $A_1'P_1'$, $B_1'P_1'$, illetve A_1P_1, B_1P_1 párhuzamosakat húzzuk, akkor $A_1P_1B_1$, $A_1'P_1'B_1'$ háromszögek kongruensek és így, mert a P_1' pont a p parobolát írja le (3*a*), P_1 pont egy véle kongruens paralolát fog leírni.

5 «*A hiperbolikus paraboloid metszései, a felület tengelyével és egymás között párhuzamos síkokkal, kongruens parabolák*».

Nevezzünk két, a hiperbolikus paraboloid tengelyével és egymással párhuzamos síkot ε, ε_1-nek; a felület két ugyanegy rendszerbeli alkotójának a, b-nek metszéspontját ε-nal A, B-nek; ε_1-gyel A_1, B_1-nek. Az a, b-n át az a, b, . . . alkotók vezérlő síkjával párhuzamos α, β síkok ε, ε_1-et: $|a\varepsilon|$, $|\beta\varepsilon|$, illetve $|a\varepsilon_1|$, $|\beta\varepsilon_1|$ egyenesekben metszik, melyek a hyperbolikus paraboloid tengelyével párhuzamosak, továbbá ugyanegy értelemben következnek egymásra és $|a\varepsilon|$, $|\beta\varepsilon|$ valamint $|a\varepsilon_1|$, $|\beta\varepsilon_1|$ párhuzamosak távolságai egyenlők.

a-n és a felület másik, mondjuk g rendszerbeli alkotóján átmenő síkok sora ε, ε_1-t két projektiv sugársor $\{A\}$, $\{A_1\}$ szerint metszi, melynek megfelelő A, A_1-ből kiinduló sugarai párhuzamosak; úgyszintén b-n és a g rendszerbeli alkotókon átmenő síksor met-

szése ε, ε_1-gyel, két B, B_1-ből kiinduló $\{B\}$, $\{B_1\}$ projektív sugársor lesz, megfelelő párhuzamos sugarakkal.

$\{A\}$, $\{B\}$, valamint $\{A_1\}$, $\{B_1\}$ sugársorok projektivek, ha oly sugarak tekintetnek megfelelőknek, melyek egymást a változó g rendszerbeli alkotókon metszik. A két első, valamint a két utóbbi projektív sugársor képződménye ama két parabola p, p_1, mely szerint ε, ε_1 síkok a felületet metszik, s melyeknek tengelyei a felületek tengelyével párhuzamosak. De minthogy az $\{A\}$, $\{A_1\}$ és $\{B\}$, $\{B_1\}$ sugársorok megfelelő sugarai párhuzamosak, továbbá A, B-n és A_1, B_1-en át a felület tengelyével párhuzamos $|\alpha\varepsilon|$, $|\beta\varepsilon|$ és $|\alpha\varepsilon_1|$, $|\beta\varepsilon_1|$ egyenesek ugyanegy értelemben következnek egymásra és távolságaik egyenlők: a p, p_1 parabolák kongruensek.

Klug Lipót.

A KÖRMÉRÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE.

(Nyolczadik közlemény.)

5. Ha

$$c_0=c_1=c_2=\ldots=c_n=0$$

akkor $K_m(z)$ azonosan zérus és ennélfogva $f(z)$-vel akárhányszor osztható. Ha ellenben $h(z)$ együtthatóinak más valamely értékrendszert tulajdonítunk, akkor $K_m(z)$ a z-nek legalább $(mn+m)$-ed s legfeljebb $(mn+m+n)$-edfokú függvénye, tehát az

$$f^0(z)=1,\quad f(z),\quad f^2(z).\ldots.f^{m+1}(z)$$

sorozat elemei közt okvetetlenül létezik egy oly $f^\varrho(z)$, melylyel $K_m(z)$ még osztható, de a reá következő $f^{\varrho+1}(z)$ a $K_m(z)$-ben már nem foglaltatik maradék nélkül. Határozzuk meg, hogy sorozatunkban melyik ez az elem, vagyis hogy miként választandó ρ, ha $K_m(z)$ mint $f^\varrho(z)$-nek s egy $f(z)$-vel többé nem osztható, $L_m(z)$ egész függvénynek szorzatát akarjuk előállítani.

A $K_m(z)$-t értelmező (4) alatti egyenlet ily alakban is írható:

$$K'_m(z)-K_m(z)+\frac{h(z)}{m!}f^m(z)=0.$$

Ha itt elvégezzük a

$$K_m(z)=f^\varrho(z)\,L_m(z)$$

helyettesitést és $f^{\varrho-1}(z)$-vel osztunk, akkor

$$\left[L'_m(z)-L_m(z)+\frac{h(z)}{m!}f^{m-\varrho}(z)\right]f(z)+\rho L_m(z)f'(z)=0$$

adódik ki. E szerint a

$$\rho L_m(z) f'(z)$$

szorzat $f(z)$-vel osztható lesz, minthogy pedig $f'(z)$ az $f(z)$-hez képest relativ prim függvény, egymagában $\rho L_m(z)$-nek is osztható-nak kell lennie $f(z)$-vel. Ez csak úgy lehetséges, hogy $\rho=0$; mert ha ρ nem zérus, akkor $L_m(z)$-vel együtt $\rho L_m(z)$ sem osztható $f(z)$-vel.

Ha még tekintetbe veszszük, hogy az (5) alatti egyenlet értelmében — az $f(z)$-vel való osztásnál $K_m(z)$-nek és $H_m(z)$-nek ugyanaz a maradéka van, akkor kimondható mint

I. **Segédtétel**: *Ha a*

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$$

együtthatók nem mindannyian egyenlők zérussal, akkor a $K_m(z)$ *és* $H_m(z)$ *függvények egyike sem osztható* $f(z)$*-vel.*

6. Ennek csak más alakban való fogalmazása a következő

II. **Segédtétel**: *A*

$$g_0(z, m),\ g_1(z, m),\ \ldots,\ g_n(z, m)$$

függvények egymástól lineárisan függetlenek.

Ez annyit jelent, hogy nem lehet oly

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$$

értékrendszert találni, hogy a

$$c_0 g_0(z, m)+c_1 g_1(z, m)+\ \ldots\ +c_n g_n(z, m)$$

összeg azonosan eltünnék anélkül, hogy a választott

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$$

értékek mindannyian zérusok volnának.

7. III. **Segédtétel**: *Jelentse*

$$z_0, z_1, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_n$$

az

$$f(z)=0$$

egyenletnek $n+1$ *gyökét,* δ *pedig legyen egy tetszőlegesen választott kis pozitiv szám. Akkor számtalan módon képezhető oly* $n+1$,

egész együtthatókkal bíró, legfeljebb n-ed fokú racionális egész függvény:

$$g_0(z), g_1(z), \ldots, g_\nu(z), \ldots, g_n(z)$$

úgy, hogy

$$|g_\nu(z_0)e^{z_\lambda} - g_\nu(z_\lambda)e^{z_0}| < \delta \tag{8}$$
$$(\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

és a

$$D = \begin{vmatrix} g_0(z_0) & g_1(z_0) & \ldots & g_n(z_0) \\ g_0(z_1) & g_1(z_1) & \ldots & g_n(z_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_0(z_n) & g_1(z_n) & \ldots & g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

determináns nem zérus.

Ennek bebizonyításánál induljunk ki a $K_m(z)$-t értelmező egyenletből, melyet — a $g_\nu(z, m)$-ekre való áttérést megkönnyítendő — $a_0^{m(n-1)}$-gyel szorozván, a

$$\frac{d}{dz}[a_0^{m(n-1)} K_m(z) e^{-z}] = -\frac{h(z)}{m!}[a_0^{n-1} f(z)]^m e^{-z}$$

alakban írhatunk. Bárhogyan válaszszuk is $h(z)$ együtthatóit, mindig található oly ϑ pozitiv szám, hogy a $z_0 z_1$ úton

$$|h(z) e^{-z}| < \vartheta,$$

továbbá φ alkalmas választása után ugyanazon az úton

$$|a_0^{n-1} f(z)| < \varphi,$$

tehát ugyanott

$$\frac{d}{dz}[a_0^{m(n-1)} K_m(z) e^{-z}]$$

abszolut értéke folyvást kisebb mint

$$\frac{\vartheta \varphi^m}{m!}.$$

Ha most már ε egy tetszőlegesen választott kis pozitiv számot jelent, m mindig úgy választható, hogy

$$\frac{\vartheta \varphi^m}{m!} < \varepsilon,$$

s ennélfogva — a jelen fejezet bevezetésében említett tétel értelmében —

$$a_0^{m(n-1)}[K_m(z_0)e^{-z_0}-K_m(z_1)e^{-z_1}]$$

abszolut értéke kisebb mint $\varepsilon\,|z_0-z_1|$.

Más szóval

$$\lim_{m=\infty} a_0^{m(n-1)}[K_m(z_0)e^{-z_0}-K_m(z_1)e^{-z_1}]=0,$$

s ha még $e^{z_0+z_1}$-val szorzunk, akkor

$$\lim_{m=\infty} a_0^{m(n-1)}[K_m(z_0)e^{z_1}-K_m(z_1)e^{z_0}]=0.$$

Itt

$$a_0^{m(n-1)}K_m(z_0)=a_0^{m(n-1)}H_m(z_0)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu g_\nu(z_0,m),$$

$$a_0^{m(n-1)}K_m(z_1)=a_0^{m(n-1)}H_m(z_1)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu g_\nu(z_1,m),$$

ennélfogva egyszersmind

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu[g_\nu(z_0,m)e^{z_1}-g_\nu(z_1,m)e^{z_0}]=0.$$

Minthogy ez a c_ν-k bármely választásánál így van, azért különkülön

$$\lim_{m=\infty}[g_\nu(z_0,m)e^{z_1}-g_\nu(z_1,m)e^{z_0}]=0.$$
$$(\nu=0,1,\ldots,n)$$

Ha tehát m-t egy bizonyos M-nél nagyobbra választjuk, a

$$g_0(z)=g_0(z,m),\ g_1(z)=g_1(z,m),\ \ldots,\ g_n(z)=g_n(z,m)$$

függvények mindenkor kielégítik a (8) alatti egyenlőtlenséget.

Továbbá e függvényekre nézve a D determináns nem lehet zérus. Ha ugyanis D zérus volna, akkor a

$$\begin{aligned}
&c_0g_0(z_0,m)+c_1g_1(z_0,m)+\ldots+c_ng_n(z_0,m)=0\\
&c_0g_0(z_1,m)+c_1g_1(z_1,m)+\ldots+c_ng_n(z_1,m)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_0g_0(z_n,m)+c_1g_1(z_n,m)+\ldots+c_ng_n(z_n,m)=0
\end{aligned}$$

egyenletrendszeiből

$$c_0, c_1, \ldots, c_n$$

számára oly értékek adódnának ki, hogy a

$$c_0 g_0(z, m)+c_1 g_1(z, m)+ \ldots +c_n g_n(z, m)$$

legfeljebb n-ed fokú egész függvény a

$$z_0, z_1, \ldots, z_n$$

helyek mindegyikén eltünnék s ily módon azonosan zérus volna anélkül, hogy a

$$c_0, c_1, \ldots, c_n$$

mennyiségek mindannyian zérusok volnának.

Ámde ez ellenkezik a II. segédtétellel.

8. Az imént bebizonyított kiválóan fontos tételhez képest már csak egyszerű megjegyzés szerepével bir a következő

IV. Segédtétel: *Az*

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda) \qquad (\lambda, \nu=0, 1, \ldots, n)$$

mennyiségek mindannyian algebrai egész számok.

Legyen ugyanis

$$g_\nu(z)=a_0 z^k+a_1 z^{k-1}+ \ldots +a_k$$

hol $k \leqq n$, akkor

$$a_0^k g_\nu(z_\lambda)=a_0(a_0 z_\lambda)^k+a_1 a_0(a_0 z_\lambda)^{k-1}+ \ldots +a_0 a_0^k.$$

Itt

$$a_0 z_\lambda$$

mint az

$$a_0^n f(z)=(a_0 z)^{n+1}+a_1(a_0 z)^n+a_2 a_0(a_0 z)^{n-1}+ \ldots +a_{n+1} a_0^n$$

egyenlet gyöke *algebrai egész* szám, tehát $a_0^k g_\nu(z_\lambda)$, mint ennek egész számú együtthatókkal biró egész függvénye szintén *algebrai egész* szám és a belőle a_0^{n-k}-val való szorzás útján keletkező $a_0^n g_\nu(z_\lambda)$ nem kevésbbé az.

9. **Tantétel.** *Az*

$$e^x + 1$$

függvény algebrai szám behelyettesítése után nem válhatik zérussá.

Ha x ráczionális szám, akkor $e^x + 1$ pozitiv; e tétel tehát csak irráczionális algebrai számokra bizonyitandó be.

Ha az x_1 irráczionális szám az

$$x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots + b_r = 0$$

ráczionális együtthatókkal biró egyenletnek egyik gyöke, továbbá

$$x_2, x_3, \ldots, x_r$$

ugyanennek az egyenletnek többi gyökei, akkor tételünk értelmében az

$$(e^{x_1} + 1)\ (e^{x_2} + 1) \ldots (e^{x_r} + 1)$$

szorzat nem lehet zérus. Fordítva ha e szorzatról sikerül kimutatni, hogy — bármely ráczionális együtthatókkal biró másod vagy magasabb fokú egyenlet gyökeire vonatkozólag képezzük is — mindenkor a zérustól különböző értéke van, akkor ezzel együtt a szóban forgó tétel is be van bizonyitva.

A vizsgálandó szorzat egyenlő az

$$1 + e^{x_1} + \ldots e^{x_r} + e^{x_1+x_2} + \ldots + e^{x_{r-1}+x_r} + \ldots + e^{x_1+x_2+\ldots+x_r}$$

összeggel, vagy röviden

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} (e^{x_\lambda} + 1) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} e^{z_\lambda},$$

hol a jobb oldalon álló összeg mindama kitevőkre vonatkozik, melyek a

$$z_\lambda = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_r x_r$$

képletből akként keletkeznek, hogy

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$$

helyébe a 0 és 1 minden lehető r-edosztályú variációját helyettesítjük.

Ezeknek száma $p = 2^r$.

A $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}$ számok közül az egymástól különbözők legyenek

$$z_0=0, z_1, \ldots, z_n.$$

Itt n nem lehet zérus, mert 0-on kívül legalább a tőle különböző x_1 szintén e sorozatba tartozik.

E számokhoz mindig található oly egész számú együtthatókkal bíró $(n+1)$-sőfokú ráczionális egész függvény

$$f(z)=a_0z^{n+1}+a_1z^n+\ldots+a_{n+1},$$

melynek ezek épen zérus-helyei.

Ugyanis a

$$\prod_{\lambda=0}^{p-1}(z-z_\lambda)=\prod_{\lambda=0}^{p-1}(z-\varepsilon_1x_1-\varepsilon_2x_2-\ldots-\varepsilon_rx_r)$$

szorzat mint z-nek oly $\psi(z)$ egész többtagúja fejezhető ki, melyben az együtthatók $x_1, x_2, \ldots, x_r$ szimmetrikus függvényei, tehát raczionális számok. Ha e $\psi(z)$-t elosztjuk $\psi'(z)$-vel való legnagyobb közös osztójával, akkor a nyert hányados z-nek oly $(n+1)$-sőfokú egész függvénye, melynek épen

$$z_0=0, z_1, \ldots, z_n$$

a zérus-helyei. A keresett $f(z)$ ebből úgy adódik ki, hogy alkalmas egész számmal való szorzás segítségével az együtthatókban esetleg fellépett nevezőket eltávolítjuk.

Erre az $f(z)$ függvényre fogjuk most már a III. segédtételt alkalmazni. A benne szereplő δ-t úgy választjuk, hogy

$$(p-1)a_0^n\delta<1.$$

Az ott előírt módon képezett

$$g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$$

függvényekre vonatkozó (8) alatti egyenlőtlenségek a következő egyenletekkel pótolhatók

$$a_0^n g_\nu(0)e^{z_\lambda}-a_0^n g_\nu(z_\lambda)=\delta_{\lambda\nu}$$

$(\lambda, \nu=0, 1, \ldots, n).$

hol

$$|(p-1)\delta_{\nu\lambda}|<1$$

és különösen

$$d_{\nu,0}=0.$$

Ha $p<n$, akkor a

$$z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{p-1}$$

számok mindegyike a

$$z_0=0, z_1, \ldots, z_n$$

valamelyikével egyenlő, ennélfogva az előbbi egyenletrendszer így is kibővíthető:

$$a_0^n g_\nu(0) e^{z_\lambda} - a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \delta_{\nu\lambda}$$
$$\binom{\lambda=0, 1, \ldots, p-1}{\nu=0, 1, \ldots, p-1}.$$

Ezek közül az egyenletek közül az ugyanazon ν-re vonatkozókat összeadjuk. Az így nyert

$$a_0^n g_\nu(0) \sum_{\lambda=0}^{p-1} e^{z_\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{p-1} \delta_{\nu\lambda}$$

egyenletben

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{p-1}\delta_{\nu\lambda}\right| \leqq \sum_{\lambda=0}^{p-1}|\delta_{\nu\lambda}|<1,$$

tehát

$$\left| a_0^n g_\nu(0) \prod_{\lambda=1}^{r}(e^{z_\lambda}+1) - \sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)\right|<1.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek értelmében annak kimutatására, hogy

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(e^{z_\lambda}+1)$$

nem lehet zérus, elég lesz arról meggyőződni, hogy az

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)\right|<1 \tag{9}$$

egyenlőtlenség nem állhat fenn ν minden értékénél. Erre a IV. segédtétel és a III.-nak még fel nem használt része fog szolgálni.

A IV. segédtétel értelmében az

$$a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

mennyiségek algebrai egész számok s ennélfogva a

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda)$$

értéke is algebrai egész szám. Másrészt ez az összeg, mint a z_λ-k szimmetrikus függvénye, ráczionális szám. Mindkét megjegyzést összefoglalva, a vizsgált összeg *ráczionális egész* szám, minélfogva a (9) alatti egyenlőtlenség a

$$\sum_{\lambda=0}^{p-1} a_0^n g_\nu(z_\lambda) = 0$$

egyenletet vonná maga után. Ha itt még az egyenlő értékű z_λ-kat tartalmazó tagokat összevonjuk, akkor

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \beta_\nu g_\nu(z_\lambda) = 0$$

alakú egyenletet nyerünk, hol a β_ν-k pozitiv egész számok (t. i. az a_0 pozitiv egész szám bizonyos hatványainak összegei). De ily egyenlet nem állhat fenn ν minden értékénél, mert különben a $g_\nu(z_\lambda)$-k determinánsa zérus lenne, a mi a III. segédtétellel ellenkeznék.

8. A bebizonyított tantétel közvetlen *folyománya*, hogy:

A ludolfi szám nem lehet algebrai szám.

Ha ugyanis π algebrai szám volna, a belőle s az i algebrai számból képezett πi szorzat szintén algebrai szám volna, tehát a bebizonyított tantétel értelmében

$$e^{\pi i} + 1$$

nem lehetne 0, pedig valójában az.

9. *Általánosítások.* LINDEMANN értekezése a kitevős függvényre vonatkozólag még jóval általtalánosabb tételeket is tartalmaz, melyeket WEIERSTRASS szintén bebizonyított.

A legáltalánosabb tétel e téren a következő:

Legyen

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

r egymástól különböző algebrai szám és

$$X_1, X_2, \ldots X_r$$

oly r tetszőleges algebrai szám, melyek közül legalább egy nem zérus. Ekkor az

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} + \ldots + X_r e^{x_r} = 0$$

egyenlet nem állhat fenn.

E tétel messze túl vezet a körmérés elméletén, s azért bebizonyítását itt nem nyújthatjuk. Legyen elég a következő folyományait említenünk:

a) Ha $r = 2$,

$$x_1 = x, \qquad x_2 = 0$$
$$X_1 = -1, \qquad X_2 = X$$

akkor az

$$e^x = X$$

egyenletben x és X nem lehetnek egyszerre algebrai számok.

Ha x algebrai szám, az e^x kitevős függvény értéke csak az esetben lehet algebrai szám, mikor

$$x = 0.$$

Ha X algebrai szám, akkor természetes logarithmusa csak az esetben lehet algebrai szám, ha $X = 1$.

b) Legyen $r = 3$

$$x_1 = \frac{xi}{2}, \quad x_2 = -\frac{xi}{2}, \quad x_3 = 0,$$

$$X_1 = i, \qquad X_2 = -i, \qquad X_3 = X,$$

akkor

$$X_1 e^{x_1} + X_2 e^{x_2} = -2 \sin \frac{x}{2},$$

ennélfogva a

$$2 \sin \frac{x}{2} = X$$

egyenletben x és X nem lehetnek egyidőben algebrai számok, kivéve persze az

$$x = X = 0$$

esetet.

Ez annyit jelent, hogy az egység sugarú körben *valamely ív és annak húrja nem lehetnek egyszerre algebrai számok.*

Kürschák József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

18. *Minő görbét ad a*

$$\sin^2 \pi x . \sin^2 \pi y = 1$$

egyenlet? (König.)

Első megoldás Csillag Vilmos főreáliskolai h. tanár úrtól Budapesten.

Az adott egyenlet a következőképen írható:

$$(\sin \pi x \sin \pi y - 1)(\sin \pi x \sin \pi y + 1) = 0.$$

Tehát vagy

$$\sin \pi x \sin \pi y = 1,$$

vagy

$$\sin \pi x . \sin \pi y = -1.$$

Valós szám sinusa absolut értéke nem lehet nagyobb egynél; ennélfogva könnyű látni, hogy transzczendens egyenleteink valós megoldásaira vonatkozólag, külön-külön

$$\begin{matrix} \sin \pi x = \pm 1 \\ \sin \pi y = \pm 1 \end{matrix} \quad \text{illetőleg} \quad \begin{matrix} \sin \pi x = \pm 1 \\ \sin \pi y = \mp 1, \end{matrix}$$

a miből

$$\begin{matrix} \pi x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \pi y = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \end{matrix} \quad \text{illetőleg} \quad \begin{matrix} \pi x = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \pi y = \mp \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \end{matrix}$$

hol n e kifejezések mindegyikében egészen tetszőleges egész számot jelent és így a görbe valós része csupán az

$$\begin{matrix} x = \pm \frac{1}{2} + 2n \\ y = \pm \frac{1}{2} + 2n \end{matrix} \quad \text{illetőleg} \quad \begin{matrix} x = \pm \frac{1}{2} + 2n \\ y = \mp \frac{1}{2} + 2n \end{matrix}$$

számpárok meghatározta pontok rendszeréből áll.

*

Második megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A feladatban foglalt egyenletet az

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{2} + 2k_1 \\ y &= \pm\frac{1}{2} + 2k_1' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{2} + 2k_2 \\ y &= \mp\frac{1}{2} + 2k_2' \end{aligned}\right\}$$

(k_1, k_1', k_2, k_2' egész számok)

értékrendszerek meghatározta pontok rendszere elégíti ki.

E pontrendszer bármely pontjában az y függvény akármelyik ágára nézve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

míg a harmadrendű differenciálhányadosok a zérustól különbözők; úgy hogy a talált valós pontrendszer pontjai függvénytani szempontból oly viselkedésüek mint valós görbének forduló pontjai.

*

Ugyan e feladat megoldását beküldték még: Fuchs Károly *főgimn. tanár úr Pancsováról,* Csehély Adolf *főgimn. tanár úr Trsztenáról,* Grünwald István *áll. középipariskolai tanár úr Budapesten és* Csorba György *tanárjelölt úr Budapesten.* Szerk.

FELADATOK.

27. Képzeljük a forgó földet geometriai gömbnek. Az æquatoron egy tömegpont bizonyos irányban, bizonyos sebességgel elindíttatik. Határoztassék meg e pont mozgása a föld felületén, ha surlódás nincsen. Fuchs.

28. Egy homogén növényi gömb (burgonya, tök, narancs) úgy nő, hogy valamely A anyag (pl. oxygen) kívülről a felületen át egészen a középpontig bediffundál. Az A anyagból egy bizonyos pontban időegységenként fogyasztott mennyiség arányos az A anyagnak ezen pontbeli sűrűségével (ρ). Határoztassék meg ezen sűrűség, mint a középponttól mért r távolság functiója. Fuchs.

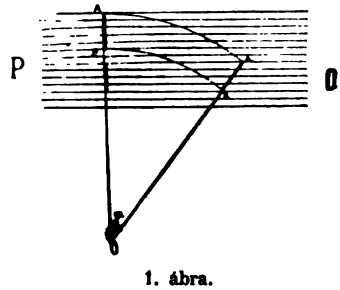
ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

A Gramme-féle gyűrű elmélete.*

A GRAMME-féle gyűrű — s általában az inductiós gépek elmélete — úgy érthető meg legjobban, ha fejlődését első feltűnésétől kezdve követjük. Midőn FARADAY az inductiót felfedezte, arra törekedtek, hogy folytonos áramok előállítására értékesítsék. A törekvésnek csakhamar sikere is volt, a mennyiben nemsokára az inductió felfedezése után PIXII és STÖHRER megszerkesztették ismeretes mágnes-elektromos gépeiket. Az utóbbinak gépében aczél-mágnes sarkai előtt két orsó forog s a bennök indukált váltakozó áramot a kommutátor egyirányú árammá változtatja át. A gép szolgáltatta áram természetéről jó fogalmat nyerünk, ha mindenek előtt azt az egyszerű esetet veszszük szemügyre, melyben egy menetből álló zárt vezető mozog homogén mágneses térben.



1. ábra.

Jelezze PQ vonalrendszer (1. ábra) a homogén mágneses tér erővonalait, melyben O pont körül AB zárt vezető forog. A legtöbb erővonal akkor fog a vezetőn áthaladni, midőn síkja merőleges az erővonalak irányára; ha ezen maximális értéket N_0 fejezi ki, úgy a vezető bármely helyzetében a rajta átmenő erővonalak száma ebből az értékből könnyen meghatározható. Ha ugyanis a vezető A_1B_1-be jutott és síkja AB-vel, illetőleg a tér normalis síkjával α szöget zár be, akkor A_1B_1-en ugyanazon erővona-

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat f. é. márczius 1-én tartott rendes ülésén.

lak mennek át, mint a normalis síkra való vetületén; ha ez utóbbiak számát N jelöli, lesz

$$N = N_0 \cos a = FH \cos a$$

hol F a vezető által bezárt felület, H pedig a mágneses tér intenzitása. Ebből az egyenletből az indukált elektromotoros erő nagyon egyszerűen kiadódik, mert hiszen arányos az erővonalak számának változásával, vagyis

$$E = -\frac{dN}{dt} = N_0 \sin a \frac{da}{dt}$$

s ha a vezető másodperczenként n fordulatot tesz, a szögsebesség

$$\frac{da}{dt} = 2\pi n$$

tehát

$$E = E_0 \sin a,$$

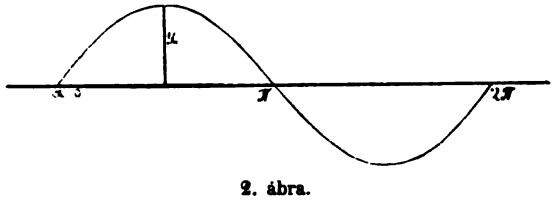
hol

$$E_0 = 2\pi n FH,$$

vagyis az elektromótoros erő maximális értéke. Ha továbbá a vezető ellenállása R, úgy az áram intenzitása

$$I = \frac{E_0}{R} \sin a = I_0 \sin a.$$

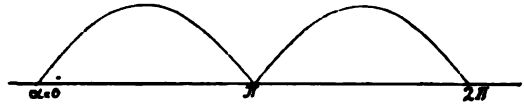
A homogén mágneses térben forgatott zárt vezetőben tehát változó és váltakozó irányú áram keletkezik, mely legnagyobb értékű akkor, midőn a vezető síkja párhuzamos az erővonalakkal. A derékszögű coordináta rendszer egyik tengelyére a, másikára pedig I értéket rávezetvén, az ismeretes hullám vonalat kapjuk az áram intenzitásának változását feltüntető görbe gyanánt (2 ábra).



2. ábra.

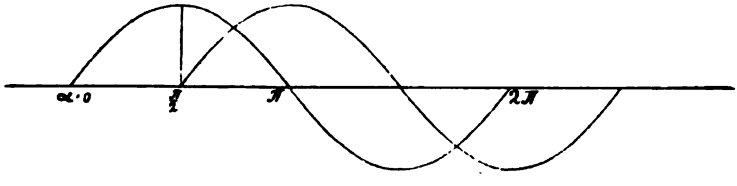
A Stöhrer-féle gépen két orsó van, melyek 180°-nyira állanak egymástól; ezek egyszerű pachytrop révén vagy egymás mellé, mint a Gramme-féle gyűrűn, vagy pedig egymásután kapcsolhatók. Noha a mágneses tér, melyben az orsók mozognak, nem homogén, mégis bármely kapcsolási mód eseté-

ben az indukált elektromótoros erő változását a 2-ik ábrában rajzolthoz hasonló görbe fogja feltüntetni. Az orsókban haladó áramot a kommutátor egyirányúvá változtatja, mely azonban korántsem állandó, hanem erősen lüktető, mint azt a 3. ábrában rajzolt áramgörbe mutatja. Ugyanily áramot ad a



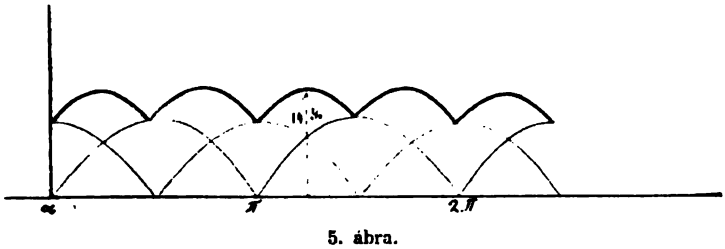
3. ábra.

Siemens-féle kettős T alakú dobbal biró gép. Ily lüktető áramnak sok rosz oldala van s ezért a lüktetések nagyságának csökkentésére törekedtek, oly módon, hogy az orsók számát szaporították. Ezzel azonban nemcsak az áramok



4. ábra.

száma, hanem a lüktetések száma is növekszik, de legalább el van érve az, hogy a lüktetések ereje csökken. Igy például ha négy orsó van a tengely körül szabályosan elosztva és az ezekben indukált két váltakozó áramot

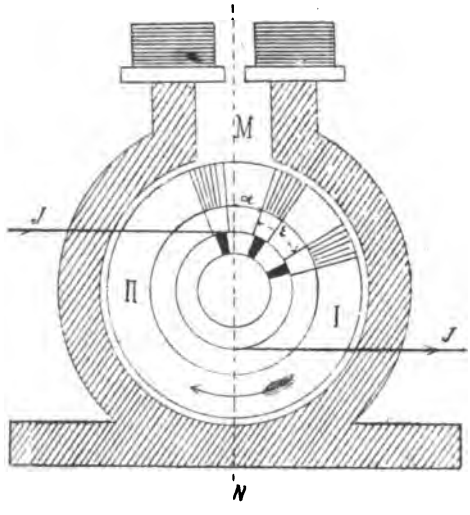


5. ábra.

(4 ábra) külön-külön kommutátor egyirányú árammá változtatja át s azután közös áramkörben egyesíti, az intenzitás görbéjéül az 5-ik ábrában rajzolt vonalat kapjuk. Előbbi esetben az intenzitás O és J_0 határok között változott, most pedig J_0 és $\sqrt{2}.J_0$ között, a lüktetések ereje tehát csökkent, de

számuk megkétszereződött. Az orsók számának szaporítása a GRAMME-féle gyűrűre és a SIEMENS-féle dobra vezetett; az első a STÖHRER-féle szerkezet, a második a kettős T dob általánosítása.

A GRAMME-féle gyűrűn $2k$ számú orsó van a tengely körül szabályosan elhelyezve. Ha ezek egymással ϵ szöget zárnak be (6. ábra) s a gyűrű I-el jelölt, a normális síktól jobbra eső részében az első orsó ezen síkkal α szöget zár be, természetes, hogy valahányszor ezen orsó helyébe bármely másik lép, az orsók elhelyezkedése MN sík körül ugyanaz, mint a milyen előbb volt. Annyit tehát már előre is látható, hogy ha az áram intenzitása változnék is, valahányszor más orsó jut az előbb elsőnek nevezett helyére, az



6. ábra.

intenzitásnak is ugyanazt az értéket kell fölvennie. Vizsgáljuk tehát az áram intenzitásának változását α=o és ϵ határok között. Ha a külső áramkör ellenállása R, a benne keringő áram intenzitása J, az orsók száma $2k$ s egy-egynek ellenállása r, akkor

$$J + i_2 = i_1, \quad E_1 + E_2 = (i_1 + i_2)\, kr = o$$
$$J R + i_1\, kr = E_1,$$

hol i_1 i_2 és E_1 E_2 a GRAMME-féle gyűrűnek a normális síktól jobbra és balra fekvő részeiben keringő áramok intenzitásait, illetőleg az indukált elektromótoros erőket jelentik. Mivel

$$J = 2\, i_1$$

következik, hogy

$$J = \frac{E_1}{R + \frac{1}{2} k r},$$

hol E_1 még meghatározandó. A H intenzitású térben az m menetből álló orsóban indukált elektromótoros erő abban a pillanatban, melyben az orsó α szöget zár az MN síkkal

$$E_\alpha = F_0 \sin \alpha,$$

hol

$$E_0 = 2\pi mn.\ FH;$$

összeadván már most az MN síktól balra eső orsókban indukált elektromótoros erőket, megkapjuk az eredő elektromótoros erőt, melynek értéke

$$E_1 = E_0 \left\{\sin \alpha + \sin (\alpha + \varepsilon) + \ldots + \sin (\alpha + [k-1]\,\varepsilon)\right\}$$

s mivel $k\,\varepsilon = \pi$

$$E_1 = E_0 \frac{\cos (\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$$

Ez a kifejezés mutatja, hogy az elektromótoros erő α-val változtatja értékét és pedig

$$\alpha = o\text{-ra} \qquad E_1 = E_0 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\text{-ra} \qquad E_1 = E_0 \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$\alpha = \varepsilon\text{-ra} \qquad E_1 = E_0 \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

tehát akkor éri el legnagyobb értékét, ha az orsó középpontja MN síkon halad át ($\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon$). Az öninductió hatását is számba vevén arra az eredményre jutunk, hogy az áram intenzitásának maximuma MN síktól $\frac{1}{2}\,\varepsilon$-nál messzebb esik; ezért az egyenes áramú dinamokon a söprűk nem is állanak merőlegesen az MN síkra. Mivel továbbá minden fordulatnál $2k$ orsó halad át az MN síkon, E_1-nek is ugyanannyi maximuma van. A Gramme-féle gyűrűben indított áram tehát szintén lüktető s a lüktetések annál szaporábbak — de egyúttal gyengébbek is — mennél nagyobb az orsók száma. Ha a gyűrű menetei egyetlen önmagába zárt drótból vannak készítve, melynek egyenlő távolságban fekvő pontjaiból elágazások indulnak a kollektorhoz, akkor az eredmény akként is kifejezhető, hogy a lüktetések szaporasága a kollektor lemezeinek számától függ. Ha az elágazások száma nagy, akkor

$$\cos \tfrac{1}{2}\varepsilon = 1,\ \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon,\ \varepsilon = \frac{\pi}{k}$$

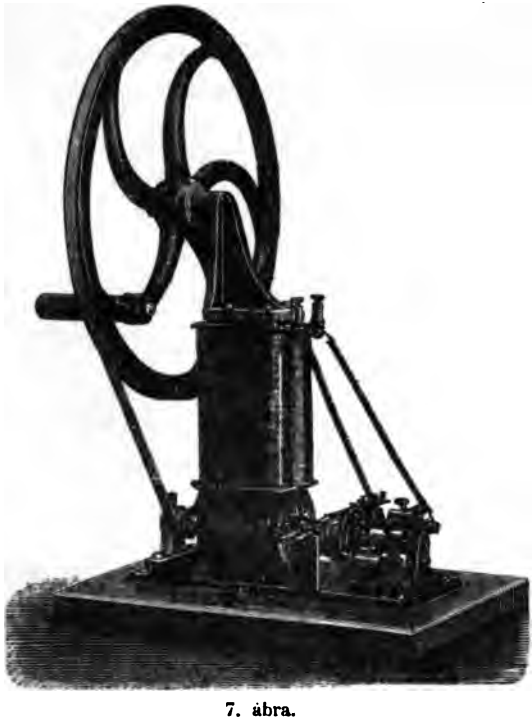
és

$$E_1 = 4\,mnk\,.\,FH,$$

az áram intenzitása pedig

$$J = \frac{4mnk \,.\, FH}{R + \frac{1}{2} kr}$$

A SIEMENS-féle dob a GRAMME-féle gyűrűtől csak abban különbözik, hogy egyes menetei sokkal nagyobb felületűek, tehát a mágneses teret jobban használják ki, mint a gyűrű menetei.

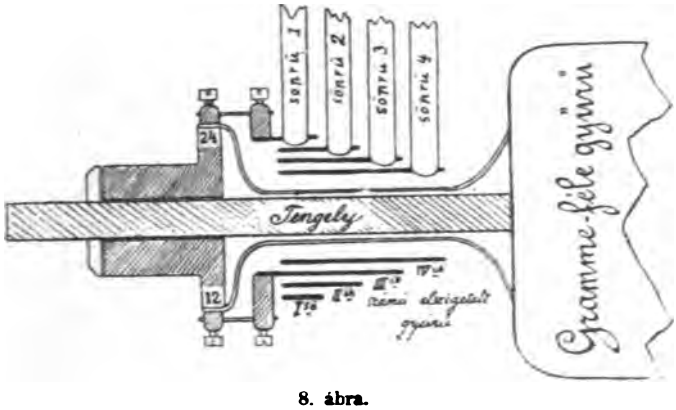


7. ábra.

Midőn FERRARIS a forgó mágneses teret felfedezte, ennek előállítására szükséges, fázisában 90°-al eltólt két váltakozó áramot úgy állította elő, hogy az egyszerű váltakozó áramot elágaztatta s egyik ágban nagy öninductió segítségével az áramot fázisában eltólta. Hasonló módon járt el TESLA a forgó mágneses téren alapuló kétfázisú mótorának hajtásánál, melyben azonban egyrészt az öninductió, másrészt pedig nagy ellenállás bekapcsolása miatt az energia nagy része kárba veszett. A több fázisú mótorok ez okból nem is hódítottak tért mindaddig, míg csak BRADLEY fel nem fedezte, hogy lehet fázisban eltólt váltakozó áramokat közvetlenül, gépek-

kel előállítani. BRADLEY ugyanis kimutatta, hogy a GRAMME-féle gyűrűből nemcsak egyirányú áram, hanem egyszerű vagy több fázisú váltakozó áram is elvezethető, következő módon. A gyűrű egymástól 180°-nyira elálló pontjaiból elágazást létesítvén s ezeket a tengelyre erősített két gyűrűvel kapcsolván össze, a honnét sõprűk vezetik el az áramot, akkor utóbbiakba kapcsolt áramkörben váltakozó áram halad; ha pedig egymástól 120°-nyira eső három pontból létesítünk elágazást az imént emlitett módon, úgy a vezetésben három fázisú áram jön létre.

BRADLEY ezen megjegyzése alapján iskolai czélokra egy kézi dinamót szerkesztettem, melynél főelv gyanánt azt tűztem ki, hogy lehetőleg sokféleképen legyen használható. Az EDISON-féle dinamók alakjára épült gép (7. ábra) elektromágnesei között forog a GRAMME féle gyűrű, melynek ten-

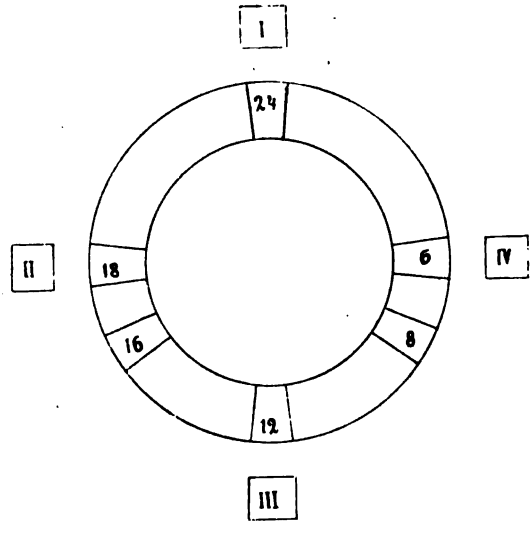


8. ábra.

gelyére a kommutátoron kivül négy egymástól elszigetelt sárgaréz gyűrű van erősítve; mindegyikéből egy-egy sõprű vezeti el az áramot (8. ábra). A kommutátor 24 lemezből áll, melyek közül a *6, 8, 12, 16, 18* és a *24*-ik szorító csavarokkal van ellátva, a *6, 12, 18* és *24*-ik lemez mögött van a négy gyűrű szorító csavarja (9. ábra) és pedig a 24-es számú mögött az első, a 6-os mögött a negyedik, a 12-es mögött a harmadik s végre a 18 mögött a második gyűrűé. A gép működése már most a következő. A gép tengelyét forgatván, a kollektor sõprűiből elvezethetünk egyirányú áramot, mely részben a gép mágnesezésére fordíttatik, miért is a sõprük állandóan közlekednek az elektromagnessel, részben pedig a külső áramkörben vízbontásra, mágnesezésre, izzó lámpák táplálására, vagy más motor, pl. kis elektromos vasút hajtására fordítható. Ha ezenfelül a 24-es lemezt I-el, a 12-est a III-as gyűrűvel kapcsoljuk össze, ezen áram körében

$$J = J_0 \cos a$$

alakú váltakozó áram halad. Ennek kimutatására tegyük föl, hogy a 24-ik lemezzel összekapcsolt menet, melyet 10-ik ábrán A-val jelöltünk, MN síkkal α szöget, két egymásra következő menet pedig ε szöget zár be. Az ábrán könnyebb áttekinthetés czéljából a külső áramkörbe vezető elágazások a GRAMME-féle gyűrű meneteiből, nem pedig a kollektorból kiinduló lag vannak rajzolva. Ha a külső áramkör ellenállása R, a benne keringő



9. ábra.

áram intenzítása J, a gyűrű ACB felében az elektromótoros erő E_1 az áram intenzítása i_1; BDA részben pedig E_2 és i_2, akkor

$$J + i_2 = i_1, \quad E_1 + E_2 = (i_1 + i_2)\, mr = o,$$

$$JR + i_1\, mr = E_1,$$

mely egyenletekből

$$J = \frac{E_1}{R + \frac{1}{2} mr},$$

hol m a gyűrű felén levő menetek számát, r pedig egy menet ellenállását jelenti. Mivel a menetek egymástól ε szöggel állanak el, a bennök indukált elektromótoros erők egy és ugyanazon pillanatban szintén ε szöggel fognak fázisban különbözni s így ACB részben az összes elektromótoros erő

$$E_1 = E_0 \{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varepsilon) + \ldots + \sin(\alpha + [m-1]\, \varepsilon)\}$$

vagyis

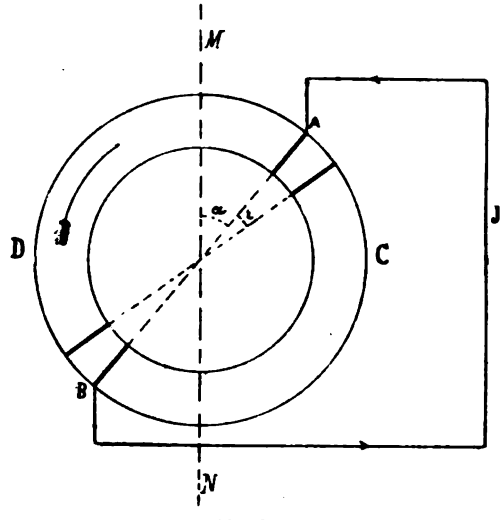
$$E_1 = E_0 \frac{\cos(a - \frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon},$$

hol a most 0-tól 2π-ig növekszik. Ha a menetek száma nagy, akkor

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{2m}$$

és

$$E_1 = \frac{2m}{\pi} E_0 \cos(a - \tfrac{1}{2}\varepsilon)$$



10. ábra.

Ez az eredmény mutatja, hogy a váltakozó áram nem akkor éri el legnagyobb értékét, mikor A menet az MN síkban van, hanem mikor $\frac{1}{2}\varepsilon$ szöggel túl van rajta. Mivel ε igen kicsi, felvehető, hogy az elektromindító erő legnagyobb értekeit akkor éri el, midőn A menet az MN síkon halad át, hogy tehát

$$E_1 = 4mn \,.\, FH \cos a$$

és az ezen erő által tovavezetett áram

$$J = \frac{4mn \,.\, FH}{R + \frac{1}{2}mr} \cos a.$$

Az eddigi tárgyalásban föltételeztük, hogy a gyürün csak egy sora van a meneteknek; ezt a föltevést a következőkben is megtartjuk. Ha több sor

menet van, F az egymás fölött levő vagyis azon menetek által bezárt felületek összességét jelenti, melyek MN síkkal ugyanazt a szöget zárják be, r pedig ezek ellenállása.

Ha a gép által adott váltakozó áramot Hoffman-féle vízbontón vezetjük at. mindkét csőben egyenlő mennyiségű durranó gáz keletkezik; vagy egy kisebb fajta inductió készülék primär tekercsébe vezetve, a nagy feszültségű transzformált áram fiziologiai hatása révén jelentkezik

Használható izzólámpák táplálására is.

Az előbbi kapcsolást meghagyván s azonfelül a 6-os számú lemezt a negyedik, a 18-as számút a második gyűrűvel kötvén össze, akkor a I—III és II—IV-be kapcsolt áramkörök mindegyikében váltakozó áram kering, melyek azonban egymás iránt fázisukban 90°-al vannak eltólva, vagyis ha I—III áramkörében

$$J_1 = S_0 \cos \alpha$$

áram halad, akkor II—IV-ben az áram

$$J_2 = S_0 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ily áramokat kétfázisú vagy forgató áramnak, ujabban pedig bizonyos kapcsolási mód esetében négyfázisú áramnak is nevezik.

Jelöljük az A-val jelölt menet és az MN sík által bezárt szöget α-val, az egymásra következő körnegyedekben, melyek mindegyikében m menet van (11-ik ábra), az intenzitások értékeit i-vel — a körnegyed számát megfelelő index jelzi —, akkor

$$J_1 + i_1 = i_2, \quad J_2 + i_2 = i_3$$
$$i_3 = J_1 + i_4, \quad i_4 = J_2 + i_1$$
$$E_1 + E_2 = (i_1 + i_2 + i_3 + i_4)\, mr = 0$$
$$(i_2 + i_3)\, mr + J_1 R = E_1$$
$$(i_3 + i_4)\, mr + J_2 R = E_2,$$

hol E_1 és E_2 a II és III, illetőleg a III és IV részekben működő elektromotoros erők összegét jelentik, ezen egyenletek a külső áramkörökben haladó áramok erősségeül következő értékeket adják:

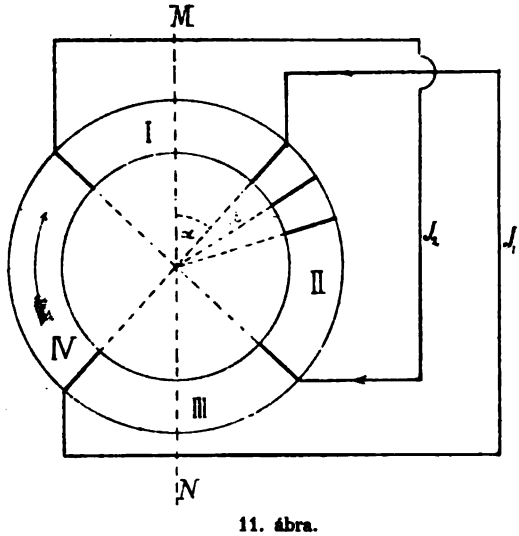
$$J_1 = \frac{E_1}{R + mr}$$
$$J_2 = \frac{E_2}{R + mr};$$

az ezekben előforduló

$$E_1 = E_0\{\sin\alpha + \sin(\alpha+\varepsilon) + \ldots + \sin(\alpha+[m-1]\varepsilon)\}$$

$$E_2 = E_0\Big[\sin\Big(\alpha+\frac{\pi}{2}\Big) + \sin\Big(\alpha+\frac{\pi}{2}\varepsilon\Big) + \ldots + \sin\Big(\alpha+\frac{\pi}{2}+[m-1]\varepsilon\Big)\Big]$$

elektromótoros erők közül az első ugyanakkora értékű, mint a mely előbb az egyszerű váltakozó áram számára adódott ki; a második pedig az elsőből úgy keletkezik, hogy ebben α helyébe $\alpha + \frac{\pi}{2}$-et írunk, úgy hogy



11. ábra.

$$E_2 = E_0\frac{\cos(\alpha-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}$$

$$E_1 = E_0\frac{\sin(\alpha-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}$$

s ha tekintetbe veszszük, hogy ε nagyon kicsi és

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{4m},$$

akkor

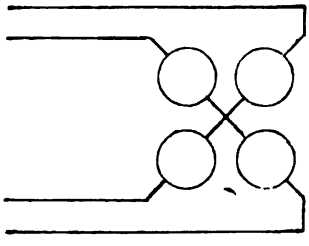
$$E_1 = 8mn\,.\,FH\cos\alpha$$
$$E_2 = 8mn\,.\,FH\sin\alpha$$

s így

$$J_1 = J_0 \cos \alpha, \quad J_2 = J_0 \sin \alpha,$$

hol

$$J_0 = \frac{8mnFH}{R + mr}$$



12. ábra.

Ezekkel az áramokkal *forgó mágneses tér* állítható elő, hajtható a Tesla-féle motor (lásd a II. kötet 292. oldalán a 8-ik ábrát) s megvilágítható egy rendszer izzólámpa, melyek kapcsolási módját a 12-ik ábra mutatja. Ha pedig rendelkezésünkre áll kétfázisú áram s ezt a gépbe vezetjük, a gép forgásba jön és kétfázisú mótorként működik.

Ha a GRAMME-féle gyűrűből háromfázisú áramot akarunk kapni, egymástól 120°-nyira eső pontjaiból létesítünk elágazást, tehát összekötjük a 24-es lemezt az első, a 16-ost a második, a 8-ast pedig negyedik gyűrűvel s akkor az első gyűrűből kiindul

$$J_1 = S_0 \cos \alpha,$$

a másodikból

$$S_2 = J_0 \cos (\alpha + 120°),$$

a harmadikból pedig

$$J_3 = J_0 \cos (\alpha + 240°)$$

alakú áram. Ha a külső áramkör az elágazási ponttól a közös C pontig (13. ábra) számított darabjának ellenállása R, akkor

$$i_1 + J_1 = i_2, \quad i_2 + J_2 = i_3, \quad i_3 + J_3 = i_1$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = (i_1 + i_2 + i_3)\, mr = 0$$

$$J_1 R + i_2 mr - J_2 R = E_2$$
$$J_2 R + i_3 mr - J_3 R = E_3$$
$$J_3 R + i_1 mr - J_1 R = E_1$$

hol m a gyűrű meneteinek harmadrészét, J_1, J_2, J_3 a külső vezetékekben tovahaladó áramnak intenzitásait, a többi mennyiségek az egyes körharmadokra vonatkozó adatokat jelentik, már előbb megállapított értelmezéssel.

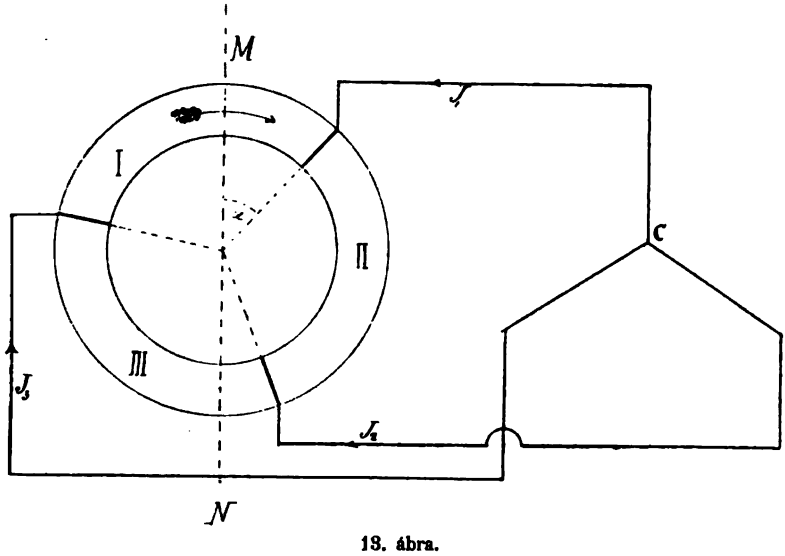
Az első három egyenlet összeadásából s a negyedik tekintetbe vételével nyerjük, hogy

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0;$$

s ennek segítségével a többiekből nyert

$$J_1 = \frac{E_2 - E_1}{3R + mr}$$
$$J_2 = \frac{E_3 - E_2}{3R + mr}$$
$$J_3 = \frac{E_1 + E_3}{3R + mr}$$

megoldások számlálói egyszersmind elárulják az előbbi egyenletek egyszerű megoldási módját. Annak kimutatására, hogy ez áramok fázisban el vannak tólva, számítsuk ki az elektromótoros erőket; ugyanis



18. ábra.

$$E_2 - E_1 = E_0 \{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varepsilon) + \ldots + \sin(\alpha + [m-1]\varepsilon)\}$$
$$- E_0 \{\sin(\alpha + 240°) + \ldots + \sin(\alpha + 240° + [m-1]\varepsilon)\}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon} E_0 \{\sin + (\alpha \tfrac{1}{2}[m-1]\varepsilon) - \sin(\alpha + 240° + \tfrac{1}{2}[m-1]\varepsilon)\}$$

s ha tekintetbe veszszük, hogy $m\varepsilon = 120°$ és

$$\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\pi}{3m}$$

akkor

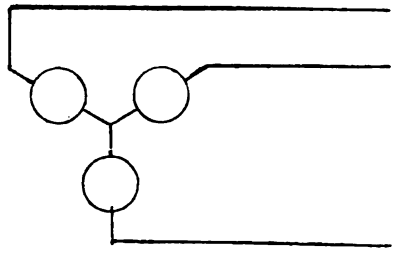
$$E_2 - E_1 = \frac{9mE_0}{\pi} \cos \alpha.$$

Fölírván $E_3 - E_2$ és $E_1 - E_3$ értékeit, közvetlenül láthatjuk, hogy azok az előbb levezetettből keletkeznek, ha egyenletében α helyébe $\alpha + 120°$, illetőleg $\alpha + 240°$ iratik. A három áramot tehát az előbb fölírt egyenletek határozzák meg, ha bennük

$$J_0 = \frac{9mn.FH}{3R + mr}$$

helyettesítést eszközöljük.

Ez áramok hajtják a FERRARIS- és a DOBROVOLSKY-féle mótorokat (lásd 2 kötet 294-ik oldalán a 11-ik és 292. oldalán a 9-ik ábrát), vagy meg-



14. ábra.

világítanak egy izzólámpa rendszert, melyek kapcsolás módját a 14-ik ábra tünteti fel. Ha a kétfázisú áram esetében a gépből kiinduló négy sodronyt úgy kapcsoljuk össze egy közös C pontba, mint azt a három fázisúnál tettük, akkor az ezen sodronyokban haladó áramok négyfázisú áramot alkotnak vagyis olyanokat, melyek fázis különbsége 90°.

Grúber Nándor.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

VÁLASZTMÁNYÁNAK F. É. JUNIUS HÓ 22-IKÉN TARTOTT ÜLESÉRŐL.

Jelen vannak: BEKE MANÓ, FRÖHLICH IZIDOR, GRÚBER NÁNDOR, HELLER ÁGOST, KLUPÁTHY JENŐ, MAURITZ REZSŐ, RÉTHY MÓR, SZILY KÁLMÁN, THAN KÁROLY, TÖTÖSSY BÉLA és WAGNER ALAJOS vál. tagok; MANDÁK DEZSŐ pénztárnok, KÖVESLIGETHY RADÓ jegyző, RADOS GUSZTÁV és BARTONIEK GÉZA titkárok.

A társulat elnökei akadályozva lévén a megjelenésben, a választmány SZILY KÁLMÁN v. tagot kéri fel az elnöklésre.

Elnök az ülést megnyitván, az ügyvivő titkárnak adja át a szót, ki is a következő indítványokat terjeszti elő:

1. A Mathematikai és Physikai Társulat választmánya a társulat elnökének, nagyméltóságú báró EÖTVÖS LORÁND úrnak m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszterré történt legkegyelmesebb kinevezése fölött érzett örömét jegyzőkönyvében fejezi ki.

2. A társulat Ő Excellentiáját az őszszel tartandó első rendes ülésen a társulat összes tagjainak aláírásával ellátott feliratban üdvözli.

3. Hogy a legkegyelmesebb kinevezés emlékét maradandóvá tegye, a választmány a következő határozatot hozza:

A mathematika s a physika tanításának és tanulásának sikerességét emelendő, a Mathematikai és Physikai Társulat minden év őszén az illető évben hazai nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett tanulók között Budapesten és Kolozsvárott mathematikai és physikai versenyt rendez, oly czélzat-

tal, hogy a versenyzőknek a nevezett szaktárgyak művelésére való rátermettsége megállapíttassék.

A verseny módozatai a következők: A társulat rendes tagjaiból alakított bizottság a versenyre jelentkezettek előtt az elnök pecsétjével lezárt borítékot felbontván, kihirdeti a benne foglalt tételt s a zárt helyen, záros határidőn belül elkészített dolgozatokat átveszi. A dolgozatokat budapesti és kolozsvári rendes tagokból alakított bizottság megbirálja; a bírálat alapján a választmány a két legjobbnak ítélt dolgozatot 100, illetőleg 50 arany korona pályadíjjal jutalmazza. A díjakat a társulat elnöke fogja a verseny után következő első rendes ülésen a nyerteseknek kézbesíteni.

A társulat a verseny eredményéről, nyomban az itélet meghozatala után, a nmélt. m. k. vallás- és közoktatásügyi Miniszteriumnak jelentést tesz; a középiskolát, melyen a jutalmazottak középiskolai tanulmányaikat befejezték, úgyszintén a pályadij nyerteseinek VIII. osztálybeli szaktanárát sikerökről hivatalosan értesíti s a kitüntetett dolgozatokat a Mathematikai és Physikai Lapokban közzéteszi.

A két első díj alakítására a társulat az 1000 frtnyi alaptőkének eddig fel nem használt kamataiból 150 koronát fog fordítani s a díjakat elnökének tiszteletére *Első*, illetőleg *Második b. Eötvös-díj* czimen fogja a két legjobb dolgozat készítőjének kiszolgáltatni.

Indítványát a felszólaló a következő megjegyzésekkel egészíti ki: Gondoskodni fog róla, hogy indítványának elfogadása esetében a társulat minden egyes tagjának mód nyujtassék a felirat iveinek saját lakóhelyén eszközölhető aláirására. E czélból az egyes iveket, a felirat szövegének másolatával együtt, kemény borítékban posta útján köröztetné, 8 különböző útirányban; a közlekedés mai gyorsasága lehetővé teszi, hogy a legnagyobb körutat tevő ív is legkésőbb 10 nappal az elküldés után Budapestre visszakerüljön.

Az indítvány 3. pontja az alapszabályokkal nem ellenkezik, a

mennyiben a 2. §-ban kitűzött czélnak megfelelő intézmény életbeléptetését készíti elő.

Rövid eszmecsere s a pénztárnok meghallgatása után a választmány az indítványt egész terjedelmében változatlanul, egyhangulag elfogadja s a végrehajtás előkészítésével az ügyvivő titkárt megbízza.

A titkár felhatalmazást kér az alább közlött felhivás szétküldésére, mely megadatván, a választmány folyó ügyek elintézésére tért át.

ÉRETTSÉGI VIZSGÁLATOT TETT TANULÓKHOZ.

1. A *Mathematikai és Physikai Társulat* az 1894/5. tanév elején Budapesten és Kolozsvárott az ez évben magyarországi nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett tanulók között a mathematikából s physikából versenyt rendez.

2. A verseny következő módon fog megtartatni:

A jelentkezők a kitűzött helyen és időben összejövén, a Math. és Phys. Társulat bizottsága az elnök pecsétjével lezárt boritékból a tételt a versenyzők előtt kiveszi és felolvassa. A tétel a középiskolai tananyag köréből vétetik s kidolgozása külön tanulmányokat nem követel. A bizottság felügyelete alatt végzendő kidolgozásra 4 órai idő van engedve s a pályázó bármilyen vele hozott könyvet, jegyzetet használhat.

3. A kellő időben elkészitett dolgozatokat a Math. és Phys. Társulat bizottsága átveszi, megbirálja s a választmány a birálat alapján a két legjobb dolgozat készitőjének pályadijakat itél meg. Az első díj 100, a második 50 arany korona.

4. A pályadijakat a társulat elnöke fogja a verseny után következő első rendes ülésen a nyerteseknek átadni.

5. A társulat a verseny eredményéről a nmélt. m. kir. vallás- és közokt.-ügyi Miniszteriumnak jelentést tesz, a pályadij nyerteseinek volt középiskolai igazgatóját s VIII. osztálybeli mathematikai és physikai tanárát hivatalosan értesiti s a jutalmazott dolgozatokat a *Mathematikai és Physikai Lapokban* közzéteszi.

A Mathematikai és Physikai Társulat választmánya ezennel felszólitja a folyó évben nyilvános középiskolán érettségi vizsgálatot tett fiatalságot a versenyben való részvételre.

A versenyre f. é. szeptember hó 8-dik napjáig lehet a társulat ügyvivő titkáránál jelentkezni. A jelentkezés egyszerű levélben történik, oly módon, hogy az illető megnevezi a tanintézetet, melyen az érettségi vizsgálatot letette s kijelenti, hogy Budapesten, vagy Kolozsvárott kiván-e versenyezni. Egy levélben többen is jelentkezhetnek közösen, de szükséges, hogy mindenki pontosan megírja a czímet, mely alatt szeptember 10-ke táján a versenyre szóló meghivó neki megküldessék. A versenyző igazolásul érettségi bizonyítványát, vagy annak hiteles másolatát tartozik a versenyre magával hozni.

A Math. és Physikai Társulat választmányának megbizásából

Budapest, 1894 junius 22.

Bartoniek Géza.
ügyvivő titkár,
(Budapest, VI. Bulyovszky-utcza 16.)

AZ INVOLUTÓRIUS PONTSOROK KONJUNGÁLT PONTJAINAK, KÖZÉPPONTJÁNAK ÉS KETTŐS PONTJAINAK SZERKESZTÉSE.

Ismeretes, hogy két ugyanazon sorozón fekvő projektiv pontsor involutórius helyzetű, ha két pontjuk egymásnak kétféle értelemben felel meg; éppen úgy közös középponttal biró két projektiv sugársor is involutórius, ha két sugaruk egymásnak kétféle értelemben felel meg.

Ez értelmezésből mindjárt egy kettős tétel foly, a mely az alant közlendő szerkesztésünknek alapját teszi. E kettős tétel a következő:

A két tetszőleges helyzetű

$x(ABC\ldots)$

és

$x_1(A_1B_1C_1\ldots)$

projektiv pontsort az m perspektiv tengelyének minden pontjából involutórius sugársor vetíti.

Ha ugyanis az x és x_1 sorozók metszéspontját E és F_1-gyel jelöljük, akkor m a E_1 és F pontokat köti össze, a vetités folytán tehát

$S(ABCEF)$

és

$S(A_1B_1C_1E_1F_1)$-ben

A két tetszőleges helyzetű

$S(abc\ldots)$

és

$S_1(a_1b_1c_1\ldots)$

projektiv sugársort az M perspektiv középpontján keresztül menő minden Z tranzverzális involutórius pontsorban metszi át.

Ha ugyanis az S és S_1 középpontokat összekötő egyenes a m és n_1 sugarakból áll, akkor a M pont a m_1 és n sugarak metszése; a z tranzverzálison keletkező

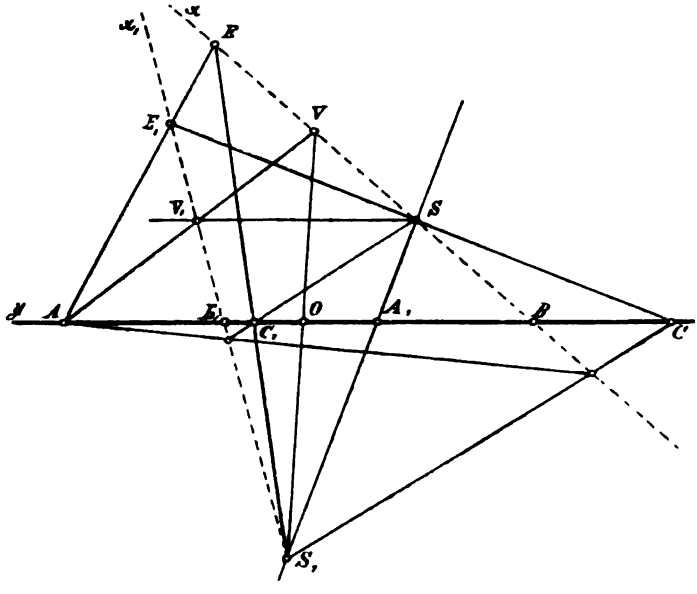
$z(ABCMN)$

és

$z(A_1B_1C_1M_1N_1)$

olyan projektív sugársorokat kapunk, melyeknek két-két sugaruk SE, SF_1 úgyszintén SE_1, SF összeesnek és egymásnak duplán felelnek meg, azaz a vetítés révén nyert sugársor involutórius.

projektív pontsoroknak tehát két-két pontja M, N_1 és M_1, N összecsik és egymásnak duplán felel meg, azaz a metszés révén nyert z pontsor involutorikus.



1. ábra.

Ezen az alapon a két konjugált pontpárjából megadott involutórius pontsor többi konjugált pontjait tekintet nélkül arra, hogy az adott involutórius pontsor egyirányu avagy ellenkező irányu-e, a következő módon szerkeszthetjük meg. (1. ábra.)

Legyen az involutórius pontsor A, A_1 és B, B_1 konjugált pontpárjaiból a y sorozón megadva. Húzzunk A_1 ponton keresztül egy tetszőleges egyenest és vegyünk föl ezen két tetszőleges pontot: S-et és S_1-gyet. SB (x) és S_1B_1 (x_1) egyenesek két perspektív pontsorhoz tartoznak, melynek A a perspektív középpontjuk. Ha most már az eredeti involutórius pontsor C pontjával konjugált pontot keres-

sük, akkor kössük össze a C pontot S-sel míg x_1-et E_1-ben metszi; E_1-nek a x pontsoron megfelel E, melyet S_1-gyel összekötvén és az involutórius pontsor y sorozójával metszésbe hozván, a C-vel konjugált pontot C_1-ben nyerjük. Minthogy a C és C_1 konjugált pontok egymásnak duplán felelnek meg, az eredményre nézve teljesen mindegy, ha a C pontot először S_1-gyel kötjük is össze és ezt az egyenes az x-szel metszük át, mert ha ezt a metszéspontot A-ból az x_1-re vetitjük és az igy nyert pontot S-sel összekötjük, ez az y sorozót ismét a C_1 pontban metszi.

A szerkesztés helyességének megokolására felhasználjuk a fent említett tételt. A szerkesztésben előforduló $S(AA_1BC)$ és $S_1(AA_1B_1C_1)$ sugársorok projektívek, minthogy x és x_1 két perspektív pontsort vetítenek; e két projektív sugársornak A a perspektiv középpontja, igy tehát C és C_1 az involutórius pontsornak csakugyan két konjungált pontja.

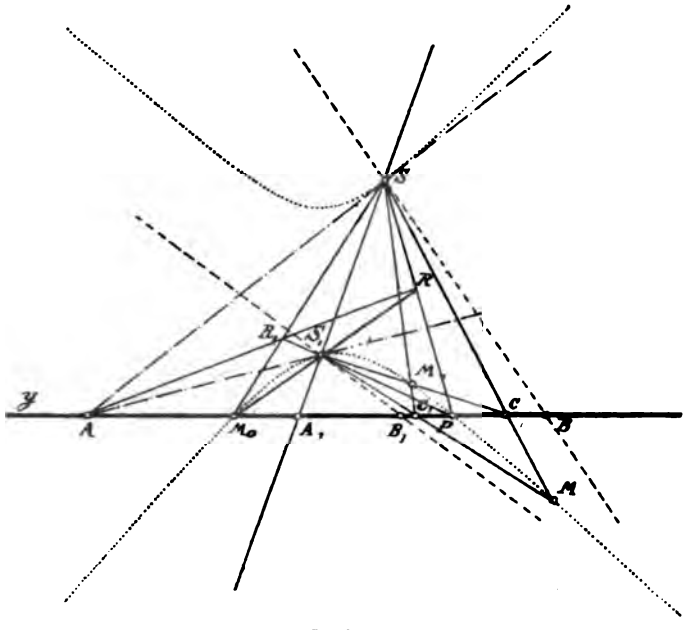
Hasonló egyszerű szerkesztéssel kereshetjük föl az involutórius sugársor konjugált sugarait is.

Az involutórius pontsort alkotó, sorozóikkal összeesett, két projektiv pontsor végtelenben fekvő pontjai is egybeesnek, az e pontnak megfelelő O pont az involúczió czentruma. Fölkeresésére húzzunk P-ből az y sorozóval parallelt míg az x_1-et V_1-ben metszi, e pontnak az x-en megfelel V, melyet a S_1-el összekötő S_1V sugár az y sorozóból az O czentrumot vágja ki. — Megokolása az előző szerkesztésen alapszik; a C pont itt az y sorozó végtelenben fekvő pontja.

Az 1. ábrában, midőn az involutórius pontsornak két konjugált pontját határoztuk meg, $S(AA_1BC)$ és $S_1(AA_1B_1C_1)$-ben két projektiv sugársort nyertünk, melyeknek megfelelő sugarai SB és S_1B_1, SC és S_1C_1 az involutórius pontsort a konjugált pontjaiban metszik; azaz, az involutórius pontsort, bármelyik pontján keresztülmenő tetszőleges egyenes két pontjából, két projektiv sugársor vetíti. Az igy származott két projektiv sugársor egy másodrendű görbét állapít meg, melynek pontjaiban $M\ldots$ metszik egymást az involutórius pontsor konjugált pontjain átmenő SC, $S_1C_1, \ldots$ sugarak, (2. ábra) s minthogy az SS_1 összeesett sugár-

nak az egyik sugársorban SA, a másikban S_1A felel meg, az SA és S_1A a származott másodrendű görbének az S és S_1 pontban húzható érintői. Ugyane görbének egy második pontja a S_1C és SC_1 összetartozó sugarak M_1 metszése is.

A származott másodrendű görbe az involutóriüs pontsor y sorozóját M_0 és P pontokban metszi, s minthogy az involuczió C és C_1



2. ábra.

két konjugált pontjából a görbének is mindig két M és M_1 pontját nyertük, és fordítva a görbe M és M_1 pontjából az involucziónak C és C_1 két konjugált pontja származott, kétségtelen, hogy az involucziónak úgy az M_0, mint a P pontból származó két konjugált pontja a görbe M_0 és P pontjaival összeesik, azaz M_0 és P az involúczió kettőspontjai. Ugyanezt bebizonyíthatjuk még akként is, hogy az M_0 és P pontokat az S és S_1 pontokkal összekötjük. Az itt származott SRS_1R_1 teljes négyszög átellenes oldalai az M_0 és P pontokon, átlói pedig az A és A_1 pontokon mennek át, azaz AA_1 konjugált

pontokat az M_0 és P pontok harmonikusan választják el; s minthogy minden többi konjugált pontpárra nézve ugyanaz áll, kétségtelen, hogy M_0 és P az involutórius pontsor kettőspontja.

A kettős pontok fölkeresésére tehát mindössze is egy a fönti elvek szerinti kúpszeletet kell szerkesztenünk, mely az y sorozóból a keresett dupla-pontokat vágja ki.

A szerkesztés egyszerűsítése kedveért legczélszerűbb lenne a szóban forgó másodrendű görbét körrel helyettesítenünk. Kérdés tehát, hogy egy involutórius pontsort vetitő projektív sugársorok mikor adnak kört?

Húzzuk az SS_1 egyenest az O czentrumon át, akkor az S, S_1 pontokon átmenő érintők az y sorozó végtelenben fekvő pontjába futnak, s igy vele parallelek lesznek; SS_1 tehát a görbe egyik átmérője. Hogy ez a görbe egyik tengelye legyen, arra nézve csak az SS_1-et kell az y sorozóra merőlegesen állítanunk. Hogy most már a másodrendű görbe körré legyen, arra szükséges, hogy a két sugársor megfelelő sugarai egymásra merőlegesen álljanak. Ezt elérjük, ha csakis az S pontot vesszük föl az O ponton keresztül húzott merőlegesen tetszőlegesen, az S_1 pontot pedig úgy határozzuk meg, hogy az SA sugárra A_1-ből merőlegest húzunk, mig az O centrumon átmenő merőlegest S_1-ben vágja. Az SS_1 átmérő fölött irható kör az y sorozóból M és P a keresett dupla-pontokat vágja ki.

Nesnera Aladár.

EGY TÉTEL A SOKASÁGOK ELMÉLETÉRŐL.

A sokaságok elmélete a mathematikai diszcziplinának között egyike a legfiatalabbaknak. A fogalmat először RIEMANN használta, rendszeresen pedig CANTOR kezdett vele foglalkozni 1873-ban egy czikksorozatban, amely a Crelle-Journalban és a Math. Annalenben, összegyűjtve pedig franczia fordításban az Acta Mathematica 2. kötetében jelent meg. Ennek az elméletnek elvi jelentősége abban áll, hogy egységes szempontból tárgyalja a diszkrét és folytonos mennyiségeket és így alkalmazása van úgy az algebrában és számelméletben egyrészt, mint másrészt a függvénytanban és geometriában, tehát úgyszólván áthidalja az összes mathematikai diszcziplinákat. A sokaságok elméletének köszöni pl. a függvénytan a számtartománynak alapvető fontosságú fogalmát, a számelmélet pedig annak bebizonyítását, hogy az algebrai számok sokasága megszámlálható, miáltal a transzczendens számok létezése is ki van mutatva. A geometriában kiváló fontossága van ez elméletnek a tér alkatára vonatkozó vizsgálatokban. A tér folytonossága nem más, mint azon hipotézis, hogy a három dimenziós folytonos aritmetikai sokaság egyértelműen vonatkoztatható a térre. Ha kihagyjuk az algebrai számok által képviselt megszámlálható pont-sokaságot, a többi még mindig folytonos mozgást enged meg, tehát látjuk, hogy folytonos mozgás a nem folytonos (gödrös) térben is lehetséges.

Látván az eddigiekben a sokaság elméletének kiváló fontosságát, alkossuk meg fogalmát.

A sokaság CANTOR G. szerint *bizonyos fogalmi körből vett elemeknek meghatározott kollekcziója.*

Valamely sokaság meg van határozva, ha a principium exclusi tertii alapján logikailag eldönthetjük:

1. *hogy valamely elem a sokasághoz tartozik-e vagy sem,*

2. *hogy két a sokasághoz tartozó elem egyenlő-e vagy sem, tekintet nélkül arra, hogy mily módon vannak adva.*

E logikai vagy *intern* meghatározást jól meg kell különböztetnünk az *aktuális* meghatározástól. Igy pl. logikailag igen jól meg tudjuk határozni, hogy algebrai szám az olyan szám, mely egész számú együtthatókkal képezett n-edfokú algebrai egyenletnek gyöke és azért még sincs általánosan alkalmazható módszerünk, melynek segítségével egy adott számról eldönthetnők, hogy ez a szám algebrai-e vagy transzcendens.

A sokaságok elméletében főprobléma a sokaságok közötti vonatkozás megállapítása és ez vezet a *hatvány* (puissance, Mächtigkeit) fogalmára.

Két sokaság A és B akkor egyenlő hatványú, vagy egyenlő értékű $A \sim B$, ha elemenként kölcsönösen egyértelműen egymásra vonatkoztatható.

Valamely adott sokaság részei alatt értjük mindazon sokaságokat, melyeknek elemei egyidejüleg amaz adott sokaság elemei.

Ha két sokaság nem egyenlő hatványú, akkor vagy M oly hatványú mint N egy része, vagy N oly hatványú, mint M egy része; első esetben M hatványa kisebb, a másikban nagyobb mint N hatványa.

Véges számú elemekből álló sokaságoknál az elemek számának (számosságának) felel meg a hatvány fogalma és ilyen sokaságok részei kisebb hatványuak mint az egész. Igy a számosság fogalma különös esete a hatvány fogalmának. Végtelen számú elemekből álló sokaságok már részeikkel egyenlő hatványuak lehetnek, igy a természetes számsor elemei és a páros számok által alkotott sokaságok egyenlő hatványuak, mert elemenként egyértelműen vonatkoztathatók egymásra. Ezen sokaságok adják a legkisebb hatványú osztályt, az u. n. megszámlálható sokaságok osztályát. Ide tartoznak az összes raczionális számok által, az algebrai számok által,

és az egyszerű és n-szeres sorok elemei által alkotott sokaságok. A folytonos sokaságok már magasabb hatványúak.

A következőkben ismertetni akarjuk CANTOR-nak azon nevezetes tételét, *hogy egy n-méretű folytonos lineár sokaság egyértelműen vonatkoztatható egy egyméretű vagy akár egy m-méretű ilyen sokaságra.*

RIEMANN-nak, HELMHOLTZ-nak és másoknak hasonló vizsgálatai azokról a hipotézisekről, melyek a geometriának alapját képezik, feltételezik, hogy a tér pontjai alkotta sokaság valamint az n-szeres sokaság elemei közötti *megfelelés* is folytonos legyen, azaz hogy a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ értékrendszer minden végtelen kis változásának a sokaságnak is végtelen kis változása feleljen meg. Látni fogjuk, hogy e feltevés mellőzésével a dimenziók száma mint *karakterisztika* teljesen elveszti jelentőségét.

Megjegyezzük még, hogy itt mindig lineár pontsokaságokról van szó, azaz olyanokról, melyekben minden elem csak egyszer fordúl elő. Két változóról a-ról és b-ről akkor fogjuk mondani, hogy nincsen érintkezésük (liaison), ha a-nak egyik értékét sem veheti fel b és vice versa. Ilyenek pl. a raczionalis és irraczionális számok sokaságai. Továbbá $v \equiv \{r, i\}$ jel azt fogja jelenteni, hogy 1) r és i minden egyes értékét felveszi v is egyszer és 2) v minden értékét felveszi egyszer vagy r, vagy i. Ilyen összefüggésben van pl. a valós számok sokasága (v) a raczionalis (r) és irraczionalis (i) számok sokaságával.

Könnyen belátható a következő tétel is:

Ha

$$a \equiv \{a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots\}$$
$$b \equiv \{b', b'', \ldots, b^{(\nu)}, \ldots\} \text{ és}$$

ha

$$a' \sim b'$$
$$a'' \sim b''$$
$$\ldots\ldots$$
$$a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$$
$$\ldots\ldots$$

akkor

$$a \sim b.$$

Ugyanis legyen x az a egy eleme, akkor okvetlenül valamelyik a_i-nek is eleme, de $a_i \sim b_i$, tehát x a b_i-nek és így a b-nek is eleme.

CANTOR tételének bebizonyítása két részből áll; az egyik azon tétel alapján, hogy minden irracionális szám csak egyféleképen fejezhető ki mint végtelen láncztört (ld. KÖNIG, Analizis I. 163. §.) és bebizonyítja, *hogy az n irracionális számból képezhető értékrendszerek összesége*, tehát egy n-szeres vagy n-méretű sokaság *egyenlő hatványú egy oly sokasággal, mely egyetlenegy ily elem összes értékeiből van képezve*, tehát egyméretű. A másik rész kiegészítésül kimutatja, hogy egy *oly sokaság, melynek elemei valamely számköz összes irracionális értékei, egyenlő hatványú egy olyannal, melynek elemei ugyane számköznek összes valós elemei.*

A bizonyításnak részletes menete a következő:

Először bebizonyítjuk a következő tételt:

I. *Legyen* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ n *egymástól független, változó, melyek fölvehetik a* (0 . . . 1) *számköz minden irracionális értékét és legyen d egy ilyen változó, akkor az* e_i *változók értékrendszereiből alkotott sokaság egyenlő hatványú a d értékeiből alkotott sokasággal.*

E tétel bebizonyítására kiindulunk abból az ismeretes tételből, hogy bármely irracionális szám e csak egyféleképpen fejezhető ki egy folytonos végtelen láncztörttel:

$$e = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_r + \cdots}}}}$$

$$= (a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$$

ahol az a_i nevezők pozitiv egész számok. Minden irracionális számhoz tartozik egy a_i sorozat és viszont minden ilyen a_i sorozat meghatároz egy bizonyos irracionális e számot. Legyen most $e_1, e_2, \ldots, e_n$ n egymástól független változó, mely a (0 . . . 1) számköz minden irracionális értékét felveheti, akkor tehető

$$e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iv}, \ldots)$$

és ez az n változó meghatároz egy $(n+1)$-diket így

$$d = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots)$$

a hol

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = a_{\mu,\nu} \qquad \begin{matrix}(\mu = 1, 2, \ldots, n) \\ (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)\end{matrix}$$

De viszont, ha kiindulunk egy $0 < d < 1$ irraczionális számból, akkor ez meghatározza a β sort és így az $a_{\mu\nu}$ számokat és ezek alapján az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ értékrendszereket is egyértelműen, a mivel a kijelölt tétel be van bizonyítva.

Áttérünk a következő tétel levezetésére:

II. *Legyen y egy változó, mely a* (0 . . . 1) *számközben a* 0 *kivételével minden értéket felvehet és x egy oly változó, mely ugyanezen számközben kivétel nélkül minden értéket felvehet, akkor az y értékeiből alkotott sokaság egyenlő hatványú az x értékei alkotta sokasággal.*

E tételt legkönnyebben a mellé rajzolt görbe segítségével igazolhatjuk. Ez a görbe végtelen sok egyenes darabból ab, $a'b'$, $a''b''$, és egy izolált pontból van összetéve. Az egyenes vonaldarabok párhuzamosak és kezdőpont felé fogynak az izolált pont, melyhez az egyenes vonalú darabok aszimptotice közelednek. E mellett az a pontok a görbe pontjainak tekintendők, a b pontok nem. Az ábrán

$$Op = pc = 1$$

$$Ob = bp = Oa = \frac{1}{2}$$

$$a'd' = d'b' = bb_1 = \frac{1}{4}$$

. . . . . .

$$a^{(\nu)}d^{(\nu)} = d^{(\nu)}b^{(\nu)} = b_{\nu-1}b_\nu = \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

Könnyen belátható, hogy ha az ekként megállapított görbén x felvesz minden értéket 0-tól 1-ig, y ugyanazokat az értékeket veszfel 0 kivételével és hogy y minden értékének x-nek csak egy értéke felel meg és fordítva.

Alkalmazván erre a tételre

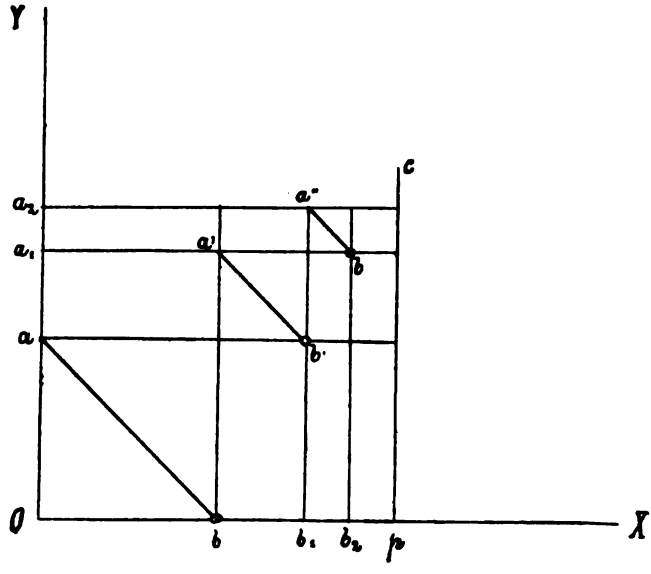
$$y = \frac{z-a}{\beta-a}$$

$$x = \frac{u-a}{\beta-a}$$

lineár helyettesítést a következő tételt nyerjük:

III. *Valamely z változó, mely az (a . . . β) számköz minden értékét felveheti a kivételével, egyenlő értékű oly u változóval, mely e számköz minden értékét veheti fel.*

E tételből pedig könnyen jutunk a következőhöz:



IV. *Ha ω oly változó, mely az (a . . . β) számköz minden értékét felveheti, kivéve a két szélsőt α-t és β-t és u változó ugyane számköz minden értékét felveheti, akkor e két változónak értékeiből alkotott sokaság egyenlő hatványú.*

Ugyanis legyen γ egy tetszőleges érték α és β között, vehesse fel továbbá

ω az $(\alpha \ldots \beta)$ számköz összes értékeit α és β kivételével
z az $(\alpha \ldots \beta)$ « « « α kivételével
ω' az $(\alpha \ldots \beta)$ « « « α és γ kivételével
ω'' a $(\gamma \ldots \beta)$ « « « β kivételével
u'' a $(\gamma \ldots \beta)$ « « « kivétel nélkül,

akkor

$$\omega \equiv \{\omega', \omega''\}$$
$$z \equiv \{\omega', u''\}$$

de a III. alatti tétel szerint

$$\omega'' \sim u''$$

úgy, hogy

$$\omega \sim \{\omega', u''\}$$

és innen

$$\omega \sim z;$$

de minthogy ismét a III. alatti tétel értelmében

$$\omega \sim z,$$

következik, hogy

$$\omega \sim u$$

és ezt épen akartuk bebizonyitani.

Vezessük be most a következő segédváltozókat:

f' vegye fel az $(0 \ldots \varepsilon_1)$ köz minden értéket ε_1 kivételével
f''' « « « $(\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_3)$ « « « ε_2 és ε_3 «
. . . . . .
$f^{(\nu)}$ « « « $(\varepsilon_{\nu-1} \ldots \varepsilon_\nu)$ « « « $\varepsilon_{\nu-1}$ és ε_ν «

továbbá

x'' vegye fel az $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_2)$ « « « kivétel nélkül
. . . . . .
$x^{(2\nu)}$ « « « $(\varepsilon_{2\nu-1} \ldots \varepsilon_{2\nu})$ « « « « «

továbbá pedig

f vegye fel az $(0 \ldots 1)$ « « « egy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ sorozat kivételével
x « « « $(0 \ldots 1)$ « « « kivétel nélkül,

akkor

$$f \equiv \{f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots, 1\} \quad .$$
$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{(IV)}, \ldots, f^{(2\nu-1)}, f^{(2\nu)}, \ldots, 1\},$$

de

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)}, f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}, 1 \sim 1,$$

tehát

$$f \sim x;$$

azaz

V. *Két oly változó, melyek közül az egyik a* (0 . . . 1) *számköz összes értékeit kivétel nélkül, a másik ugyanezeket egy bizonyos* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu)$ *sorozat értékeinek kivételével veheti fel, ahol* $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ *és* $\lim \varepsilon_\nu = 1$, *egyenlő értékűek.*

Ámde a (0 . . . 1) számközben fekvő raczionális számok megszámlálható sokaságot és így egy ily $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu$ sort is képeznek, (v. ö. Kőnig Analizis I. p. 167) úgy hogy tételünket így is fogalmazhatjuk:

VI. *Oly sokaság, melynek elemei a* (0 . . . 1) *számköz összes valós értékei, egyenlő hatványú avval a sokasággal, melynek elemei ugyane számköz összes irraczionális értékei.*

Legyen már most $T_n^{(i)}$ egy oly n-méretű sokaság, melynek elemei a (0 . . . 1) számköz összes irraczionális elemei, $T_1^{(i)}$ egy époly egyméretű sokaság és $T_n^{(\nu)}$ egy oly n-méretű sokaság, melynek elemei a (0 . . . 1) számköz összes valós elemei, akkor

$$T_n^{(i)} \sim T_1^{(i)}$$
$$T_1^{(i)} \sim T_1^{(\nu)}$$
$$T_n^{(i)} \sim T_n^{(\nu)}$$

tehát

$$T_n^{(v)} \sim T_n^{(1)}$$

Ha ezt az igazságot a (III.) tétel alapján egy tetszőleges számközre átvisszük, végül Cantor-tételének bebizonyítását nyerjük.

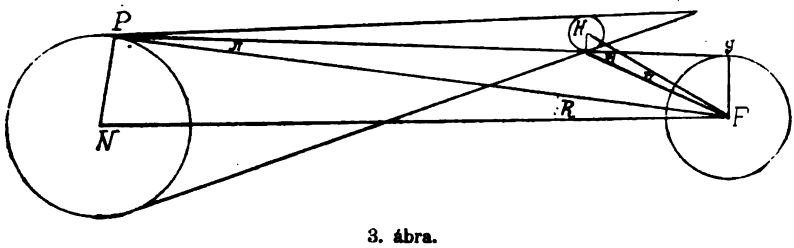
Kopp Lajos.

A FOGYATKOZÁSOK GRAPHIKUS MEGHATÁROZÁSA.

(Második és befejező közlemény.)

II. Napfogyatkozások.

Ha a Hold közel az ekliptikához, tehát valamelyik csomópontjának szomszédságában conjunctióba jut a Nappal (újhold), napfogyatkozás keletkezhetik. De míg a holdfogyatkozás tényleges sötétülés, mely egyidőben az egész félföldön látható, addig a napfogyatkozás lényegesen parallaktikus jelenség, mely a megfigyelőnek a Hold- és Naphoz való helyzetétől függ. Kiszámítása ez oknál



3. ábra.

fogva tetemesen bonyolúltabb. Szerkesztésünk a napfogyatkozás lefolyását adja a Föld számára általában; hogy a jelenségben az egyes földfelületi pontok helyzetüknél és a tengelyforgás következtében miképen vesznek részt, ezt ismét egyszerűbben a glóbussal döntjük el.

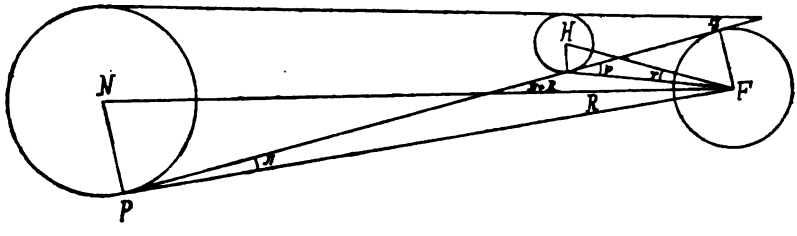
A 3. ábra a részleges napfogyatkozás határát adja, a mennyiben a Föld *G* pontján álló megfigyelő a Hold és Nap külső érintését észlelheti. Ez esetben a Nap és Hold középpontjainak egymástól való látszó távolsága az *NFH* szög, mely nyilván

$$NFH = (p - \pi) + R + r$$

Éppen így adja a 4. ábra a teljes napfogyatkozás határát, a mennyiben az árnyékkúp csúcsán álló megfigyelő a Nap és Hold belső érintkezését megfigyelheti. Ez esetben a Hold és Nap látszó távola, azaz

$$NFH = p - \pi + r - R.$$

Ezen utolsó két egyenlet még más úton is nagyon egyszerűen származtatható. A Föld középpontjában álló megfigyelő ugyanis részleges vagy teljes fogyatkozást *még* lát, ha Hold és Nap egymást külsőleg, illetve belsőleg érintik. Ekkor a két égi test középponti távolsága, $r + R$ illetőleg $r - R$. Ha most a két korong centrális vonalával párhuzamosan a Föld színéig emelkedünk, mindkét égi



4. ábra.

test parallaxisuk értékével süllyed: a Hold p-vel, a Nap π-vel. A szélek érintkezése ismét beáll, ha a Holdat $p - \pi$-vel emelve gondoljuk, mikor is középponti távolságuk a részleges fogyatkozás alkalmával $r + R + p - \pi$, a teljes esetén $r - R + p - \pi$ lett.

A fogyatkozás határai ismét ez értékek szélső értékei szabják meg; ugyanis

p	változik	...	...	...	...	53′ 53,0″	és	61′ 27,0″ között
π	«	...	...	...		8,7	és	9,0 «
r	«	...	...	...	...	14 43,0	és	16 46,5 «
R	«	...	...	...		15 45,5	és	16 17,5 «

Ennek következtében: * $p - \pi + r + R$ minimuma = 84′12,5″, maximuma = 94′22,3″.

* L. A 2. lapon álló jegyzetet.

És éppen így: $p - \pi + p - R$ minimuma = 52'41,8", maximuma = 61'47,0".

Ha az előbb idézett sphærikus háromszögben (csomópont, hold- és a földárnyék középpontja) a földárnyék helyébe a Napot teszszük, akkor nyerjük a távolságokat, melyekben a Nap a holdcsomóponttól állhat, hogy a fogyatkozás még éppen lehetséges legyen. Ha ismét a hold-naptávolságnak, NH (az előbbi AH helyett) maximumait a pályahajlás minimumával összevetjük, és megfordítva, a következő értékekhez jutunk:

	Szükséges határ:	Lehetséges határ:
Részleges napfogyatkozásoknál ...	15° 23'	18° 21'
Teljes vagy gyűrűs fogyatkozásoknál	9 33	11 54

vagyis: Ha újhold alkalmával a Nap távolsága a legközelebbi csomóponttól kisebb mint 9° 33', akkor *szükségképen* bekövetkezik egy teljes vagy gyűrűs napfogyatkozás; ha e távolság 9° 33' és 11° 54' között van, *szükségképen* látunk teljes, gyűrűs, vagy részleges fogyatkozást; 11° 54' és 15° 23' között *szükségképen* részleges fogyatkozás áll be, míg 15° 23' és 18° 21' között a részleges fogyatkozás *lehetősége* még megvan, 18° 21'-cznyi távolságon tul pedig már e lehetőség is *ki van zárva*. A Hold pályahajlás négyzetével egyenlő rendű tagok elhanyagolásával ezen határok helyébe ismét az $NH = p - \pi + r + R$ távolságok is léphetnek, ha ezeket a Hold szélességének tekintjük.

A centrális napfogyatkozás átlagos tartama ugyancsak könnyen kiszámítható; a Hold perczenkénti relativ útja a Naphoz képest 30,48", s a fogyatkozás teljes tartama alatt a két égi test átmérőinek összegével egyenlő útat fut be; ez átlag 3791,6" s ennélfogva az átlagos tartam 124^m; mivel azonban a megfigyelő a Földdel együtt ugyancsak a holdmozgás irányában kelet felé mozog, e tartam 2 óránál valamivel nagyobb lesz. A teljes vagy gyűrűs fogyatkozás átlagos tartama ellenben csak nehány perczre rug, mivel a Hold az átmérők csekély különbségét gyors mozgásánál fogva igen hamar befutja.

A fogyatkozás egyes fázisainak tanulmányozására ismét szerkesztést veszünk igénybe; példa gyanánt választom az 1764-iki

teljes napfogyatkozást. Elemei, melyek ez esetben kényelmesebben az ekliptikára vonatkoztathatók, és melyek ugyanoly módon beszerezhetők és a hosszkülömbségnek az interpolátióval való tekintetbevételével tetszőleges hely meridiánjára átszámithatók, mint a holdfogyatkozásnál a következők:

		Valódi párisi idő.
Conjunctió hosszúságban: 1764 április 1. d. e.		$10^h\,31^m\,23^s$
☾ szélessége	+	0° 39′ 36″
☾ óránkénti mozgása hosszúságban	+	29′ 39″
☉ « « «	+	2′ 27″
☾ óránkénti mozgása szélességben	+	2′ 31″
☾ horizontális æquator parallaxisa	$p =$	54′ 9″
☉ « « «	$\pi =$	9″
☾ látszólagos sugara	$r =$	14′ 47″
☉ látszólagos sugara	$R =$	16′ 1″

Mivel a 3. és 4. ábra szerint a Föld nappali félgömbjének szélén fekvő G hely számára a részleges és teljes napfogyatkozás kezdődik vagy végződik, ha Nap és Hold szögtávolsága $p - \pi + R + r$. illetőleg $p - \pi + r - R$, irjunk le ezen értékü sugarakkal két concentrikus kört. Ha ismét *p. o.* 1 ivpercz = 1 mm., akkor $p - \pi + R + r =$ $= 84' 49'' = 84{,}8$ mm. és $p - \pi + r - R = 52' 45'' = 52{,}8$ mm. E két kör nyilván a Föld napos féltekéjének (a Hold távolságában) a részleges, illetve teljes napfogyatkozás kezdetén és végén rajzolt orthogonális projectiójának felel meg. F, a Földnek, éppen úgy, mint a Napnak szélessége állandóan O, mivel mindkettőnek középpontja az ekliptikában fekszik. A 2. ábrával való konformitás tekintetében a vizszintes átmérő a Föld napos oldalának szélességköre, az erre merőleges átmérő a Föld napos oldalának hosszúsági köre nevét is viselheti. Mivel a conjunctió pillanatában a Hold északi szélessége 39′ 36″, ugyancsak az előbbi ábrának megfelelő O pont 39,6 mm.-nyi távolságba kerül F-től észak felé. A Hold relativ mozgása a Földhez szélességben + 2′ 31″ (mivel a Föld állandóan az ekliptikában marad) és hosszúságban 29′ 39″ − 2′ 27″ = 27′ 12″ (mivel a Föld eziránya mozgása a Napéval azonos). Ha tehát

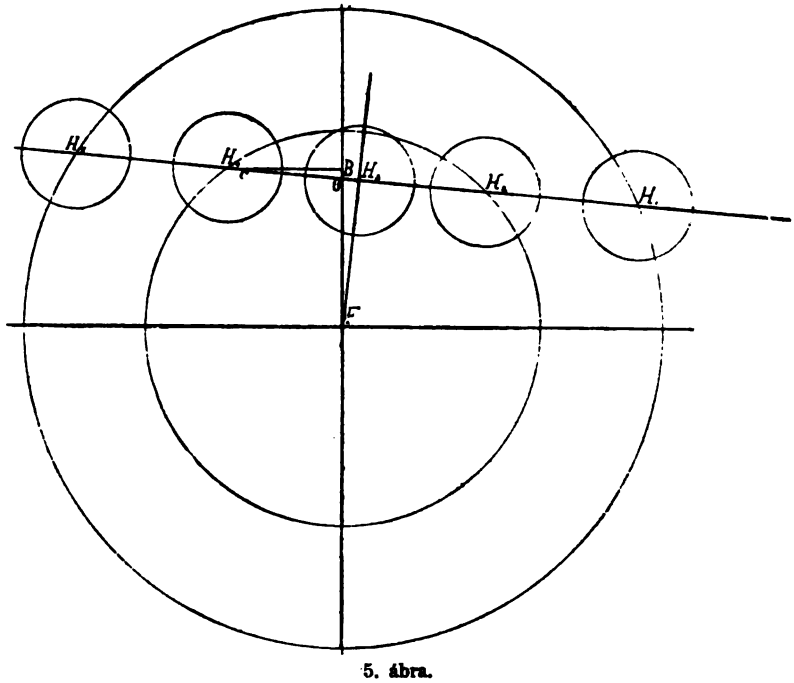
$OB = 2{,}5$ mm. és $BC = 37{,}2$ mm., akkor $OC = 27{,}3$ mm. a Hold valódi óránkénti útja, és e vonal $H_1 \ldots H_5$ meghosszabbítása szolgáltatja a Hold relativ pályáját, melynek csomópontja az egyenesnek s az ekliptikának meghosszabbításának metszésében keresendő. A Holdpálya H_1, H_5 és H_2, H_4 pontjai nyilván azok, melyekben a Föld napos oldalának szélén a részleges, illetve a teljes fogyatkozás kezdete és vége észlelhető. Ha F pontból még merőlegest emelünk a holdpályára, még egy H_3 pontot is nyerünk, mely a teljes fogyatkozás közepének felel meg. A $H_1 \ldots H_5$ pontoknak O-tól — a Holdnak a conjunctió pillanatában elfoglalt helyétől való távolságai — a szerkesztés értelmében 78,7; 38,7; 3,6; 31,4 és 71,4 mm. és mivel a Hold óránkénti mozgása pályájában ugyancsak $OC = 27{,}3$ mm., ezen távolságoknak sorban 2,88; 1,42; 0,13; 1,15 és 2,61 óra időkülömbség felel meg. Az első három nyilván a conjunctió idejéből levonandó, az utolsó kettő hozzáadandó. Ez által a következő táblázatot nyerjük:

	V. párizsi idő.
A fogyatkozás kezdete általában: 1764 ápr. 1. d. e.	$7^h\ 38^m6$ (37,8)
A teljes fogyatkozás kezdete általában	9 6,2 (4,4)
A teljes fogyatkozás közepe	10 23,6 (22,7)
A teljes fogyatkozás vége általában	11 40,4 (38,8)
A fogyatkozás vége általában d. u.	1 8,0 (7,6)

A zárjelekbe fogott számok a szigoru számítás eredményeit adják, időperczekben.

Mindezen adatok természetesen a tengelyforgással nem biró Földre vonatkoznak; vagy más szóval a fogyatkozás kezdete és vége imént közölt idő-adata azon helyekre érvényes, melyek a napos félföld szélén feküsznek, melyek számára tehát a Nap éppen fogyatkozva kel és nyugszik. Hogy ez a Föld mily pontjaira vonatkozik, s hogy e jelenségben a tengelyforgásnak mily szerep jut, az ismét a földglóbus segélyével határozható meg legegyszerübben. E czélra ellátjuk a glóbust egy ⌐ alaku vonalzóval, mely a fahorizontra a félgömb fölé állítható, s melynek a glóbus felé néző éle a holdpályát ábrázolja a fogyatkozás alatt. A «pályavonalzó» helyes fel-

állitása kedvéért rajzoljuk az 5. ábrába az F ponton átmenő æquatort, mely a glóbuson a fahorizontot az állandó kelet és nyugot pontokban metszi. Aequator és ekliptika képe egymással ábránkban nyilván ugyanazt a szöget zárja be, melyet a Napon átmenő hosszúsági- és órakör fog közbe. De az æquator és ekliptika pólusaitól, P és Π-től, valamint a Nap N által képezett sphaerikus három-



5. ábra.

szögben $P\Pi = \varepsilon = 23° 27'$, $\Pi N = 90°$ (mivel a Nap szélessége állandóan 0), $\Pi NP \measuredangle = p$ a keresett szög, $\Pi PN \measuredangle = 90° + \alpha$, hol α a Nap rectascensiója. Ebből következik:

$$\sin p = \sin \varepsilon \cos \alpha$$

mi egyszersmind az æquatort hajlás és irány szerint meghatározza. Mivel a mi esetünkben $\alpha = 10° 33'$, $\varepsilon = 23° 27'$, $p = 23° 2'$-nek adódik, az æquator $23° 2'$-nyi szöglet alatt úgy fektetendő F pon-

ton át az ekliptikához, hogy ennek nyugoti (jobboldali) ága az æquator nyugoti ágától északra kerüljön. A vonalzó két lábát ennélfogva a Hold északi declinatiója esetében annyi fokkal állítjuk a kelet és nyugot ponttól északra (déli declinatió esetében dél felé), a hány fokra fekszik az 5. ábrában H_2 és H_4 a teljes, H_1 és H_5 a részleges fogyatkozás esetében az æquator és a belső, illetőleg az æquator és a külső kör metszési pontjaitól. Ezzel a vonalzó belső éle a holdpálya relativ fekvését a Földhöz képest helyesen adja vissza. Az F pontban az æquatorra merőleges egyenes a Nap órakőre, melyet ezentúl a glóbus fémmeridiánjával fogunk azonosítani, s mely alatt a Föld tengelyforgása közben elfordúl.

Most emeljük a glóbus északi vagy déli pólusát annyi fokkal a fahorizont fölé, a mennyit a Nap északi vagy déli declinátiója a fogyatkozás napján kitesz (a mi esetünkben $\delta = +4° 30'$, s ennyivel emelendő az északi pólus), a mivel elértük, hogy a Nap aznapi parallelköre a glóbus zenithjén megy át. Mivel a Napot a fémmeridiánban, mint saját órakörében képzeljük, ez tényleg a glóbus zenithjében áll, s a fahorizont feletti rész adja a Föld nappali oldalát, mig a «pályavonalzó» a glóbushoz képest teljesen úgy fekszik, mint ábránkban a $H_1 .. H_5$ pálya a Föld orthogonális projectiójában.

Mivel a glóbus és a felette képzelt Nap úgy áll, hogy a *párhuzamos* napsugarak merőlegesen esnek a glóbus horizontjára, a vonalzóhoz illesztett függőón egy ilyen napsugár képét szolgáltathatja. Ha a függőón a gömb keleti és nyugoti oldalát érinti, a vonalzón nyilván a H_2 és H_4 pontoknak megfelelő holdhelyeket kapjuk, feltéve, hogy a teljes fogyatkozásnak megfelelőleg, a glóbus sugarát a belső kör sugarának megfeleltetjük. E két helyzetnek megfelel a teljes fogyatkozás kezdete és vége, $9^h\ 6^m$ és $11^h\ 40^m$, a miért is e két pont között a vonalzó mindjárt 154 részre — minutára — osztható, hogy a Hold helye valamely földfelületi pont felett az egész teljes fogyatkozás tartama alatt meghatározható legyen.

Hátra van még végül a glóbus helyes forgatása. Példánkban a teljes fogyatkozás kezdete beáll, ha Párisban az óra délelőtti $9^h\ 6^m$-et mutat, ha tehát Páris a Napot magában foglaló órakörtől még $12^h - 9^h\ 6^m = 2^h\ 54^m$-nyire *nyugot* felé fekszik. Hozzuk tehát

Párist a fémmeridián alá. Állítsuk a számlapját a fogyatkozás kezdetére, $9^h\ 6^m$-ra, és forgassuk a glóbust nyugot felé, míg a számlap déli 12 órára nem áll. Ekkor Páris a követelménynek megfelelőleg $2^h\ 54^m$-nyira fekszik nyugotra, s ez utolsó művelettel végül az egész tünemény hű mechanikai mását nyertük a fémmeridián alatt fekvő helyek számára egyszerre van dél, a *nyugoti* horizont mentén fekvő pontok egyszerre látják a Nap *keltét*, a *keleti* horizont pontjai a Nap *nyugtát*.

A nyugoti horizonton a «pályavonalzó» alatt függőlegesen fekvő hely az *első*, mely $9^h\ 6^m$ párisi időben látja a teljes fogyatkozás kezdetét. Valamely keletre, de mindig a «pályavonalzó» alatt álló pont *ugyanez* időben a részleges fogyatkozásnak éppen kezdetét láthatja akkor, ha a vonalzóra illesztett függőón távolsága a Hold helyétől (a fogyatkozás kezdetét jelölő $9^h\ 6^m$ ponttól) a két égi test sugarának összegével azonos. Ez összeg $30'\,48''$; másrészt a glóbus átmérője, mely a vonalzó osztott hosszával egyenlő, 154 részből áll, melyek együttvéve az 5. ábra belső körének átmérőjével $105'\ 30''$-czel felelkeznek. Ennélfogva a keresett távolság x:

$$\frac{x}{154} = \frac{30'\,48''}{105'\,30''}$$

s ha a vonalzó $9^h\ 6^m$-pontjától ezen x távolságra függélyest bocsátunk le, a Földnek azt a helyét nyerjük, melyben $9^h\ 6^m$ párisi időben a részleges fogyatkozás éppen kezdődik. Ugyan így megállapithatók mindazon helyek is, melyekben a fogyatkozás adott időben éppen egy előirt nagyságot elért. Ha ezen egész eljárást ismételjük a fogyatkozás közepére és végére nézve is, midőn a Hold helyét a vonalzón a $10^h\ 24^m$, illetve $11^h\ 40^m$ pontban keressük, a tünemény teljes lefolyását a Földforgás tekintetbevételével tanulmányozhatjuk, különösen pedig kereshetjük azt a pontot is, melyben a teljes fogyatkozás $11^h\ 40^m$ párisi időben utoljára látják.

Az ily módon felkeresett vagy felkereshető pontok összesége geographiai helyzetük szerint térképekbe rajzolva megadják a tünemény láthatóságának teljes zónáját, melynek szélessége nyilván a teljes fogyatkozás esetében a holdárnyék földfelületi átmetszetével

azonos; és a ki a térképvetités tanaiban csak némi jártassággal bir, könnyű szerrel képes lesz úgy a hold-, mint a napfogyatkozásokra nézve előadott mechanikai megoldást sokkal nagyobb pontossággal tisztán graphikailag is eszközölni. Én ezen tisztán mechanikai eljárásokat mutattam be; jó oldaluk a nagyobb áttekinthetőség, melyekre azután graphikus módszerek már könnyű szerrel alapithatók.

Kövesligethy Radó.

A SURLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Harmadik közlemény.)

9. Legyenek a mozgópont koordinátái t időben x, y, z, és legyen tömege $m = 1$. Jelöljük a pályagörbe t időbeli érintőjét, első görbületi sugarát és a másodikat v, ρ, β-val; továbbá az adott szilárd felület normálisát és érintősikját az x, y, z pontban n illetve S-sel, a v sebesség projekcióját az S síkra jelöljük f-fel és végül az n és f egyenesek közös normálisát b-vel.

A tömegpontra ható szabad erő legyen P, míg a felület ellenállását két komponensre bontjuk. A felület *reakczió erejének* azt az erőt nevezzük, melyet a rajta mozgó pontra az ezen a helyen vont normális irányában gyakorol; a felület *súroló erejének* pedig azt az erőt, melyet az ő érintő síkján az f relativ sebességgel épen ellenkező irányban kifejt.

A mozgási egyenletek fölirására ugyanazok a meggondolások vezetnek, mint az előbbi fejezetben. Ugyanis a tömegpont összes gyorsulásának komponensei a v, ρ, β koordináta-rendszerben

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{\rho}, \quad 0;$$

másrészről ezt a gyorsulást létrehozzák a P, F, N gyorsító erők, melyek közül az utóbbi kettő iránya az f illetve n egyenesekével összeesik. Ezen okból a gyorsulás és a vele æquivalens gyorsító erőknek az f, n, b irányokra való projicziálása révén a következő egyenletek irhatók fel:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt}\cos(v, f) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, f) &= P\cos(P, f) - F, \\
\frac{dv}{dt}\cos(v, n) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, n) &= P\cos(P, n) + N, \qquad (22) \\
\frac{dv}{dt}\cos(v, b) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho, b) &= P\cos(P, b).
\end{aligned}$$

Ezek már a keresett mozgási egyenletek. Belőlük ugyanazon eljárással, mint az előbbi fejezetben, a felület összes ellenállásának meghatározására ugyanazt az egyenletet nyerjük, t. i. ezt:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2} + P^2 - 2P\left(\frac{dv}{dt}\right)\cos(v,P) + \frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,P) = F^2 + N^2. \quad (23)$$

10. Ha *az adott szilárd felület mozdulatlan*, akkor az egyenletek egyszerűbb alakot öltenek fel. Ekkor ugyanis a v és f sebességek azonosak lévén

$$(v,f) = 0, \quad (\rho,f) = (\rho,v) = \frac{\pi}{2},$$
$$(n,f) = (n,v) = \frac{\pi}{2}; \quad (24a)$$
$$(b,f) = (b,v) = \frac{\pi}{2},$$

továbbá a v sebesség iránya merőleges az n, b és ρ egyenesek irányára, minélfogva ezek ugyanabban a síkban fekűsznek; ámde $(n,b) = \frac{\pi}{2}$; azért a b értelmének kellő megállapitásával

$$(n,\rho) + (\rho,b) = \frac{\pi}{2}. \quad (24b)$$

A (24*a*) alattiak tekintetbe vételével a (22) mozgási egyenletek ezekké válnak:

$$\frac{dv}{dt} - P\cos(P,v) = -F,$$
$$\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,n) - P\cos(P,n) = N, \quad (25)$$
$$\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,b) - P\cos(P,b) = 0.$$

Ez egyenletek közül a második azonos a FRÖHLICH tagtárs úr dolgozatában* más úton levezetett egyenlettel, és úgy mint ott a $\rho = n\cos(\rho,n)$ MEUSNIER-tétel alkalmazásával ezen egyszerűbb alakban is irható:

* Mathematikai és Phys. Lapok 1893 pag. 256.

$$\frac{v^2}{n} - P\cos(P, n) = N. \qquad (25a)$$

A (25) alatti utolsó egyenletből pedig érdekes következtetéseket vonhatunk.

Tegyük föl, hogy a P erő a felület (x, y, z) pontjabeli ama normális síkban működik, mely a v sebességet ábrázoló vonalat tartalmazza, ekkor $\cos(P, b) = 0$ lévén, a nevezett egyenletből, — ha csak nem $\rho = \infty$, — az következik, hogy $\cos(\rho, b) = 0$. Szóval *ha a felület görbe, és az erő minden pontjában az anyagi pont sebességét tartalmazó normális síkban működik, akkor a pálya görbületi sugara a normálisba esik és* $\rho = n$; a pálya simuló síkja tehát egyszersmind a felület normális síkja, és így *a pályagörbe a felületnek geodétikus vonala.*

A pálya akkor is geodétikus vonal a felületen, a mikor a szabad erő $P = 0$.

Ha pedig a P erő nem ilyen specziális fekvésű, úgy hogy $\cos(P, b) \gtrless 0$, akkor egyszersmind $\cos(\rho, b) \gtrless 0$, és pedig a (25) egyenletek utolsója által meghatározott módon. Ennek az egyenletnek felhasználásával az N értéke a következő alakokban irható:

$$N = \frac{\cos(P, b)\cos(\rho, n) - \cos(P, n)\cos(\rho, b)}{\cos(\rho, b)} P,$$

$$N = \frac{\cos(P, b)\cos(\rho, n) - \cos(P, n)\cos(\rho, b)}{\cos(P, b)} \frac{v^2}{\rho}.$$

11. Megjegyzést érdemel, hogy az imént fölírt két tört közös számlálójának átalakításával az N a következőképen irható:

$$N = P \frac{\sin(P, \rho)}{\sin(n, \rho)} \cos A,$$

$$N = \frac{v^2}{\rho} \frac{\sin(P, \rho)}{\cos(P, b)} \cos A; \qquad (25b)$$

hol A az a szög, melyet a P és a b egyenesein át fektetett normális síkok egymással bezárnak.

Ugyanis tekintettel, hogy a v, n, b orthogonális rendszert alkotnak, ismeretes tétel szerint

$$\cos(P,\rho) = \cos(P,v)\cos(\rho,v) + \cos(P,n)\cos(\rho,n) + \\ + \cos(P,b)\cos(\rho,b);$$

úgy hogy $\cos(\rho,v) = 0$ folytán

$$-\cos(P,n)\cos(\rho,n) = \cos(P,b)\cos(\rho,b) - \cos(P,\rho)$$

és a (24*a*) egyenletet is tekintetbe véve

$$[\cos(P,b)\cos(\rho,n) - \cos(P,n)\cos(\rho,b)]\cos(\rho,n) \\ = \cos(P,b)\cos^2(\rho,n) + \cos(P,b)\cos^2(\rho,b) - \cos(P,\rho)\cos(\rho,b) \\ = \cos(P,b) - \cos(P,\rho)\cos(b,\rho).$$

Ámde ismeretes gömbháromszögtani tétel alkalmazásával

$$\cos(P,b) = \cos(P,\rho)\cos(b,\rho) + \sin(P,\rho)\sin(b,\rho)\cos A;$$

azért végül a (24*a*) ismételt alkalmazásával

$$\cos(P,b)\cos(\rho,n) - \cos(P,n)\cos(\rho,b) = \sin(P,\rho)\cos A;$$

és evvel a szándékolt átalakítás megvan.

12. Ha a surlódás alaptörvényét, mely szerint

$$F = kN$$

tekintetbe vesszük, akkor az F-et és N-et eliminálván a (25) egyenletekből, ered

$$\frac{dv}{dt} = P\cos(P,v) - k\left(\frac{v^2}{n} - P\cos(P,n)\right). \qquad (26)$$

$$0 = \frac{v^2}{n}\operatorname{tg}(\rho,n) - P\sin(P,n).$$

Ezek az egyenletek másodikából, miként a 10. pontban láttuk, az következik, hogy a midőn szabad erő nem hat az anyagi pontra, a pálya az adott kezdősebességhez tartozó geodétikus vonal.

A mozgási problema tehát geodétikus vonal meghatározását követeli; és ha ez megvan, a változó sebesség meghatározása tényleg elvégezhető az előbbi fejezetben leírt uton.

A pont sebességét e geodétikus vonalon ugyanis megnyerjük a (26)-ból $P = 0$ tevésével kiadódó

$$\frac{dv}{dt} = -k\frac{v^2}{n}$$

egyenlet megoldása révén. Ez egyenlet

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

folytán így irható

$$\frac{dv}{ds} = -k\frac{v}{n};$$

ha tehát az adott görbe felületen meghatározzuk az n görbületsugarat mint az s ívhossz függvényét, akkor ezen differenciálegyenlet megoldása csak az

$$\int\frac{dv}{kv} + \int\frac{ds}{n} = 0 \qquad (27)$$

egyenletben jelölt quadraturák végzését követeli meg, a mi tekintettel arra, hogy a k surlódási együttható csakis a v függvénye, mindig eszközölhető.

Az imént bebizonyított tétel Mayertől ered.

De miként láttuk, a pálya akkor is geodétikus vonal, ha *az erő a pálya minden pontjában a pálya érintőjén áttett normális síkban működik.* Ekkor úgy n, mint P és $\cos(P,n) = \sin(P,v)$ értékei meghatározandók a geodétikus vonal minden pontjában mint az s ívhossz függvényei; meghatározott értékeiket behelyettesítvén, a (26) alatti első egyenlet ezt az alakot veszi fel:

$$v\frac{dv}{ds} = f_1(s) - k\left(\frac{v^2}{n} - f_2(s)\right).$$

Ez az egyenlet pedig azonos az előbbi fejezetben tényleg megoldott differenciálegyenlettel.

Ha tehát van a felületen olyan geodétikus vonal, melynek simuló síkjai az erők egyeneseit tartalmazzák, akkor a vonal érintője irányában bármekkora sebességgel induló pont a geodétikus vonal mentén halad tova, és mindenkori sebességének értéke határozott integrálok kiszámításával adódik ki.

Ha pl. súlyos pontnak adott felületen surlódással járó mozgásáról van szó, és van a felületnek olyan geodétikus vonala, melynek simuló síkjai függélyesek, akkor e vonal érintője irányában ellódított anyagi pont a geodétikus vonalon marad, és mindenkori sebessége az előbbi fejezetben tárgyalt módon quadraturával tényleg kiszámítható.

Réthy Mór.

A KÖRMÉRÉS ELMÉLETE ÉS TÖRTÉNETE.

(Kilenczedik és befejező közlemény.)

Az e és π számok transzczendens voltának egyszerűsített bebizonyítása.

HILBERT, HURWITZ és GORDAN rövidítései és egyszerűsítései után az e és π számok transzczendens voltának bebizonyítása következőképen eszközölhető.

1. Induljunk ki az exponenciális sor maradéksorának vizsgálatából. Az

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^r}{r!} + \cdots$$

kitevős sor

$$R_n = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{x^{r+2}}{(r+2)!} + \cdots + \frac{x^{r+k}}{(r+k)!} + \cdots,$$

maradéksorának tagjai abszolut értékre nézve rendre kisebbek mint a következő sor tagjai:

$$\frac{|x|^{r+1}}{r!\,1!} + \frac{|x|^{r+2}}{r!\,2!} + \cdots + \frac{|x|^{r+k}}{r!\,k!} + \cdots,$$

melynek összege

$$\frac{|x|^r}{r!}(e^{|x|} - 1).$$

Tehát

$$|R_n| < \frac{|x|^r}{r!}(e^{|x|} - 1),$$

s innen

$$|R_n| < \frac{|x|^r}{r!}(e^{|x|},$$

vagy részletesebben kiírva

$$(1)\quad \left|e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{x^r}{r!}\right)\right|<\frac{|x|^r}{r!}e^{|x|}.$$

Legyen most már adva valamely

$$g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_rx^r+\cdots+c_sx^s$$

s-ed fokú egész függvény, továbbá jelentse $G(x)$ a $g(x)$-nek és első s differenciálhányadosának összegét.

Akkor

$$G(x)=\sum_{r=0}^{s}c_r\,r!\left(\frac{x^r}{r!}+\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}+\cdots+\frac{x}{1!}+1\right)$$

és

$$G(0)=\sum_{r=0}^{s}c_r\,r!,$$

továbbá

$$e^x\,G(0)-G(x)=\sum_{r=0}^{s}c_r\,r!\left\{e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}\right)\right\}$$

Innen

$$|e^x\,G(0)-G(x)|\leqq\sum_{r=0}^{s}|c_r|\,r!\left|e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}\right)\right|$$

és ha a jobb oldal tagjaira rendre az (1) alatti egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor végre:

$$|e^x\,G(0)-G(x)|<e^{|x|}(|c_0|+|c_1|\,|x|+|c_2|\,|x|^2+\cdots+|c_s|\,|x|^s)$$

Ezzel be van bizonyítva a következő

I. **Segédtétel**: *Ha $G(x)$ valamely $g(x)$ egész függvénynek és összes differenciálhányadosainak összegét jelenti, $\gamma(x)$ pedig az a ráczionális egész függvény, melynek együtthatói a $g(x)$ együtthatóinak abszolut értékeivel egyenlők, akkor*

$$(2)\qquad |e^x\,G(0)-G(x)|<\gamma(|x|)\,e^{|x|}$$

2. *Az e szám transzczendens voltáról.* Annak eldöntésénél, hogy valjon az e szám eleget tehet-e valamely

$$(3)\qquad C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots+C_re^r+\cdots+C_ne^n=0$$

ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, képezzük a

$$g(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)^p(2-x)^p \ldots (r-x)^p \ldots (n-x)^p$$

egész függvénynek és valamennyi differenciálhányadosának összegét: $G(x)$-et. Itt p a $|C_0|$-nál és n-nél nagyobb törzsszámot jelent.

Továbbá szorozzuk meg a (3) alatti egyenlet baloldalát $G(0)$-sal, a nyert

$$(4) \qquad G(0)(C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots+C_re^r+\cdots+C_ne^n)$$

kifejezésben helyettesítsük

$$eG(0),\ e^2G(0),\ \ldots,\ e^rG(0),\ \ldots,\ e^nG(0)$$

helyébe rendre

$$G(1),\ G(2),\ \ldots,\ G(r),\ \ldots,\ G(n)$$

-et s jelöljük az ily módon keletkezett

$$(5) \quad C_0G(0)+C_1G(1)+C_2G(2)+\cdots+C_rG(r)+\cdots+C_nG(n)$$

összegnek a (4) alatti szorzattól való eltérését ε-nal, úgy hogy

$$(6) \qquad G(0)(C_0+C_1e+C_2e^2+\cdots+C_re^r+\cdots+C_ne^n)=$$
$$C_0G(0)+C_2G(1)+C_2G(2)+\cdots+C_rG(r)+\cdots C_nG(n)+\varepsilon.$$

Az (5) alatti összeg egy p-vel nem osztható ráczionális egész számmal egyenlő.

Ha ugyanis $g(x)$-et x hatványai szerint rendezzük, akkor

$$g(x) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!}(n!\,x^{p-1}+C_{00}x^p+C_{01}x^{p+1}+C_{02}x^{p+2}+\cdots+C_{0,np-1}x^{np+p-1}),$$

hol a C együtthatók ráczionális egész számok. Innen

$$G(0)=n!+p(C_{00}+C_{01}(p+1)+C_{02}(p+1)(p+2)+\cdots).$$

Az $n!$ csupa p-nél kisebb szám szorzata, tehát nem osztható p-vel. Ellenben $G(0)$ második része osztható p-vel. Maga $G(0)$ ennélfogva nem osztható p-vel.

Ha másrészt $g(x)$-et $(x-r)$ hatványai szerint rendezzük, hol r az n-nél nem nagyobb közönséges egész számot jelent, akkor

$$g(x) = \frac{1}{(p-1)!}(C_{r0}(x-r)^p + C_{r1}(x-r)^{p+1} + C_{r2}(x-r)^{p+2} + \cdots),$$

hol a C-k megint ráczionális egész számok; továbbá innen

$$G(r) = p(C_{r0} + C_{r1}(p+1) + C_{r2}(p+1)(p+2) + \cdots)$$

tehát $G(r)$ a p-vel osztható egész szám.

Az (5) alatti összegben e szerint az első tag egy p-vel nem osztható egész szám, a többi tagok pedig mindannyian p-nek többszörösei; ennélfogva maga az összeg csakugyan egy p-vel oszthatatlan egész számmal egyenlő.

A mi ε-t illeti, úgy ez p alkalmas választásával tetszőlegesen kicsinnyé tehető.

Ugyanis segédtételünk értelmében

$$|e^r G(0) - G(r)| < \gamma(r)\, e^r, \tag{7}$$

hol

$$\gamma(r) = \frac{r^{p-1}}{(p-1)!}(1+r)^p\,(2+r)^p \cdots (n+r)^p.$$

Itt r legfeljebb n-nel egyenlő, tehát

$$\gamma(r) \leqq \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}(1+n)^p\,(2+n)^p \ldots (2n)^p,$$

s ha rövidség kedvéért

$$K = (1+n)\,(2+n) \ldots 2n$$

és

$$k = n(1+n)\,(2+n) \ldots 2n,$$

tesszük, akkor

$$\gamma(r) \leqq \frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Ezt és a (7) alatti relácziót tekintetbe vévén, lesz továbbá

$$|e^r\, G(0) - G(r)| < \frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}\, e^r$$

s innen

$$\left| \sum_{r=1}^{n} C_r [e^r G(0) - G(r)] \right| < \frac{K k^{p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=1}^{n} |C_r| e^r.$$

Itt a bal oldalon ϵ abszolut értéke áll. A jobb oldalon k a p választásától független állandót jelent, tehát

$$\frac{k^{p-1}}{(p-1)!}$$

tetszőlegesen kicsinynyé tehető, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Ugyanez áll egyenlőtlenségünk egész jobb oldaláról, mert

$$K, \sum_{r=1}^{n} |C_r| e^r$$

állandó tényezők.

Egyenlőtlenségünk értelmében tehát ϵ abszolut értéke csakugyan tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

Az (5) alatti összegről s az ϵ-ról mondottak szerint a (6) alatti egyenlőség jobb oldalának mindig a zérustól különböző értéke lesz, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Ennélfogva ugyanott a bal oldal második tényezője szintén nem lehet zérus, vagyis e nem elégíthet ki semmiféle ráczionális egész együtthatókkal biró algebrai egyenletet, hanem *transzczendens* szám.

3. A ludolfi számra vonatkozó analog vizsgálat előtt bizonyítsuk még be a következő

II. Segédtételt. *Ha α valamely*

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

ráczionális egész együtthatókkal biró algebrai egyenletnek tesz eleget, továbbá

$$g(x) = \frac{(a_0 x)^{p-1}}{(p-1)!} [a_0^{n-1} f(x)]^p,$$

hol p valamely törzsszámot jelent, végre $G(x)$ a $g(x)$-nek és differenciálhányadosainak összege, akkor

$$G(\alpha)$$

egyenlő valamely algebrai egész számnak p-szeresével.

Ugyanis rendezzük $g(x)$-et

$$z=x-\alpha$$

hatványai szerint; akkor

$$\frac{1}{p}g(x)=\frac{1}{p}g(z+\alpha)=$$

$$\frac{a_0^{np-1}}{p!}(K_0(\alpha)z^p+K_1(\alpha)z^{p+1}+\cdots+K_i(\alpha)z^{p+i}+\cdots+K_{np-1}(\alpha)^{np+p-1}),$$

hol K_i az α-nak ráczionális egész együtthatókkal biró s legfeljebb $(np-i-1)$ fokú egész függvénye. Innen

$$\frac{1}{p}G(\alpha)=a_0^{np-1}(K_0(\alpha)+(p+1)K_1(\alpha)+(p+1)(p+2)K_2(\alpha)+\cdots),$$

hol a jobb oldalon a zárjelben α-nak ráczionális egész együtthatókkal bíró s legfeljebb $(np-1)$-sö fokú egész függvénye áll. Legyen ez:

$$C_0+C_1\alpha+C_2\alpha^2+\cdots+C_{np-1}\alpha^{np-1},$$

akkor

$$\frac{1}{p}G(\alpha)=$$

$$=C_0a_0^{np-1}+C_1a_0^{np-2}(a_0\alpha)+C_2a_0^{np-3}(a_0\alpha)^2+\cdots+C_{np-1}(a_0\alpha)^{np-1}$$

azaz $\frac{1}{p}G(\alpha)$ az $a_0\alpha$-nak ráczionális egész együtthatókkal biró egész függvénye.

Az $a_0\alpha$ szorzat eleget tesz az

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_0a_2x^{n-2}+a_0^2a_3x^{n-3}+\cdots+a_0^{n-1}a_n=0$$

egyenletnek, tehát algebrai egész szám s vele együtt bármely egész számú együtthatókkal biró egész függvénye is algebrai egész szám. Az $\frac{1}{p}G(\alpha)$ tehát algebrai egész szám és $G(\alpha)$ ennek p-szerese.

4. *A π számnak transzczendens voltáról.* Ha a ludolfi szám nem volna transzczendens, akkor vele együtt πi is algebrai szám volna, vagyis

$$x_1=\pi i$$

eleget tenne egy bizonyos ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletnek. Ha továbbá ennek többi gyökeit rendre

$$x_2, x_3, \ldots x_r$$

-rel jelöljük, akkor az

$$(e^{x_1}+1)\ (e^{x_2}+1)\ \ldots\ (e^{x_r}+1)$$

szorzat első tényezője, t. i.

$$e^{x_1}+1$$

zérus volna s vele együtt az egész szorzat is elenyésznék.

Ennélfogva a ludolfi szám transzczendens voltának kimutatására elég bebizonyítanunk azt, hogy *ha*

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

valamely ráczionális együtthatókkal biró algebrai egyenletnek összes gyökeit jelentik, akkor az

$$(8) \qquad (e^{x_1}+1)\ (e^{x_2}+1)\ \ldots\ (e^{x_r}+1)$$

szorzat értéke nem lehet zérus.

A vizsgálandó szorzat egyenlő az

$$1+e^{x_1}+\cdots+e^{x_r}+e^{x_1+x_2}+\cdots+e^{x_{r-1}+x_r}+\cdots+e^{x_1+x_2+\ldots+x_r}$$

összeggel, vagy rövidebben

$$\prod_{\lambda=1}^{r}(x^\lambda+1)=\sum_{\mu=0}^{2^r-1}e^{w_\mu},$$

hol a jobb oldalon álló összeg e-nek mindama hatványait tartalmazza, melyeknek kitevői az

$$w_\mu=\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_rx_r$$

képletből akként keletkeznek, hogy

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$$

helyébe a 0-ok és 1-esekből alkotható valamennyi értékrendszert helyettesítjük.

Ha itt az w_μ-kitevők között a zérussal egyenlőknek száma C, a zérustól különböző w_μ-ket pedig rendre

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

-nel jelöljük, akkor továbbá

$$\prod_{\lambda=1}^{r} (e^{x_\lambda} + 1) = C + \sum_{\nu=1}^{n} e^{\alpha_\nu}. \tag{9}$$

Az

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

számokhoz mindig található oly ráczionális egész együtthatókkal bíró n-ed fokú egyenlet

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

melynek épen az α_ν-k a gyökei.

Ugyanis a

$$\prod_{\mu=0}^{2^r-1} (x - w_\mu) = \prod_{\mu=0}^{2^r-1} (x - \varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2 - \cdots - \varepsilon_r x_r)$$

szorzat oly $\varphi(x)$ többtagúval egyenlő, melyben az együtthatók $x_1, x_2, \ldots, x_r$ szimmetrikus egész kifejezései, tehát ráczionális számok. E $\varphi(x)$-ből az $f(x)$ úgy adódik, hogy x-nek C-dik hatványával osztunk, továbbá valamely alkalmas egész számmal való szorzás segítségével az együtthatók nevezőit eltávolítjuk.

Legyen most már

$$g(x) = \frac{(a_0 x)^{p-1}}{(p-1)!} [a_0^{n-1} f(x)]^p,$$

hol p oly törzsszámot jelent mely nagyobb mint $|a_0|$, $|a_n|$ és 2^r, tehát egyszersmind nagyobb mint C és n is. Továbbá képezzük $g(x)$-nek és differenczialhányadosainak összegét: $G(x)$-et, és szorozzuk meg $G(0)$-sal a (9) alatti egyenlőség jobb oldalát.

A nyert

$$G(0)\left(C + \sum_{\nu=1}^{n} e^{\alpha_\nu}\right) \tag{10}$$

szorzatban helyettesítsünk $e^{\alpha_\nu} G(0)$ helyébe $G(\alpha_\nu)$-t s jelöljük az így keletkezett

$$(11) \qquad CG(0) + \sum_{\nu=1}^{n} G(\alpha_\nu)$$

összegnek a (10) alatti szorzattól való eltérését ε-nal, úgy hogy

$$(12) \qquad G(0)\left(C + \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu\right) = CG(0) + \sum_{\nu=1}^{n} G(\alpha_\nu) + \varepsilon.$$

Itt $CG(0)$ egy p-vel oszthatatlan ráczionális egész számmal egyenlő. Ugyanis $g(x)$-et x hatványai szerint rendezvén, leszen

$$g(x) = \frac{1}{(p-1)!}(a_0^{np-1} a_n^p x^{p-1} + C_0 x^p + C_1 x^{p+1} + \cdots),$$

a honnan

$$G(0) = a_0^{np-1} a_n^p + p(c_0 + C_1(p+1) + \cdots).$$

Itt a jobb oldal első tagja csupa p-nél kisebb szám szorzata, tehát nem osztható p-vel. Ellenben $G(0)$ második része osztható p-vel. Maga $G(0)$ ennélfogva nem osztható p-vel.

Minthogy továbbá C sem osztható a nálánál nagyobb p törzsszámmal, azért a $CG(0)$ sem osztható vele.

Ellenben

$$\sum_{\nu=1}^{n} G(\alpha_\nu) = G(\alpha_1) + G(\alpha_2) + \cdots + G(\alpha_\nu) + \cdots + G(\alpha_n)$$

a p-vel osztható ráczionális egész szám. Ugyanis ennek az összegnek egyes tagjai a II. segédtétel értelmében algebrai egész számoknak p-szeresei, tehát maga az összeg is egy bizonyos algebrai egész számnak p-szerese.

Még pedig ez az algebrai egész szám nem lehet irraczionális, mert a vizsgált összeg az α-kban szimmetrikus.

Ezeknél fogva

$$CG(0) + \sum_{\nu=1}^{n} G(\alpha_\nu)$$

valamely p-vel nem osztható ráczionális egész számmal egyenlő.

A mi ε-t illeti, úgy ez p alkalmas választásánál tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

Ugyanis I. segédtételünk szerint

$$(13) \qquad |e^{\alpha_\nu} G(0) - G(\alpha_\nu)| < \gamma(|\alpha_\nu|)\, e^{|\alpha_\nu|}$$

hol

$$\gamma(|\alpha_\nu|) = \frac{|a_0\alpha_\nu|^{p-1}}{(p-1)!}\left[|a_0|^{n-1}(|a_0||\alpha_\nu|^n+|a_1||\alpha_\nu|^{n-1}+\cdots+|a_n|)\right]^p.$$

Ha β alatt az α_ν-k abszolut értékei közül a legnagyobbat értjük, akkor

$$\gamma(|\alpha_\nu|) \leqq \gamma(\beta) = \frac{|a_0|^{p-1}\beta^{p-1}}{(p-1)!}\left[|a_0|^{n-1}(|a_0|\beta^n+|a_1|\beta^{n-1}+\cdots+|a_n|)\right]^p.$$

Legyen továbbá rövidség kedvéért

$$K=|a_0|^{n-1}(|a_0|\beta^n+|a_1|\beta^{n-1}+\cdots+|a_n|)$$

és

$$k=|a_0|^n\beta(|a_0|\beta^n+|a_1|\beta^{n-1}+\cdots+|a_n|),$$

úgy hogy

$$\gamma(|\alpha_\nu|) \leqq \frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!},$$

akkor a (13) alatti egyenlőtlenség folytán

$$|e^{\alpha_\nu}G(0)-G(\alpha_\nu)| < \frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}e^{|\alpha_\nu|}$$

és innen

$$\left|G(0)\sum_{\nu=1}^{n}e^{\alpha_\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}G(\alpha_\nu)\right| < \frac{Kk^{p-1}}{(p-1)!}\sum_{\nu=1}^{n}e^{|\alpha_\nu|}$$

Itt a bal oldalon ε abszolut értéke áll, a jobb oldalon pedig oly kifejezés, melynek értéke tetszőlegesen kicsinynyé tehető, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Egyenlőtlenségünk értelmében tehát ε abszolut értéke csakugyan tetszőlegesen kicsinynyé tehető.

A (11) alatti összegről és ε-ról mondottak szerint a (12) alatti egyenlőség jobb oldalának mindig a zérustól különböző értéke lesz, ha csak p-t eléggé nagynak választjuk. Emiélfogva ugyanott a bal oldal második tényezője, mely a (8) alatti szorzattal egyenlő, sem lehet zérus. *Tehát π nem lehet algebrai szám.*

Történeti áttekintésünkben eljutottunk a legrégibb reánk maradt emléktől a legujabb mozgalmakig. Bárha soraimmal sikerült volna tiszteletet gerjesztenem a multnak eredményei és érdeket a jelen munkálkodása iránt.

Kürschák József.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Kis légnyomások megméréséről. A levegő nyomásának csökkenését a légszivattyúban rendesen kurtított barometerrel, az u. n. manometer csővel mérik. Ezzel a készülékkel a nyomás legjobb esetben is legfölebb 0,1 mm. pontossággal mérhető.

A légszivattyúkkal elérhető nyomásokat gyakran csak nagyjából megbecsülik. Igy tudva van, hogy a radiometer 0,04 mm. nyomás alatt élénkebb forgásba jön a fény behatása alatt; a CROOKES-féle tünemény 0,01 mm.; a levegő spectruma 0,1 mm. nyomásnál áll elő legélesebben. Ha tehát valamely szivattyúval ilyen csöveket összekötünk, akkor e tünemények bekövetkezéséből a nyomás nagyságára vonhatunk következtetést.

Ha 0,1 mm. légnyomásnál kisebb, például 0,01, 0,001, sőt 0,00001 mm. nyomásokat kell mérni, akkor más szerkezetű manometerek jönnek alkalmazásba.

Az elv, melyen az ilyen manometerek szerkesztése alapul, 1832-ből ARAGO és KUPFFER-től származik. Ugyanezen elven szerkesztette Mc. LEOD* amerikai fizikus a róla nevezett manometerét.

A Mc. LEOD-féle *manometer lényege abban áll, hogy vele ismert térfogatú és nagy ritkitású levegő, ugyancsak ismert, de sokkal kisebb térfogatba szoríttatik össze, mikor is a vele közlekedő csőben a nyomás annyiszor nagyobbnak mutatkozik, ahányszorosan előbbi térfogata összeszoríttatott.*

Az ábrában egy SCHULLER-féle ** szivattyú fő testrésze látható, olyan alakban, hogy az egyszersmind Mc. LEOD-féle manometert képez, mellyel a nyomás 0,00001 milliméterig mérhető.

Az itt feltüntetett változtatást abból a czélból tettem az eredeti SCHULLER-féle önműködő higanyos légszivattyún, hogy vele magának a szivattyúnak ritkító képessége meghatározható legyen.

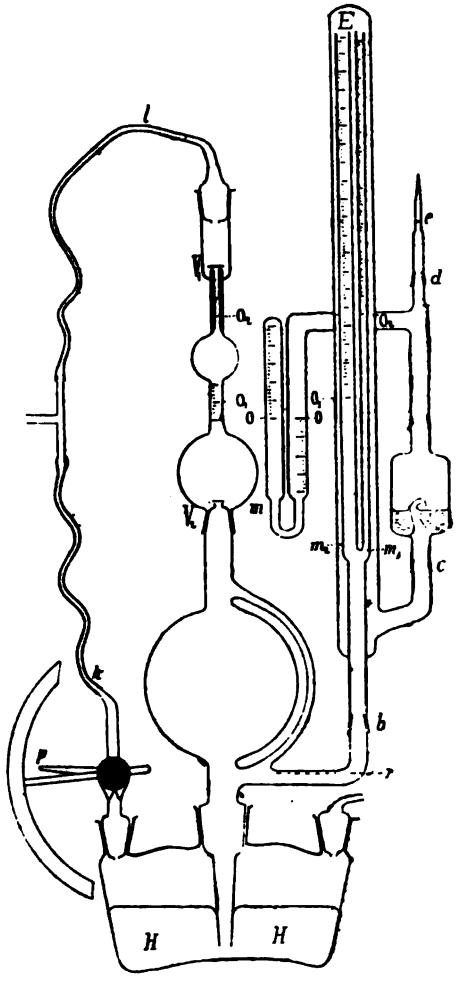
---

* Phil. Mag. 4. XLVIII. p. 110, 1874.

** Közölve a M. T. Akad. Ért. a term. tud. köréből. XI. k. 8. szám és Wied. Ann. Bd. 13. S. 528.

A szivattyú főrészei a következők:

Alul, mint a rajzon látható, egy 3 nyakú erős falu Woulf-féle palaczk van, melynek nyílásaiba 3 köszörült dugó illik. A dugók közül a bal-



oldalon levőre 3 furásu csap van forrasztva, a csap fejére pedig egy kar segélyével fém köriv van ragasztva. A csap 2 szára vékonyra van kihúzva és pedig ezek közül a vízszintes szárnak olyan kicsi a nyílása, hogy rajta a levegő csak lassú áramban hatolhat keresztül a nagy palaczkba. A jobb-

oldali beköszörült dugót a készülék könnyű megérthetése szempontjából képzeljük teljesen bezártnak. Ez a rész a teljesen felszerelt készüléknél a regulátorhoz vezet, melyet itt egyszerűség okáért elhagyunk. A palaczk középső nyilásába a Mc. Leod-féle manometerrel fölszerelt szivattyú van jól záró köszörüléssel beillesztve.

A *G* golyó felső szárán, valamint az erre reá csiszolt kettős golyóval ellátott csőrészleten felfelé nyíló és lefelé teljesen záró V_1 V_2 kis üveglapból álló szelepek ülnek. A teke oldalán, a *b*-vel jelölt köszörülésen egy hosszabb cső ül, melybe egy *U* alakú cső van forrasztva. Ez utóbbinak egyik ága, m_2 4 mm. — a másik ág, az m_1, 1 mm. belső átmérőjű. Maga az *E* cső arra való, hogy a golyókban fel-alá járó higany ne mehessen be a *c* köszörülésen üló szárítóba, s ezen keresztül a szivattyúzott részekbe. (Az *E* cső a palaczkban levő higany felszinétől 80—85 cm. magasságban végződik, s így a barometer állásnál magasabb.) Az *U* alakú cső két szára felül az *E* csőbe nyílik.

A tömény kénsavat rejtő szárító egy rövid manometerrel közlekedik. Az *e* cső arra való, hogy a kiszivattyúzandó üvegedény, például a Geissler-féle cső, reá forrasztassék.

A Mc. Leold-féle manometer szerkesztése czéljából — alkalmazandó a fentebbi elvet, — az egyes részek térfogatát a következőkép állapítottam meg. A nagy üveggolyó ürtartalma egészen v_1 szelepig 1000 cm³-től v_1-től O_1-ig 1 cm³, v_1-től O_2-ig 0,1 cm³. Mindezen térfogatok pontosan mérlegelt higany segítségével határoztattak meg. Így tehát a nagy golyó térfogatának 0,001 ill. 0,0001 része van a készüléken kijelölve.

Az O_1 és O_2 vonásokkal jelölt vízszín az *E* csőbe zárt manometer megfelelő keresztmetszetű ágain is meg van jelölve.

Ez a manometer a jelen esetben 0,00001 millimeter nyomás mérésére is alkalmazható. Utóbbi esetben 0·1 mm-nyi közt kell leolvasnunk, 1 mm. pedig 0,0001 millimeter nyomásnak felel meg rajta.

Hogy az így elkészült manometerrel való bánás könnyen meg legyen érthető, képzeljük hogy a *k* és *l* nyílások egy T alakú cső révén közlekednek. Fogjunk be ezen cső közös oldalszárán egy vízlégszivattyút, vagy bármiféle szivattyút s legyen a 3 furatú csap olyan helyzetben, hogy a *p* kis nyíláson át a palaczk a külső levegővel közlekedjék, mikor is *K* nyílást a csap a palaczktól elzárja. Ha a szivattyú működik, akkor a nagy golyóban, mert *l*-nél ritkítunk, a higany egészen v_1 szelepig felemelkedik s a levegőt maga előtt kitolja.

Ha most a 3 fúratú csapot elfordítjuk, a *p* nyílás bezárul, *K* pedig a palaczkkal összeköttetésbe jön, a szivattyú a benne levő levegőt szivatytyúzni kezdi, s ennek következtében a golyóban levő higany leesik. Ugyde v_1 v_2 szelepek lefelé zárván, a tekében Torricelli-féle ür keletkezik,

melybe, mihelyt a higany r pontig leesett, az oldalcsövön át a ritkítandó térből beömlik a levegő: tehát a ritkítás megindul. A csapot újra elfordítván, a higany újra felemelkedik, s kihajtja a szelepen keresztül a golyóba beáramlott levegőt. Ez a játék folyton ismétlődik. A csap forgatását a SCHULLER szivattyúnál egy igen elmés és egyszerű regulator eszközli.*

Ha már most a ritkítás fokát mérni akarjuk, a higanyt csak a nagy golyó felett levő O_1 ill. O_2 vonásig hagyjuk felemelkedni, — a mi a csap lassú, óvatos elfordításával igen könnyen elérhető — és a jobboldali csöveken az O_1 vagy O_2 vonás felett millimeterekben olvassuk le a nyomás nagyságát. Az m_1 ill. m_2 ágon leolvasott 1 mm. 0,001 s ill. 0,0001 mm. nyomást jelent. Ha a leolvasás 0,1 mm. pontosságú, a nyomás is megfelelően kisebb.

A mérés alatt v_1 szelepnek okvetlen zárva kell lennie, különben a mérés hasznavehetetlen. A kapilláris hatásokból eredő hiba azáltal van kizárva, hogy a nagy teke felett levő O_1 és O_2 szűk csövek az ugyanolyan keresztmetszetű m_2 és m_3 csövekből vannak levágva.

Ilyen mérőeszköz segélyével a SCHULLER-féle szivattyú működési képességére vonatkozólag a következő adatokat találtam:

Két egyforma szivattyút vizsgálván, az egyikkel 57 szívás után a ritkítás határa 0,00015 mm., a másiknál 71 szivás után a nyomás 0,00003 mm. volt a mi 0,000005 ill. 0,0000025 légköri nyomást jelent.

A szivattyúk egyike a Stuttgarti polytechnikumon HELL tr. tulajdona, másika laboratoriumomban van felállítva.

Meg kell még jegyeznem, hogy az ilyen módon mért nyomások csak *partiális nyomások*, mert csak a kiszivattyúzott térben levő levegő nyomását mutatják, ellenben a szivattyú minden részét betöltő telitett higanygőz nyomását nem vagyunk képesek ezen eljárással megmérni, még akkor sem, ha absorbeáló anyagokat alkalmazunk, mivel a higanygőzt azokkal teljesen elnyeletni még eddig nem sikerült. BESSEL-HAGEN pedig kimutatta, hogy a higanygőz nyomása ily körülmények között 20°-nál még mindig 0,2 mm.-t teszen ki.

Ir. Kiss Károly.

* L. i. h.

A Mathematikai és Physikai Társulat második rendes közgyűlése.

A f. é. május hó 12-re hirdetett közgyűlés alkalmából a társulati tagok d. e. 9 órakor összegyűlvén, b. Eötvös Lóránd elnök melegen üdvözli a szép számban megjelenteket. Kiemeli, hogy épen úgy mint az első közgyűlést, a mostanit is arra kívánjuk felhasználni, hogy egymástól tanuljunk s egymás társaságában néhány kellemes órát töltsünk s ekként munkakedvünket kölcsönösen fokozzuk s a társulati összetartást szilárdítsuk. Külön is üdvözölvén a szép számban megjelent vidéki tagtársakat, felkéri Dr. Klupáthy Jenő r. tagot, hogy a közgyűlés alkalmára hirdetett előadását megkezdeni szíveskedjék.

Dr. Klupáthy J. az *állandó elektromos áram méréséről* tárgyaló előadását 9 órakor megkezdi; előadása, leszámítván az üdülésre szánt $^1/_2$ órai időt, $12^1/_2$ óráig tartott.

Előadását, mely különösen a tanítás szempontjából fontos, egész terjedelmében fogjuk közölni.

*

A társulat tagjai d. u. 3 órakor az *Első Magyar Villamossági Részvény Társulat* középponti telepén találkoztak s ennek beható megszemlélése után az *Általános Villamossági Részvény Társulat* telepére mentek át.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

B. Eötvös Loránd elnök a közgyülést a következő szavakkal nyitja meg:

Tisztelt Tagtársaim!

Megalakulásunk óta ez a második rendes közgyülés, a melyen Társulatunk ügyeit nyilvánosan fogjuk megbeszélni. Tavalyi összejövetelünk alkalmával, mely mindegyikünk emlékezetében, de különösen az enyémben, mint egy kedves és jó kezdet áll elénk, ezen része összejövetelünknek, a közgyülési tárgyalás, lehetőleg rövid volt és én azt hiszem, rövid lesz a mai tárgyalásunk is, a mint rövidek lesznek a jövendőben is, mert

én azt gondolom, hogy mi nem ülésekben való együttes tanácskozásokban, hanem mindannyian a magunk munkájával igyekezünk előmozdítani közös czélunkat, mely nem más, mint hogy kedvelt tárgyainkat: a mathematikát és a physikát a magunk örömére, hazánk tudományosságának és iskoláinak hasznára tőlünk telhetőleg míveljük s ebben egymást támogassuk.

Összejövetelünknek az is a czélja, hogy évenként legalább egyszer kezet szoríthassunk, egymástól tanuljunk s egymás lelkesedéséből a magunkét tápláljuk.

Titkárunk jelentésében el fogja mondani mindazt, a mi fontos dolog Társulatunk második évében történt, a mik között, nem kétlem, lesznek olyan dolgok is, melyek Társulatunkra nézve kedvezők és haladását tüntetik fel.

De én is akarok két örvendetes jelenséget megemlíteni, a melyekből Társulatunk felvirágoztatására következtethetünk.

Az egyik, a miről a társulat ügyvivő titkára részletesebben fog jelentést tenni, hogy eddigi eljárásunk és működésünk már is bizalmat keltett a Társulat munkaképessége iránt a kivülállók körében is. Meg fogja említeni a minket megtisztelő megbizást, melyet a nagyméltóságú vallás- és közoktatásügyi ministeriumtól nyertünk, midőn megbizott, hogy a milleniumi kiállításra physikai mintagyüjteményt állítsunk össze. Ez az eszme, melyet mi már előbb is felvetettünk, most meg fog valósulhatni a kormánytól igért támogatás mellett és büszkeségünkre válhatik, hogy Társulatunk fiatal, zsenge korában ily megtiszteltetésben részesültünk.

A második eseményről a titkári jelentés nem fog beszélni, mert arról a titkár hivatalosan egyelőre értesítve nincsen. Örömmel jelentem, t. Tagtársaim, hogy a múlt év folyamán a Math. és Phys. Társulat jelentékenyebb alapítvány birtokába jutott.

A természettudományok lelkes barátja, néhai báró Majthényi Ottó, kit a társulat tagjai közül sokan mint tanulótársukat ismertek akkor, midőn már teljes férfikorában az egyetemi előadások látogatására adta magát, s különösen a mathematikai és physikai tárgyakat tanulta, művelte nagy előszeretettel. Ez a mi buzgó szaktársunk egy végrendeletet hagyott hátra, melyben vagyonának nagy részét tudományos, kulturális és jótékony czélokra hagyta.

Úgy rendelkezett, hogy a hagyaték mirefordítása és felosztása iránt a végrendeletben megnevezett barátjai (báró Podmaniczky Frigyes, báró Lipthay Béla, Than Károly és báró Eötvös Loránd) rendelkezzenek. Ezen végrendeleti hagyomány sorsa, mint sok másé, az volt, hogy perrel támadtatott meg s az eredetileg nagynak contemplált adomány kicsiny összegre zsugorodott. 13,500 forint volt az összeg, mely a meg-

kötött egyezkedés után megmaradt alapítványi czélokra ez előtt úgy másfél esztendővel és melyről az örökhagyónak barátai rendelkezhettek. Ezen határozatnak alkalmazkodnia kellett a végrendelet ama pontjához, hogy egyenlő részekben tudományos, kulturalis és jótékony czélokra fordíttassék. Ezen tekintetből 3 egyenlő részre osztották és kimondották, hogy a kiosztás akkor történjék meg, midőn az összeg 15,000-re szaporodott, a mi a közel jövőben, még ez év folyamán meg is fog történni. Ebből a 15000 frtból a tudományos czélra szánt harmadot a megbizott férfiak a Mathematikai és Physikai Társulatnak adták, azt tartván szem előtt, hogy ezen tudományok azok, a melyekkel az örökhagyó legszivesebben foglalkozott s abban a meggyőződésben, hogy az ő szellemében intézkedtek.

Ezen 5000 frtos alapítvány előttünk becses lesz, mert nemcsak javát fogjuk élvezni, de szép emléket is fogunk kiséretében megőrizni: Majthényi emlékét, ki a tudomány igaz barátja és művelője volt. Ezen hagyomány biztosítás társulatunk fennállására s — vonatkozással az előbb említett megbizásra is — azt mondhatom, hogy ebben az évben egyszerre munkát és kenyeret kaptunk.

Hogyha a fennállásról szólunk, ne vegyük a szó szoros értelmében, hogy ez pl. megállás lenne, hanem legyen Társulatunk vezérelve, melyet mindig követni fog: a haladás és pedig nem valamelyes külső dísz dolgában — melyre nem vágyunk, — hanem minden egyes tag haladása.

Ezen kivánsággal újra üdvözlöm t. Tagtársaimat s a második közgyűlést ezennel megnyitottnak nyilvánítom.

Elnök bemutatja a múlt közgyűlés Farkas Gyula és Jedlik Ányos társulati tagoktól hitelesített jegyzőkönyvét. Minthogy a jegyzőkönyv a *Math. és Phys. Lapok* II. kötetének 209. és rákövetkező lapjain egész terjedelmében közöltetett, a közgyűlés felolvasottnak tekinti.

Ezzel kapcsolatban Elnök a következő szavakat intézi a közgyűléshez: Társulatunk első rendes tagja, Jedlik Ányos, ki az első közgyűlésen valamennyink örömére fáradhatatlanul részt vett minden előadásunkon, ülésünkön és szórakozásunkban, nagy sajnálatunkra ez alkalommal nincsen közöttünk. Sajnáljuk őszintén, valamennyien, hogy ezen legérdemesebb tagtársunk jelenlétének ezúttal nem örvendhetünk; de legalább az a megnyugvásunk van, hogy nem komoly baj tartotta vissza az utazástól, mely baj miatt a M. T. Akadémia nagygyűlésén, melyen különben mindig megjelent volt, sem vehetett részt. Nagy korához képest jól érzi magát, csupán csak a járás esik neki egy idő óta nehezére, de a baj múló természetű s remélhető, hogy jövő közgyűlésünkön ismét körünkben üdvözölhetjük. Azt hiszem, hogy a jelenlevők mindegyikének kivánságát fejezem ki, midőn azt indítványozom, hogy a közgyűlés nagyérdemű tudósunkat, első tag-

társunkat üdvözöljük, mély tiszteletünknek és szeretetünknek jegyzőkönyvünkben is kifejezést adjunk.

(A közgyűlés zajos éljenzéssel határozattá emelte az indítványt.)

A II. közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítésére elnök Fényes Dezső és Hlatky Miklós tagtárs urakat kérte fel.

2. Titkári jelentés, Bartoniek Gézától.

Midőn a Math. és Phys. Társulat működésének II. évéről jelentésemet előterjeszteni bátorkodom, mindössze néhány perczre kell becses türelmüket fárasztanom.

Jelentésem azért lehet rövid, mert a társulat működése t. Tagtársaink előtt ismeretes, mert azon mederben folyt, melyet az I. közgyűlés helyesnek ismert el.

A társulat működésének legfontosabb eszközei a rendes üléseken tartott előadások s a folyóirat. Rendes ülést a társulat 11-et tartott, melyen 20 tagtársunk 21 különböző tárgyról értekezett. 20 előadó, 21 előadási tárgy, nem soknak látszik az előadások egy évi ciklusában. Ámde tudvalevő dolog, hogy a statisztikai számok többféle magyarázatot türnek meg. Nem fogja keveselni ezt a számot az, a ki fontolóra veszi, hogy egyes előadóink szaktárgyuk mily terjedelmű részét ölelték fel aránylag rövid s épen ez okból nagy szellemi munka árán kidolgozott előadásukban: ellenkezőleg, nagy súlyt fog e számnak tulajdonítani. Nem tagadható azonban annak a nézetnek jogosultsága sem, mely előadásainkban nagyobb változatosságot, több élénkséget szeretne látni, egy-egy előadásunkon nem egy- vagy két nagyobb, hanem több apróbb tárgynak fejtegetését meghonosítani. Ha erre a mindnyájunk előtt helyesnek tartott útra csak habozva térünk, ezt leginkább a kezdőket — pedig azok vagyunk — jellemző túlbuzgalomnak tulajdonítható. Megnyugtató, hogy a jó akarat s a képesség a társulat tagjaiban erre is meg van, a hozzá szükséges tapasztalatot pedig épen a működés első évei fogják megadni.

Az ülések ezen társulati évben is élénk látogatottságnak örvendtek, bizonyságául annak, hogy az érdeklődés nem csökkent, s a társulati összetartás az idő folyamán lazulást nem szenvedett.

Az előadások szövege folyóiratunkban nagy részt megjelent, a többi pedig legközelebb meg fog jelenni s így azon t. tagtársaink hasznára és ítélete alá is esik, kik rendes üléseinken részt nem vehettek.

A Math. és Phys. Lapok II. kötete 27½ iven jelent meg s összesen 47 tagtársunk közleményeit foglalja magában. Mint különösen örvendetes tényt legyen szabad kiemelnem, hogy a szerzők között ezúttal is sok új nevet találunk, mely társulatunk folyóirata révén került az irodalomba,

ösztönözvén szerzőjét s többi tagtársainkat további munkálkodásra. — Megvallom, az egyes füzetek összeállítása, a mióta a választmány a szerkesztőket arra kötelezte, hogy a társulat pénzügyeire való tekintetből a füzetek három ívnél nagyobb terjedelműek ne legyenek, nem ritkán nehézséggel járt. Egész rovatokat voltunk kénytelenek egyes füzetekben a takarékosságnak áldozatul hozni s nehezen várjuk az időt, hogy az I. évfolyamban kipróbált négy íves füzetre térhessünk át, melyben összes rovataink helyet találhatnak s lehetővé válik, hogy mindig több és több munkaerőt vonhassunk be a közös működésre.

A választmány a II. társulati évben öt ülést tartott. — A május 26-án tartott ülésen, napirenden lévén az I. közgyűlés után teendők megbeszélése, a választmány egybehangzó véleménye az volt, hogy a közgyűlés ezentúl is lehetőleg előadásokkal kapcsolatos legyen, hogy a vidékről felránduló t. Tagtársak fáradságukért kárpótoltassanak.

A legnagyobb nehézséget az időnek olyan megválasztása okozza, mely a legtöbb Tagtársunk érdekének és kívánságának legjobban megfelel. Nem is tudott a választmány pontosabb időmeghatározást tenni, mint a mit az alapszabályok mondanak, hogy t. i. a közgyűlés húsvét táján tartassék. Az egyetlen módnak, mely a nehézséget megszünteti, az látszik, melyet m. tisztelt Elnökünk jelölt volt meg. Az ő eszméje szerint a közgyűlésnek nem egy-két, hanem több, pl. nyolcz napra kellene terjednie. Ha ez idő alatt naponkint legfölebb két előadás tartatnék, máris lehetséges volna, hogy t. tagtársaink a szaktárgyak egyes részleteiről, az azokban tett haladásról egész cursusokat hallgathassanak meg s azonfelül még egyes hasznos műveleteket, pl. üvegfuvást, fémesztergályozást s több effélét elsajátíthassanak. M. t. Elnökünk igen kívánatosnak jelezte azt is, hogy a közgyűlés ne mindig Budapesten, hanem felváltva a fővárosban s a vidéken tartassék meg és pedig oly czélzattal, hogy a nagyobb városokban inkább a tudományos munka, kisebb helyeken pedig a tudományos törekvéseket hathatósan előmozdító társas szellem adja meg a közgyűlés szinezetét.

Kívánatos, hogy az eszméket t. Tagtársaink megszívleljék s ha helyesnek itélik, valósításukhoz maguk részéről hozzájáruljanak. — Természetes, a kérdésnek pénzügyi oldala van, melyet azonban egyelőre még nem tárgyalhatunk.

Ugyanez ülésén a választmány egy másik, igen fontos határozatot hozott. Megállapította, mily módon kíván a milleniumi kiállításon megjelenni. M. t. Elnökünk indítványára azt határozta a választmány, hogy a kiállításon a közép-iskola teljes physikai felszerelésével kíván megjelenni. A társulat czélja levén a tudományt a tanítás szolgálatába vinni, szempontunkból s a kiállítás igényeinek is a legmegfelelőbbnek mutatkozik, ha magunk részéről elkövetünk mindent arra nézve, hogy a jelenleg elterjedt, egységes terv

és czél nélkül létrejött, inkább a tanszerkészítő s a tanszerkereskedő, a legkülömbözőbb korok izlését és nézetét visszatükröztető készülékek helyébe a tudós tanítóét propagáljuk, a ki a tanítás s a tudomány követelményeit egyenlő mértékben tartja szemmel. Az ilyen gyűjtemény jó része nem kész, könnyen összevásárolható készülékekből fog létrejönni, de olyanokból, melyek a megállapított elveknek megfelelően újra lesznek készítendők. Egyik főelvünk az, hogy a gyűjtemény lehetőleg kevés, de csakis jó és sokoldalúan kihasználható darabokból állíttassék össze.

Fiatal társulatunk sikerének tekinthetjük, hogy a vallás- és közoktatásügyi minisztérium 1894. febr. 27-én 8054. sz. a. kelt leiratával társulatunkat egy ilyen minimális minta-gyűjteménynek a kiállítás számára való elkészítésére felszólította s a szükséges pénzösszeget rendelkezésünkre bocsátotta. Határozatunk ezáltal könnyebben végrehajthatóvá s egyúttal mélyen kihatóvá lett, mert ez alapon biztosan várható, hogy a megbizás révén a Math. és Phys. Társulat tagjainak közös működéséből eredő gyűjtemény a tanintézeteinkbe való bevonulásának útja s ezzel értékesülésének legjobb módja megnyittatott. Már most a társulat választmányán a sor, hogy a joggal hozzákötött várakozásoknak s a beléje helyezett bizalomnak teljes mértékben megfeleljen.

Egy másik, társulatunkat igen megtisztelő felszólítást vettünk a *Congrès international de bibliographie des sience mathématiques* intézőségétől. A mathematikusok ezen congressusa Poincaré elnöklete alatt elhatározta egy, a mathematikai munkákat felölelő bibliografia kiadását. A magyar szerzőktől eredő munkák összeállítására a congressus társulatunkat szólította fel, melynek választmánya Rados, Tőtössy, Kürschák, Tangl és Kopp tagtársakból álló bizottságot küldött ki a munkálat elkészítésére. A bizottság a reája bízott munkát nagy szorgalommal elvégezte, hálára kötelezvén vele társulatunkat, sőt a magyar tudományt is. Munkálata biztosíték arra nézve, hogy a magyar tudósok munkássága — legyen az kicsi, vagy nagy — igazságosan lesz ezen nagyfontosságú műbe bejegyezve. Legyen szabad hozzátennem, hogy Rados titkár-társam közbelépésére a bizottság magyar szempontból lényeges változtatást tett tervezetén, midőn a munkálat egyik fejezetének czímeül *Géometrie de Lobatschewsky* helyett *Géom. de Bólyai et Lobatschewsky* czímet fogadta el, elismervén ezzel a magyar mathematikusnak a geometria ezen ágának megalkotása körül szerzett nagy érdemeit.

Legyen szabad ezek után jelentenem, hogy a társulatnak mai napon 393 tagja van, folyóiratának pedig 32 előfizetője. Tagtársaink buzgóságára és a társulathoz való hűségére következtethetünk abból, hogy — igen kis kivétellel — tagsági díjaikat rendesen küldik be s ezzel módot adnak a folyóirat fentartására.

Fájdalom, szomorú kötelességet is kell teljesítenem. Tudomasom szerint

négy tagtársunkat, névszerint Czógler A., Ignics Boldizsár, Szabó Ferencz és Csernus László urakat ragadta el tőlünk a halál. Valamennyiök veszteség társulatunkra, de azt hiszem nem vétek a köteles kegyelet ellenében, midőn Czógler tagtársunk halálát ezen felül társulatunkat ért nagy csapásnak is mondom. Mi pótolja veszteségünket, melyet az ő nagy tudásában, páratlan szorgalmában, önzetlen lelkesedésében s — tegyük hozzá — hű barátságában mindenkorra elveszítettünk? Folyóiratunk egy gyászszegélyű lapján van fájdalmunk feljegyezve, de veszteségünket folyóiratunknak még ezután megjelenendő köteteibe beillesztett üres, fehér lapok tudnák csak méltóan és igazán kifejezni!

Végül még működésünk egyik lényeges tényezőjéről, bevételeinkről kell megemlékeznem. Fő bevételünk a tagsági díjakból van, mely az előfizetési díjakkal együtt mintegy 1400 frtot tesz ki; erre az összegre úgy látszik állandóan számíthatunk, sőt emelkedésére is reménykedhetünk. Annyira azonban sohasem fog emelkedhetni, hogy társulatunk költséges folyóiratát belőle fentarthatnók. Nagy hálával tartozunk a M. T. Akadémiának, mely ez évben is 1000 frttal segélyezte társulatunkat, nem kötvén semmi feltételt a segélyezéshez, bízván abban, hogy társulatunk, ha nem is míveli, de legalább előkészíti a neki kihasított foltján a talajt, melyen az Akadémia munkálkodik, s melyen a magyar tudományt és kultúrát felvirágoztatni, a nemzet javára gyümölcsözővé tenni szent feladata és egyetlen törekvése.

Ha t. Tagtársaink füzeteinket olykor soványaknak s ennélfogva nem elég tartalmasaknak találják, ne vádoljanak minket addig, míg az eredményt a folyóirat kiadására fordítható költségen meg nem mérték.

Reméljük, hogy idővel kedvezőbbé alakul mérlegünk s akkor szigorúbb elbirálást kérünk.

Hogy azonban az itélet ekkor se legyen kedvezőtlen, a társulat minden egyes tagjának kell buzgólkodnia. Ki milyen hatáskört választott magának a társulati működés sokféle ágazataiban, törekedjék azt úgy betölteni, mintha csupán csak tőle függne a társulat felvirágzása, mintha az ő dolgozata a folyóiratot színvonalon, mintha az ő forintja tartaná a pénztár mérlegét egyensúlyban.

Kérem a t. közgyűlést, méltóztassék jelentésemet tudomásul venni.

A közgyűlés a titkári jelentést tudomásul veszi.

3. A pénztárvizsgáló bizottságok jelentése.

A közgyűlés részéről kiküldött pénztárvizsgáló bizottság a következő jelentést adja:

T. közgyűlés! Alulirottak a Mathematikai és Physikai Társulat 1893. évi közgyűlésének megbizásából az első társulati év — mely 1892. év végeig terjed — számadásait megvizsgáltuk és rendben találtuk. Budapest, 1894. május 10-én. *Balog Mór, Bogyó Samu, Müller József.*

A választmány részéről kiküldött pénztárvizsgáló bizottság jelentése így hangzik:

Tekintetes Választmány! A tekintetes választmánynak f. évi április 5-én tartott üléséből kapott megbizatásunkban eljárván, május hó 5-én megvizsgáltuk a Mathem. és Physikai Társulat 1893. évi számadásait és azokat 2727 frt 81 kr. bevétellel és 2430 frt 96 kr. kiadással vagyis 296 frt 85 kr. pénztármaradványnyal rendben találtuk. A kiadások mind okmányokkal igazolva vannak. A bevételeket illetőleg, épen úgy mint más ilynemű társaságoknál, az ellenőrzésnek más módja nincsen, minthogy minden tag kisérje figyelemmel a folyóirat borítékán levő nyugtatványozást. Ezeknél fogva indítványozzuk, hogy a választmány a maga részéről adja meg a pénztárnoknak a felmentvényt. Budapesten, 1894. május hó 5-én. *Mauritz Rezső, Wagner Alajos.*

A tőkésített pártoló és örökítő tagsági dijak összege 1893. évi decz. 31-én 950 frt.

A közgyűlés a jelentéseket tudomásul veszi, a bizottságoknak fáradozásukért köszönetet mond. — A közgyűlés a maga részéről a pénztár megvizsgálására Balog Mór, Bogyó Samu és Müller József urakat küldi ki azzal a kéréssel, hogy a pénztárvizsgálatot ez alkalommal egészen a folyó év végeig (1894. deczember 31.) megejteni sziveskedjenek.

4. A Mathematikai és Physikai Társulat költségelőirányzata az 1894. évre.

Bevételek.

1. Tagsági díjakból	1250	forint
2. Előfizetésekből	150	«
3. Hátralékokból	80	«
4. Hirdetésért	80	«
5. Kamatokból	40	«
6. A M. T. Akadémia segélye	1000	«
	2600	forint

Kiadások.

1.	A Math. Phys. Lapok kiadása	2000 forint
2.	Expeditio	90 «
3.	Előadások költsége	72 «
4.	Postaköltség	36 «
5.	Irodai költség	10 «
6.	Oklevélirás	6 «
7.	A pénztárnok tiszteletdíja	50 «
8.	Szolgálatokért	40 «
9.	A nyomdai tartozás törlesztésére	296 «
		2600 forint

5. Választmányi tagok választása.

Az alapszabályok 12. §-ának rendelkezése szerint kisorsolt választmányi tagok helyébe a következők választattak meg:

Fröhlich Izidor, Klupáthy Jenő, Mauritz Rezső és Tőtössy Béla.

6. Inditványok.

Titkár bemutatja Szily Kálmán vál. tagnak a választmányhoz beadott indítványát, mely következő:

Bólyai János sírja teljes enyészetnek indúlt: emlék nem dísziti, sőt már halom sem jelöli s csak egyesek élő emlékezete őrzi a nagy magyar mathematikus hamvainak pihenőhelyét. Rendezzen gyűjtést a társulat tagjai között Bólyai sírján emelendő szerény siremlék költségének fedezésére.

A választmány az indítványt elfogadta s elhatározta, hogy az indítványt a közgyűlésnek is bemutatja.

Elnök saját részéről melegen ajánlja az indítványt s a gyüjtőivet a közgyűlés tagjainak.

A gyűjtés eredménye a Math. és Phys. Lapokban fog közzé tétetni.

*

Hlatky Miklós és Képessy Imre tagtárs uraknak az első közgyűlésen beadott indítványait a választmány elfogadásra nem ajánlja (L. a *Math. Phys. Lapok* II. köt. 218. és 288. l.).

*

Végül a titkár a választmány határozatából bemutatja a közgyűlésnek a Bibliographiai Bizottság jelentését, mely itt következik:

7. A bibliografiai bizottság jelentése.

Tisztelt választmány!

A párisi «Congrés international de bibliographie des sciences mathématiques» POINCARÉ elnöklete alatt elhatározta egy a mathematikai munkákat felölelő bibliografia kiadását a következő fontosabb elvek alapján:

«1. A munka magába foglalja az 1800-tól 1889-ig megjelent *önálló* mathematikai munkákat és dolgozatokat, (iskolai használatra való könyvek ki vannak zárva), valamint a mathematika történetének 1600-tól 1889-ig terjedő korszakára vonatkozó dolgozatokat.

2. 10—10 évenként pótló kötet jelenik meg.

3. A bibliografiából ki vannak zárva az oly művek, melyek eredeti eredményeket nem tartalmaznak, valamint a tankönyvek általában.

4. Az alkalmazott mathematikára vonatkozó munkák *csak annyiban említendők*, a mennyiben a *tiszta mathematikára* nézve is *becses* eredményeket tartalmaznak.

5. A különböző munkálatok csoportosíttatnak és felosztatnak osztályokra, alosztályokra, csoportokra, fejezetekre és alfejezetekre, melyek külömböző számok és betükkel jelöltetnek.

6. A nem franczia, német, angol, spanyol, olasz vagy latin munkák czímei franczia fordításban is közlendők.»

A magyar szerzőktől megjelent munkák, összeállítására a Congrés KÖNIG és RADOS tagtársainkat kérte fel, kiknek indítványára a tisztelt választmány egy KOPP, KÜRSCHÁK, RADOS, TANGL és TŐTÖSSY tagokból álló albizottságot küldött ki, mely a munkát el is végezte.

Mellékeljük az összeállított dolgozatok névsorát, melynek közlését a Math. és Phys. Lapokban kérjük, hogy a tisztelt tagtárs urak esetleges hiányokat pótolhassanak.*

Egyúttal van szerencsénk jelenteni, hogy a Congrés a neki beküldött összeállítást nagy munkájába felvette és hogy RADOS felszólítására az egyik alfejezet czímét, mely eredetileg «Géometrie de LOBATSCHEVSKI» nevet viselt, «Géometrie de LOBATSCHEVSKI et BÓLYAI»-ra változtatta.

Budapesten, 1894. április 4-én.

Kopp Lajos
az albizottság jegyzője.

Rados Gusztáv
az albizottság elnöke.

*

A tárgysor elintéztetvén, elnök a közgyűlést berekeszti.

---

* Ezt az összeállítást Lapunk egyik legközelebbi számában közöljük. *Szerk.*

A közgyűlés után Harkányi Béla tagtársunk számos szebbnél szebb képet mutatott be vetitésben, melyeket Gothard Jenő tagtárs urral É-Amerikában tett utazásuk alkalmával ez utóbbi a nevezetesebb csillagvizsgáló intézetekről, valamint a Nemzeti Park páratlan szépségű tájairól való eredeti fölvételei után készített volt.

A napot közös vacsora fejezte be, melyen a beszéd fő tárgya a — legközelebbi közgyűlés volt.

*

Másnap Grúber Nándor kisérletezett az ő utasításai szerint átalakított universális dinamógéppel s még nehány más iskolai készüléket is mutatott be, melyeket a Calderoni czég volt szives rendelkezésünkre bocsátani.

A közgyülés tagjai még a Dr. Kiss Károly t. társ úr vezetése alatt álló üvegtechnikai intézetet is megtekintette, hol alkalma nyílt az üvegfúvás és köszörülés érdekesebb műveleteivel közvetlen szemléletből megismerkedni.

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány f. é. április hó 5-én tartott ülésén a Mathematikai és Physikai Társulat rendes tagjaiul a következőket választotta meg: *Soós Mihály* premontrei kanonok és tanár Csornán, (aj. *Schmidt Ág.* és *Bartoniek*); *Gidró Bonifácz* szt. Benedekrendi tanár Győrött, (aj. *Ábrahám* és *Récsei*); *Lendvay Hugó* gymn. tanár, (aj. *Ábrahám* és *Récsei*); *Skopál István* főreáliskolai tanár Székes-Fehérvárott (aj. *Rados* és *Tőtössy*); *Knoblauch Aladár* tanár Bpesten, (aj. *Csomóssy* és *Tangl*); *Kanitz Aristides* menny. és természettud. kari hallgató Kolozsvárt, (aj. *Farkas* és *Vályi*); *Dr. Anderkó Aurél* meteorologiai intézeti assistens Budapesten, (aj. *Tangl* és *Róna*); *Krónits Lénárd* tanár Bpesten, (aj. *Gruber* és *Tangl*); *Kirsch József* mechanikus Budapesten, (aj. *Süss* és *Tangl*); *Buchböck Gusztáv* tud. egyet. assistens, (aj. *Tangl* és *Bartoniek*); *Brandt József* plébános Temesvárott, (aj. *Rados* és *Tőtössy*); *Barkáts Mária* áll. fels. leányiskolai tanitónő Budapesten, (aj. *Fröhlich* és *Bartoniek*); *Nagy Dezső* műegyetemi tanár Budapesten (aj. *Rados* és *Bartoniek*).

JELŐLJÜK MEG BÓLYAI JÁNOS SIRJÁT?

Bólyai János síremlékére befolyt adományok első kimutatása.

Szily Kálmán (5 frt), b. Eötvös Loránd (10), Kőnig Gyula (10), Bogyó Samu (2), Kürschák József (2), Heller Ágost (1), Réthy Mór (10), Dr. Kiss Károly (1), Fröhlich Izidor (5), Rados Ignácz (2), Csillag Vilmos (1), Csopey László (1), Heid Károly (1), Rados Gusztáv (3), Suták József (1), Beke Manó (1), Hornischek Henrik (1), Wittmann Ferencz (2), Klupáthy Jenő (2), Bein Károly (1), Kohányi Gyula (1), Gruber Nándor (1), Székely Károly (1), Fényes Dezső (2), Bodola Lajos (1), Balog Mór (1), Tangl Károly (1), Kövesligethy (1), Tőtössy Béla (3), Bélteky Albert (1), Kirchknopf András (1), Fraunhoffer Lajos (1), Osztrogonácz János (1), Hlatky Miklós (1), Koschowitz Gyula (2), Bartoniek Géza (1), Wagner Alajos (1), Szuppán Vilmos (1), Kleiszner Rezső (1), Kopp Lajos (2), Kiss Ernő János (1), Orbán Antal (1), Éberling József (1).

Az eddig befolyt összeg: 90 frt.

Az adományokat kérjük Dr. Kopp Lajos tanár (Budapest, IX. ker. Üllői-út 53.) címe alatt beküldeni.

EGY HELYZETGEOMETRIAI TÉTEL A TETRAÉDER ÉLEIRŐL.

1. Valamely egyágú (hiperbolikus) hiperboloid alkotói két rendszerbe oszlanak; az ugyanazon rendszerhez tartozó elemek nem metszik egymást azaz kitérő sugarak, ellenben az egyik rendszer bármely eleme metszi a másik rendszer összes elemeit. Az egyik rendszert pl. H-val, a másikat H'-vel jelölöm, míg magának a hiperboloidnak jelölésére bármelyik rendszer jelét veszem.

Legyen a H rendszer négy sugara: a, b, c, d; ezek a másik rendszer két x' és y' eleméből négy-négy pontot metszenek ki: az A_1, B_1, C_1, D_1, illetőleg A_2, B_2, C_2, D_2 pontokat. Feltéve, hogy A_1 és A_2 az a egyenesen, B_1 és B_2 a b-n stb. van, a két négyes pontsor projektiv, azaz megfelelően képezett kettős viszonyaik egyenlők; képletben:

$$(A_1B_1C_1D) = (A_2B_2C_2D).$$

E kettős viszonyt, az a, b, c, d kitérő egyenesek kettős viszonyának is nevezem és $(abcd)$-vel jelölöm.

Ha még a négy egyenes bármelyike két pontja által volna meghatározva pl. $a = \overline{LM}$ és $b = \overline{NP}$, akkor a következőkben, felesleges jelek kikerülése végett, a szóban forgó kettős viszonyt még így is irom:

$$(abcd) = (\overline{LM}\ \overline{NP}\, cd).$$

Ez előleges megjegyzések után nyilvánvaló, hogy négy kitérő egyenes harmonikus csoportot alkot, ha

$$(abcd) = -1.$$

Nyilvánvaló az is, hogy az a és b kitérő egyenesekre, mint konjugált párra nézve, a tér bármely harmadik, az előbbieket nem

metsző c egyeneséhez a konjugált negyedik harmonikus d egyenes egyértelműen meghatározható.

A szerkesztés következőképen történhet:

Veszem az a, b, c egyenesek bármely két transzverzálisát, az x' és y' egyeneseket; az x' kimetszi az a, b, c egyenesekből rendre az A_1, B_1, C_1 pontokat, az y' az A_2, B_2, C_2 pontokat. Meghatározván a D_1 és D_2 pontokat úgy, hogy

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2) = -1$$

legyen, a keresett negyedik harmonikus egyenes a

$$\overline{D_1D_2} = d$$

egyenes lesz.

2. Legyen most már egy valódi (nem degeneráló) tetraéder négy szögpontja

$$L, M, N, P$$

és legyen továbbá e oly egyenes, mely tetraéderünk egyik élét sem metszi.

A tetraéderen

$$\begin{array}{ll} \overline{LM}, & \overline{NP}, \\ \overline{LN}, & \overline{MP} \\ \overline{LP}, & \overline{MN} \end{array}$$

három pár kitérő egyenes.

Ha mindegyik kitérő élpárra nézve meghatározom az e egyenessel konjugált negyedik harmonikust, akkor három egyenest kapok: f, g, h-t, melyekre nézve áll, hogy

$$(\overline{LM}\ \overline{NP}\ ef) = (\overline{LN}\ \overline{MP}\ eg) = (\overline{LP}\ \overline{MN}\ eh) = -1 \qquad \text{I.)}$$

Vizsgáljuk az így meghatározott f, g, h egyenesek közt fennálló kapcsolatot.

Az $\overline{LM}$, $\overline{NP}$, e és f egy hiperboloid ugyanazon H_1 alkotórendszerének elemei, melynek másik alkotórendszere H_1'.

Ép úgy $\overline{LN}$, $\overline{MP}$, e és g egy második hiperboloid H_2 rendszerének elemei; ennek másik alkotórendszere H_2'.

És végül $\overline{LP}$, $\overline{MN}$, e és h elemei a H_3 rendszernek, e hiperboloid másik alkotórendszere H_3'.

Van tehát három hiperboloidunk, melyek mind az e egyenest és az L, M, N, P pontokat tartalmazzák.

3. Bebizonyítom, hogy az f, g, h egyenesek kitérők, azaz egyik sem metszi a másikat.

Felteszem, hogy pl. az f és g egymást bizonyos K pontban metszik. Ez közös pontja a H_1 és H_2 hiperboloidnak, és akkor ezen át még a H_1' és H_2' rendszerek egy-egy eleme, k_1' és k_2' halad, melyek a H_1, illetőleg H_2 alkotórendszerek összes elemeit metszik.

Mondjuk, hogy k_1' a H_1 rendszer LM, NP és e elemeit X_1, Y_1 és Z_1 pontokban, míg k_2' a H_2 rendszer LN, MP és e elemeit X_2, Y_2 és Z_2 pontokban metszi, akkor

$$(X_1 Y_1 Z_1 K) = (X_2 Y_2 Z_2 K) = -1.$$

A mint ebből látjuk, e két projektív négyes pontsornak egy megfelelő pontpárja a K-ban összeesik, tehát a két négyes pontsor pespektív. Ez annyit tesz, hogy $\overline{X_1 X_2}$, $\overline{Y_1 Y_2}$ és $\overline{Z_1 Z_2}$ egy ugyanazon O pontban találkoznak, a mely pont az e egyenesen van, mert

$$\overline{Z_1 Z_2} = e.$$

Mivel továbbá az $\overline{X_1 X_2}$ az $\overline{LM}$ és $\overline{LN}$ egyeneseket az X_1 illetőleg X_2 pontokban metszi, ez csak úgy lehetséges, hogy vagy

$$X_1 \equiv X_2 \equiv L$$

vagy hogy $\overline{X_1 X_2}$ az LMN síkban fekszik.

Az első esetben a k_1' és k_2' két közös ponttal bír, a mennyiben mindegyik tartalmazza a K és L pontot, de akkor

$$k_1' \equiv k_2'$$

és egyszersmind

$$Z_1 \equiv Z_2,$$

mert ez utóbbiak rajta vannak az e és a $k_1' \equiv k_2'$ egyeneseken.

De ha két projektív négyes pontsor három elempárja összeesik, a negyedik elempár is összeesik azaz

$$Y_1 \equiv Y_2 \equiv P.$$

Más szóval:

$$k_1' \equiv k_2' \equiv \overline{LP},$$

tehát az $\overline{LP}$ él metszené az e egyenest, a mi feltevéseinkkel ellenkezik.

A második esetben $\overline{X_1X_2}$ benne feküdnék az LMN síkban és X_1 az X_2-től különböző és így [mivel P nem fekszik az LMN síkban] egyszersmind Y_1 és Y_2 is különböző pontok az MNP síkban. Az O pont tehát, mint az $\overline{X_1X_2}$ és $\overline{Y_1Y_2}$ közös pontja benne fekszik az LMN és MNP síkban, azaz e síkok $\overline{MN}$ élében. Ez ismét annyit tesz, hogy a tetraéder egyik éle metszi az e egyenest, a mit pedig kizártunk.

Ezek után el kell ejtenünk azt a feltevésünket, hogy f és g egymást metszik. Egészen analog eljárással mutathatjuk ki, hogy f és h, valamint g és h is kitérő egyenesek, a mivel fentebbi állításunk be van bizonyítva.

Kiegészítésül még az is megjegyezhető, hogy az e egyenes az f, g, h egyenesek egyikét sem metszi. Mert pl. e és f a H_1 alkotórendszer két eleme s mint ilyenek kitérők. Hasonlóképen áll a dolog e és g, valamint c és h egyenesekre, melyek a H_2 illetőleg H_3 rendszer elemei.

Így az első eredmény az, hogy az *e, f, g, h egyenesek kitérők.*

4. A viszonyok behatóbb vizsgálatára, tekintsük az f, g, h egyenesek ama pontjait, melyek az e egyenesen és a tetraéder egyik pl. L szögpontján át gondolt síkban feküsznek.

Ez az eL sík tartalmazza a H_1', H_2', H_3' rendszer egy-egy elemét, mert e eleme a H_1, H_2 és H_3 rendszernek. Legyenek ez elemek l_1', illetőleg l_2', l_3'. Az l_1' metszi a H_1 rendszer minden elemét, nevezetesen

$\overline{LM}$ egyenest L pontban
$\overline{NP}$ « A_1 «
e « E_1 «
f « F_1 «,

a mely pontokról az I.)-ben felírt feltételek alapján mondhatjuk, hogy

$$(LA_1E_1F_1) = -1.$$

Hasonló módon l_2' metszi a H_2 rendszer minden elemét és pedig

$\overline{LN}$ egyenest L pontban
$\overline{MP}$ « A_2 «
e « E_2 «
g « G_2 «

és ismét

$$(LA_2E_2G_2) = -1.$$

Végül l_3 metszi a H_3 rendszer minden elemét és pedig

$\overline{LP}$ egyenest L pontban
$\overline{MN}$ « A_3 «
e « E_3 «
h « H_3 «

és ismét

$$(LA_3E_3H_3) = -1.$$

E három állítás összefoglalása a következő relációt adja:

$$(LA_1E_1F_1) = (LA_2E_2G_2) = (LA_3E_3H_3) = -1.$$

Ily felirásban látjuk, hogy e három projektiv négyes pontsorban egy elem L megfelelően közös; de akkor e négyes pontsorok páronkint perspektivek. A három párnak megfelelően volna három perspektív czentrum, melyről azonban könnyen kimutatható, hogy összeesik.

Ugyanis, mind a három czentrum rajta van az e egyenesen, mint az E_1, E_2, E_3 összeköttetésén; másrészt az egyik czentrumon átmegy $\overline{A_1A_2}$, a másikon $\overline{A_2A_3}$, a harmadikon $\overline{A_3A_1}$, de A_1, A_2 és A_3 szintén egy ugyanazon egyenesen feküsznek, ugyanis

A_1 fekszik az $\overline{NP}$ egyenesen
A_2 « « $\overline{MP}$ «
A_3 « « $\overline{MN}$ «

azaz A_1, A_2, A_3 pontok az MNP síkban feküsznek és szintén az eL síkban, tehát a kettő metszésvonalán: a-n.

Ez annyit tesz, hogy

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \overline{A_3A_1} \equiv a.$$

Mind a három perspektiv czentrum rajta van ezen az a egyenesen és az e egyenesen, tehát e kettő metszéspontjában mind a három czentrum összeesik. Legyen ez a pont A.

Ebből a vizsgálódásunkra nézve döntő jelentőségű következményre jutunk, hogy F_1, G_2, H_3 és A pontok egy ugyanazon egyenesen fekűsznek, a mennyiben F_1, G_2 és H_3 a perspektiv vonatkozásban megfelelő pontok és A a perspektiv czentrum.

Ezt az eredményt más szóval úgy is mondhatjuk ki, hogy az e, f, g, h egyeneseknek az eL síkban van egy közös transzverzálisuk: t_1.

Hasonló módon mutathatom ki, hogy az eM, eN, eP síkokban s van egy-egy transzverzálisa az e, f, g, h egyeneseknek, legyenek ezek t_2, t_3, t_4.

Ennek tényleges bebizonyítása azonban az I.) feltétel némi átalakítását teszi szükségessé. Ugyanis az I.) feltételben az elemek elrendezése olyan, hogy az eL sik, mindegyik négyes sugársornak első elemét metszi ugyanazon pontban az L-ben, már pedig csakis ezen az alapon mondhatjuk, hogy a keletkezett négyes pontsorok perspektivek. Ha azonban az eM síkot veszem, ott az első sugársor első elemét e sík ugyan M pontban metszi, de a többiek első elemét más pontokban, úgy hogy a keletkező négyes pontsorokban M nem lesz megfelelően közös.

E látszólagos nehézség eloszlatható azon megjegyzés alapján, hogy a harmonikus csoportok konjugált elemei felcserélhetők, vagyis az I.) feltétel még a következő alakokba irható:

$$(L\bar{M}\,N\bar{P}\,ef) = (\bar{M}P\,\bar{L}N\,eg) = (\bar{M}N\,\bar{L}P\,eh) = -1 \qquad \text{II.)}$$

$$(N\bar{P}\,L\bar{M}\,ef) = (\bar{L}N\,\bar{M}P\,eg) = (\bar{M}N\,\bar{L}P\,eh) = -1 \qquad \text{III.)}$$

$$(NP\,LM\,ef) = (\bar{M}P\,\bar{L}N\,eg) = (\bar{L}P\,\bar{M}N\,eh) = -1 \qquad \text{IV.)}$$

Ha most már az eM síkkal való metszésnél a II.), az eN síkkal való metszésnél a III.) és eP-nél a IV.) feltételt használom, teljesen oly viszonyokkal állunk szemben mint az első, részletezett esetben.

Így tehát az e, f, g, h egyeneseknek négy különböző síkban van egy-egy transzverzálisa.

E transzverzálisok közül kettő nem eshetik össze, mert ha össze-

esnék, úgy az csak az e egyenesen lehetne, már pedig ez az f, g, h egyenesek egyikét sem metszi.

Ámde, ha négy kitérő egyenesnek kettőnél több transzverzálisa van, azok egy hiperboloidon feküsznek. Vagyis áll a következő tétel:

Ha valamely e egyenes az LMNP tetraéder egyik élét sem metszi, a tetraéder három kitérő élpárjára nézve az e egyeneshez konjugált negyedik harmonikus egyenesek f, g, h az e egyenessel együtt egy ugyanazon hiperboloidnak ugyanazon rendszerbeli alkotói.

Skopál István.

DESARGUES TANTÉTELENEK TÉRBELI ANALOGONJÁRÓL.

1. A térbeli vonalkoordinátákról.

Ha az egyenes vonal helyzetét tetraéderes koordináta-rendszerre vonatkozólag meg akarjuk határozni, vagy az egyenesnek az alapsikokkal való metszéspontjait, vagy az egyenest az alappontokból projicziáló síkokat vehetjük segítségül.

Legyenek az alappontok $A_1A_2A_3A_4$ és vegyük az egyenest először két pontja

$$M(x_1x_2x_3x_4) \quad \text{és} \quad N(y_1y_2y_3y_4)$$

által adottnak.

A két pont meghatározta lineáris pontsor változó elemének koordinátái

$$\lambda x_i+\mu y_i \ (i=1, 2, 3, 4);$$

tehát az i-ik alapsík metszéspontjára nézve

$$\lambda : \mu = y_i : -x_i .$$

Ha behozzuk a

$$p_{ik}=x_i y_k-x_k y_i$$

jelölést, a mely szerint

$$p_{ik}+p_{ki}=0, \ p_{ii}=0,$$

az alapsíkok metszéspontjainak koordinátái lesznek :

$$\begin{matrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & 0 \end{matrix} \qquad 1)$$

Az egyenest az alappontokból projicziáló síkok

$$A_iMN \ (i=1, 2, 3, 4)$$

egyenleteiből könnyű ezek koordinátáit kiolvasni. E koordináták lesznek:

$$\begin{matrix} 0 & p_{34} & p_{42} & p_{23} \\ p_{43} & 0 & p_{14} & p_{31} \\ p_{24} & p_{41} & 0 & p_{12} \\ p_{32} & p_{13} & p_{21} & 0 \end{matrix} \qquad 2)$$

Látszik ezekből, hogy az egyenesnek a koordináta-rendszerhez való viszonyát p_{ik} számok arányai határozzák meg.

De ezek nem függetlenek egymástól, mert az 1) pontok akármelyike benne van a 2) síkok akármelyikében. Ebből az következik, hogy

$$[p] \equiv p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0.$$

Megfordítva, ha a p_{ik} számokat a

$$p_{ik}+p_{ki}=0, \ [p]=0$$

feltételeknek megfelelően választjuk s van közöttük 0-tól különböző ezek a számok egyetlenegy egyenes vonalat fognak meghatározni, mert az 1) pontok közül három-három egy egyenesben lesz, a 2) síkok közül három-három egy egyenesben metszi egymást, minthogy a két mátrix összes harmadfokú determinánsai elenyésznek. A két úton meghatározott egyenes pedig ugyanaz, mert az 1) pontok mindenike benne van a 2) síkok mindenikében.

E szerint a p_{ik} számokat az *az egyenes vonal koordinátáinak* nevezhetjük.*

Így minden egyenesnek hat koordinátát adunk, melyeket rendesen a

$$p_{23}, \ p_{31}, \ p_{12}, \ p_{14}, \ p_{24}, \ p_{34}$$

sorrendben szoktunk felsorolni. Ezeket a

$$[p]=0$$

* A vonalkoordinátákat PLÜCKER vezette be. (Neue Geometrie des Raumes.)

egyenlet köti össze s a mellett csak egymáshoz való arányuknak van geometriai értelme.

Az összes egyenesek így négyszeresen végtelen sokaságot alkotnak, de analitikai előállításuk olyan, mintha ötszörösen végtelen sokaságból kimetszett quadratikus sokaságot alkotnának.

Azonban ez a legtermészetesebb meghatározási mód, mert a koordináta-rendszernek hat alapegyenese van, t. i. a tetraéder hat éle. Így ezek épen úgy, mint az alappontok és alaksíkok azzal vannak jellemezve, hogy koordinátáik egy hijával elenyésznek. A_iA_k alapegyenes koordinátái közül csak p_{ik} nem $=0$.

Tegyük fel másodszor, hogy az egyenes két síkja

$$M(u_1u_2u_3u_4) \quad \text{és} \quad N(v_1v_2v_3v_4)$$

által van adva.

Ha a

$$\pi_{ik}=u_iv_k-u_kv_i$$

jelöléseket, használjuk az egyenest az alappontokból projicziáló síkok koordinátái

$$\begin{matrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & 0 & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & 0 \end{matrix} \qquad 3)$$

és az alapsíkok metszéspontjainak koordinátái

$$\begin{matrix} 0 & \pi_{34} & \pi_{42} & \pi_{23} \\ \pi_{43} & 0 & \pi_{14} & \pi_{31} \\ \pi_{24} & \pi_{41} & 0 & \pi_{12} \\ \pi_{32} & \pi_{13} & \pi_{21} & 0 \end{matrix} \qquad 4)$$

Minthogy a 3) síkok mindenike átmegy a 4. pontok mindenikén,

$$[\pi]=\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{12}\pi_{34}=0.$$

Ha MN és MN egyenesek azonosak, akkor 1. és 4., 2 és 3. matrix megfelelő elemeinek arányosoknak kell lenniök.

Tehát

$$\pi_{23} : \pi_{31} : \pi_{12} : \pi_{14} : \pi_{24} : \pi_{34}=p_{14} : p_{24} : p_{34} : p_{23} : p_{31} : p_{12}$$

Igy koordináta-meghatározásunk a dualitás elvével is egyezik.

Az egyenes vonal geometriájából még csak arra a feltételre lesz szükségünk, a mely mellett két koordinátáival (p_{ik}, q_{ik}) adott egyenes metszi egymást.

Legyen p egyenes két pontja

$$M(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad \text{és} \quad N(y_1 y_2 y_3 y_4),$$

q egyenes két pontja

$$R(z_1 z_2 z_3 z_4) \quad \text{és} \quad S(t_1 t_2 t_3 t_4).$$

A két egyenes metszi egymást, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A Laplace-tétel szerint az az egyenlet igy is irható:

$$[p, q]=[q, p]=p_{23}q_{14}+p_{31}q_{24}+p_{12}q_{34}+p_{14}q_{23}+p_{24}q_{31}+p_{34}q_{12}.$$

2. A lineáris sugársorokról.

1. Keressük fel a két egyenes (p és q) meghatározta lineáris sugársort. Ekkor

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonalkoordináták, ha

$$[s]=\lambda\mu[p, q]=0.$$

Tehát két egyenes csak úgy származtat lineáris sugársort, ha metszik egymást. A sugársor azon egyenesek összeségéből áll, a melyek p és q közös pontján keresztülmennek és közös síkjában feküsznek, mert p és q minden közös metszője (l) metszi az s egyenestis. Ugyanis

$$[s, l]=\lambda[p, l]+\mu[q, l].$$

A sugársornak ezt a faját *síkbeli lineáris sugársornak* fogjuk nevezni.

A feltétel arra nézve, hogy három adott egyenes síkbeli lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott matrix összes harmadfokú determinánsainak el kell enyészniök.

2. Keressük fel a három egyenes (p, q és r) meghatározta lineáris sugársort, ha a három egyenes nem tartozik síkbeli lineáris sugársorhoz. Ismét

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}+\nu r_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonal-koordináták, ha

$$[s]=\mu\nu[q, r]+\nu\lambda[r, p]+\lambda\mu[p, q]=0.$$

A következő eseteket kell megkülönböztetnünk:

a) p, q, r egyenesek kettőnként nem metszik egymást.

Ekkor a sugársor egyszerűen végtelen sok tagból áll azzal a tulajdonsággal, hogy p, q, r minden közös metszője (l) őket is metszi. Mert

$$[s, l]=\lambda[p, l]+\mu[q, l]+\nu[r, l].$$

Ebből az következik, hogy a sugársor a p, q, r egyenesek meghatározta másodrendű és másodosztályú felületen (egyköpenyű hyperboloid vagy hyperbolikus paraboloid) fekszik és azon azt az egyenesrajt alkotja, melynek p, q, r is tagjai.

b) p és q metszik egymást, de p és r, q és r nem.

Ekkor

$$[s]=\nu(\lambda[p, r]+\mu[q, r])=0$$

egyenlet azt mutatja, hogy a sugársor két síkbeli lineáris sugársorból áll. Egyiknek ($\nu=0$) alapsugarai p és q, a másikéi

$$p_{ik}\,.\,[q, r]-q_{ik}[p, r] \text{ és } r \text{ egyenesek.}$$

Tehát két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral. A közös sugár koordinátái

$$[q, r]\,.\,p_{ik}-[p, r]\,.\,q_{ik}\,.$$

c) p és q, q és r metszik egymást, de p és r nem.

Ekkor

$$[s]=\lambda\nu[p, r]=0$$

egyenlet mutatja, hogy a sugársor megint két síkbeli lineáris sugársorból áll p és q, q és r alapsugarakkal, tehát megint két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral.

d) p, q, r egyenesek kettőnként metszik egymást és így vagy közös pontjuk, vagy közös síkjok van.

Ekkor $[s]=0$ egyenlet identitás. Így a sugársor kétszeresen végtelen sok tagból áll, melyeket p, q, r minden közös metszője metszi.

Ha p, q, r egyeneseknek közös pontja van, ezen mennek át az összes sugarak *(sugárpont)*, ha p, q, r egyeneseknek közös síkja van, ebben feküsznek az összes sugarak *(sugársík)*.

Az eddigiekből az következik, hogy ha négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, de hármanként nem tartoznak síkbeli lineáris sugársorhoz, akkor a következő négy eset lehetséges:

1. A négy egyenes egy másodrendű és másodosztályú felületen fekszik, de kettőnként nem metszik egymást. *(Hiperbolikus sugarak.)*

2. A négy egyenes két szögöt alkot külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy egyiknek szögpontja a másiknak síkjában fekszik és viszont. *(Kétszögös sugarak.)*

3. A négy egyenesnek közös pontja van. *(Pontbeli sugarak.)*

4. A négy egyenesnek közös síkja van. *(Síkbeli sugarak.)*

A feltétel arra nézve, hogy négy adott egyenes lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott mátrix összes negyedfokú determinánsainak el kell enyészniök.

Ezek után áttérhetünk DESARGUES tantétele analogonjának felkeresésére.

3. A lineáris tetraéderekről.

DESARGUES tantétele a síkban így is fogalmazható:

Ha a két háromszög megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalok metszéspontjai lineáris pontsor tagjai.

Tekintetbe véve azt, hogy a térben a lineáris sugársor reczi-

prókja megint lineáris sugársor, analog tantételnek a következőt lehet tekinteni:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai.

Két tetraéder ilyen viszonyát *lineáris*-nak fogjuk nevezni.

A tantétel bebizonyítása következő:

Legyenek két tetraéder szögpontjai $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ és oldalsíkjai $a_1a_2a_3a_4$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$. A jelölés legyen úgy választva, hogy pl.

$$a_1 = A_2A_3A_4.$$

Megfelelő elemek legyenek az egyenlő indexüek.

Az első tetraédert válasszuk a koordinátarendszer alapjának és így a szögpontok koordinátái legyenek:

1 0 0 0	$b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}$
0 1 0 0	$b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}$
0 0 1 0	$b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}$
0 0 0 1	$b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}$.

Minthogy a második tetraéder is valóságos, a b_{ik} elemek determinánsa $B \lesseqgtr 0$.

Az oldalsíkok koordinátái

1 0 0 0	$B_{11}B_{12}B_{13}B_{14}$
0 1 0 0	$B_{21}B_{22}B_{23}B_{24}$
0 0 1 0	$B_{31}B_{32}B_{33}B_{34}$
0 0 0 1	$B_{41}B_{42}B_{43}B_{44}$,

a hol B_{ik} jelenti B determinánsban a b_{ik} elem aldeterminánsát.

A következőkben feltesszük, hogy b_{ik}, B_{ik} elemek közül egyik sem $=0$. Ezzel azt mondjuk ki, hogy egyik tetraéder szögpontjai közül egyik se feküdjék a másik tetraéder valamelyik oldalsíkjában. Ezzel egyszersmind kimondottuk azt is, hogy a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek közül három-három ne feküdjék egy síkban és a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei közül három-három ne messe egymást egy pontban.

A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek koordinátái, ha azokat

$$p_{23},\ p_{31},\ p_{12},\ p_{14},\ p_{24},\ p_{34}$$

sorrend szerint soroljuk fel:

$$\begin{matrix} 0 & -b_{13} & b_{12} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & -b_{21} & 0 & b_{24} & 0 \\ -b_{32} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{matrix}$$

A négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, ha ezen mátrix összes negyedfokú determinánsai elenyésznek. Ez a következő hét egyenlethez vezet:

(1) $b_{12}b_{23}b_{31} = b_{13}b_{32}b_{21}$

(2) $b_{13}b_{34}b_{41} = b_{14}b_{43}b_{31}$

(3) $b_{14}b_{42}b_{21} = b_{12}b_{24}b_{41}$

(4) $b_{23}b_{34}b_{42} = b_{24}b_{43}b_{32}$

(5) $b_{12}b_{23}b_{34}b_{31} = b_{14}b_{43}b_{32}b_{21}$

(6) $b_{13}b_{34}b_{42}b_{21} = b_{12}b_{24}b_{43}b_{31}$

(7) $b_{14}b_{42}b_{23}b_{31} = b_{13}b_{32}b_{24}b_{41}$

De a négy utolsó egyenlet a három elsőnek következése, mert

(4) következik (1), (2) és (3)—
(5) « (1) és (2)—
(6) « (2) és (3)
(7) « (2) és (1)

szorzásából.

A koordináták homogének és feltétel szerint 0-tól különbözők lévén, előre beigazíthatók úgy, hogy

$$b_{21} = b_{12},\ b_{31} = b_{13},\ b_{41} = b_{14}$$

legyen. De akkor a három első egyenlet szerint egyszersmind

$$b_{23} = b_{32},\ b_{34} = b_{43},\ b_{42} = b_{24},$$

azaz B szimmetrikus determináns.

Épen így a feltétel arra nézve, hogy a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei lineáris sugársorhoz tartozzanak, abban áll, hogy a B_{ik} elemek determinánsát a soroknak czélszerűen választott faktorokkal szorzásával szimmetrikussá lehessen tenni.

De egy determináns és adjungáltja közül, ha egyik szimmetrikus, a másik is az. Ebből az következik, hogy:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai, és megfordítva.

De ha a

$$b_{ik}=b_{ki}$$

egyenletek állanak, akkor a két tetraéder között polárreciprocitás áll fenn arra a másodrendű és másodosztályú felületre nézve, melynek egyenlete síkkoordinátákban

$$\Sigma b_{ik}u_iu_k=0.$$

Áll tehát a következő tantétel is:

Minden tetraéder bármely másodrendű és másodosztályú felületre vonatkozó polárreciprókjával lineáris viszonyban van.*

A lineáris viszony fajainak meghatározására megjegyzendő, hogy a feltétel arra nézve, hogy A_1B_1 és A_2B_2 messék egymást:

$$b_{13}b_{24}-b_{14}b_{23}=0.$$

A $b_{ik}=b_{ki}$ feltételeket tekintetbe véve, ugyanez a feltétel arra nézve is, hogy A_3B_3 és A_4B_4 messék egymást.

A_1B_1 és A_3B_3, A_2B_2 és A_4B_4 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{34}-b_{14}b_{32}=0$$

A_1B_1 és A_4B_4, A_2B_2 és A_3B_3 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{43}-b_{13}b_{42}=0.$$

---

* Ez a tantétel CHASLES-tól ered. Lásd SALMON-FIEDLER Analytische Geometrie des Raumes 1. kötet 180. lap (második kiadás) és a hozzá csatolt jegyzetet.

A három egyenlet közül kettőnek a harmadik következése.

Vegyük tekintetbe ezenkívül azt, hogy az adjungált determinánsok ismert tulajdonsága szerint:

$$b_{13}b_{24}-b_{14}b_{23}=0 \text{ és } B_{31}B_{42}-B_{32}B_{41}=0$$

egyenletek közül egyik a másiknak következése, azaz ha A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek metszik egymást, metszik egymást $a_3\beta_3$ és $a_4\beta_4$ is.

Ezek alapján a lineáris viszonynak következő három faját kell megkülönböztetnünk:

1. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei hiperbolikus sugarak. *(Hiperbolikus viszony.)* *

2. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei kétszögös sugarak. *(Kétszögös viszony.)*

3. A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek pontbeli, a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei síkbeli sugarak. *(Perspektiv viszony.)*

Vályi Gyula.

---

* A tantételnek ez a része HERMES-től ered. (Crelle-Journal, 56. kötet.)

A SURLÓDÁS ELMÉLETÉHEZ.

(Negyedik és befejező közlemény.)

III. A pont mozgásának részletes leírása adott felületen.

13. A pont adott görbe felületen történő mozgásának részletes leírásánál a felület olyan görbe seregeiből alkotott koordinata-rendszert veszünk alapul, mely lehetőleg egyszerű leírást enged meg. Legyenek

$$u_1 = \text{const.},$$
$$u_2 = \text{const.},$$

olyan két görbesereg egyenletei, melyek közül az egyikhez tartozók derékszög alatt metszi a másikhoz tartozók mindegyikét; akkor az u_1 és u_2 számértékei a metszéspont görbevonalas derékszögű koordinátái. Ezt az u_1, u_2 rendszert fektetvén alapul, a pont sebességének analitikai kifejezése:

$$v=(U_1^2u_1'^2+ U_2^2u_2'^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

hol U_1 és U_2 függvényei az u_1, u_2 koordinátáknak és hol a szokott

$$u_1'=\frac{du_1}{dt}, \quad u_2'=\frac{du_2}{dt} \tag{29}$$

rövidítésekkel élünk.

A pontra ható összes (szabad *és* surlódási) erők virtuális munkája e rendszerben kifejezve legyen

$$Q_1\delta u_1+Q_2\delta u_2;$$

akkor a tömegpont mozgásának differenciál-egyenletei LAGRANGE második rendszere értelmében

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial u_i'}-\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial u_i}=Q_i;\quad [i=1,2].$$

Ezek az egyenletek a 28)-ból folyó

$$\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial u_i'}=U_i^2u_i',$$

$$\frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial u_i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1^2}{\partial u_i}u_1'^2+\frac{\partial U_2}{\partial u_i}u_2'^2\right)$$

egyenletek alapján explicite így irhatók:

$$\frac{d}{dt}(U_i^2u_i')=Q_i+\frac{1}{2}\frac{\partial U_1^2}{\partial u_i}u_1'^2+\frac{1}{2}\frac{\partial U_2^2}{\partial u_i}u_2'^2,\quad [i=1,2]. \tag{30}$$

14. Az egyenletek integrálását eszközlendők, azon esetre szorítkozunk, a midőn a mozgató erő csakis a nehézség; még itt is azt a további feltevést kell bevezetnünk, hogy a felület, melyen a pont mozog, forgási felület és hogy a forgási tengely függélyes. Ezen föltevések mellett az egyenletek integrálása visszavezethető egyetlen egy másodrendű *közönséges* differenciál-egyenlet integrálására, mely ha megvan, a mozgási probléma teljes megoldása csak egyszerű quadraturákat követel meg.

Megjegyzem, hogy ha e föltevéseket nem használjuk, a probléma ugyanazon az úton, a *közönséges* helyett, másodrendű *parcziális* differenciál-egyenlet teljes megoldására vihető vissza.

A szóban levő speciál esetben czélszerű lesz u_1-gyel a forgási felületet leiró síkgörbe meridián szögét jelölni, u_2-vel pedig e síkgörbe ívhosszát, az ívhosszat számítván az egyik tengelyponttól a tömegpontig; egyébként kényelmesebb irás kedvéért u_2 helyett csak u-t fogunk irni.

E koordináta-rendszert fektetvén alapul a (28) helyébe lép,

$$v=(U_1^2u_1'^2+u'^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

hol U_1 csakis az u függvénye lévén $\frac{\partial U_1}{\partial u_1} = 0$. Tekintettel erre és azon körülményre, hogy $U_2 = 1$, a mozgási egyenletek most így írhatók:

$$\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1') = Q_1 \tag{31a}$$

$$\frac{du'}{dt} = Q_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial U_1^2}{\partial u} u_1'^2. \tag{31b}$$

A működő erők a nehézség és a surlódás.

A nehézség munkája

$$g \cos.(z, u)\, \delta u = g \frac{dz}{du} \delta u.$$

A surlódás munkája

$$-kN \cos.(v, u_1)\, U_1 \delta u_1 - kN \cos.(v, u)\, \delta u.$$

Ezekből folyólag

$$Q_1 = -kNU_1 \cos.(v, u) = -kN \frac{U_1^2 u_1'}{v}, \tag{32a}$$

$$Q_2 = -kN \frac{u'}{v} + g \frac{dz}{du}. \tag{32b}$$

A mi az N értékét illeti, az előbbi közlemény (25a) egyenlete értelmében

$$N = -g \cos.(z, r) + \frac{v^2}{r},$$

míg EULER ismeretes tétele szerint

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos.^2(v, u_1)}{r_1} + \frac{\cos.^2(v, u_2)}{r_2},$$

hol r_2 a forgási felület leíró síkgörbéjének, és r_1 az erre merőleges normálmetszetnek görbületi sugara. Az EULER tételének fölhasználásával lesz tehát

$$N = -g \cos.(z, r) + \frac{v^2 \cos.^2(v, u_1)}{r_1} + \frac{v^2 \cos.^2(v, u_2)}{r_2}$$

azaz

$$N = -g\cos.(z,r) + \frac{U_1^2 u_1'^2}{r_1} + \frac{u_2'^2}{r_2}.$$

Az N előbbi képlete érvényes bármilyen felület esetén is, ha r_1 és r_2 a főgörbületi sugarak, és u_1 és u_2 a főmetszetek érintőinek irányát jelentik. Forgási felületek esetén még tekintetbe vehető, hogy U_1 és r_1 között fönnáll

$$U_1 = r_1 \sin.(z,r),$$

minélfogva N értéke így is írható:

$$N = -g\cos.(z,r) + r_1 u_1'^2 \sin.^2(z,r) + \frac{u_2'^2}{r_2},$$

azaz

$$N = -g\cos(z,r) + U_1 u_1'^2 \sin(z,r) + \frac{u_2'^2}{r_2}, \tag{33}$$

Ezek szerint a 31) és 32) egyenletek összefoglalásával kimondható, hogy a mozgási probléma megoldása a következő differenciál-egyenlet-rendszer megoldására van visszavezetve:

$$\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1') = -kN\frac{U_1^2 u_1'}{v}, \tag{34a}$$

$$\frac{du'}{dt} - U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2 = -kN\frac{u'}{v} + g\frac{dz}{du}, \tag{34b}$$

hol N értékét az imént levezetett képletek adják meg.

15. Ezen egyenlet-rendszerből levezetünk két velük egyenértékű egyenletet, melyek egyike az eleven erő tételét fejezi ki, másika pedig lényegileg azonos az előbbi fejezet (25) alatti egyenletek harmadikával.

Ugyanis az első egyenletet szorozván u_1'-vel, a másodikat u'-vel, összegezés után ered a bal oldalon

$$u_1'\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1') + u'\frac{du'}{dt} - U_1\frac{dU_1}{dt}u_1'^2,$$

mely ismert átalakítás révén *

$$= \frac{d}{dt}\frac{U_1^2 u_1'^2 + u'^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}v^2.$$

A jobb oldalon pedig kijő

$$-kN\frac{U_1^2 u_1'^2 + u'^2}{v} + g\frac{dz}{dt},$$

mely

$$= -kNv + \frac{d}{dt}(gz).$$

Ezek folytán

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}v^2 - gz) = -kNv,$$

mely egyenlet az eleven erő tételét fejezi ki.

Más részről a 34*a*) egyenletet így irom:

$$-\frac{kN}{v} = \frac{d}{dt}\cdot\log.(U_1^2 u_1');$$

és a $-\frac{kN}{v}$ ez értékét behelyettesítvén a (34*b*) egyenletbe, az eredmény így irható:

$$u'\left(\frac{d}{dt}\log.u' - \frac{d}{dt}\log.(U_1^2 u_1')\right) = g\frac{dz}{du} + U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2,$$

vagy rövidebben

$$u'\frac{d}{dt}\log.\frac{u'}{U_1^2 u_1'} = g\frac{dz}{du} + U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2,$$

mely egyenlet csak más alakban fejezi ki ugyanazt, a mit a harmadik egyenlet (25) alatt.

---

* Az átalakítás, a melyre a hivatkozás történik, ez:

$$u_1'\frac{d(U_1^2 u_1')}{dt} = U_1 u_1'\frac{d(U_1 u_1')}{dt} + U_1 u_1'^2\frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1'^2) + U_1\frac{dU_1}{dt}u_1'^2$$

azaz

$$u_1'\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1'^2) - U_1\frac{dU_1}{dt}u_1'^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(U_1^2 u_1'^2).$$

16. Az egyenletekben független változóúl a t helyett az u-t hozván be, azokat $u'=\frac{du}{dt}$ folytán így írjuk:

$$u'\frac{d}{du}(v^2-2gz)=-2kNv, \tag{35a}$$

$$u'^2\frac{d}{du}\log.\frac{u'}{U_1^2u_1'}=g\frac{dz}{du}+U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2, \tag{35b}$$

Jelöltessék

$$\frac{u'}{U_1u_1'}=\operatorname{tg}\vartheta,\quad x=\frac{1}{u^2\cos^2\vartheta}=\frac{v^2}{U_1^2u^2u_1'^2}; \tag{36}$$

E jelöléssel élve

$$\frac{d}{du}\log.\frac{u'}{u_1^2u_1'}=\frac{d}{du}\log.\frac{\sqrt{u^2x-1}}{U_1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2ux+u^2\frac{dx}{du}}{u^2x-1}-\frac{\frac{dU_1}{du}}{U_1},$$

és

$$u_1'^2=\frac{u'^2}{U_1^2\operatorname{tg}^2\vartheta}=\frac{u'^2}{U_1^2(u^2x-1)};$$

úgy hogy

$$u'^2\frac{d}{du}\log.\frac{u'}{U_1^2u_1'}-U_1\frac{dU_1}{du}u_1'^2$$

$$=u'^2\left(\frac{1}{2}\frac{2ux+u^2\frac{dx}{du}}{u^2x-1}-\frac{\frac{dU_1}{du}}{U_1}-\frac{\frac{dU_1}{du}}{U_1(u^2x-1)}\right)$$

$$=u'^2\frac{u^2U_1\frac{dx}{du}+2ux\left(U_1-u\frac{dU_1}{du}\right)}{2U_1(u^2x-1)}.$$

Ez átalakítás fölhasználásával a (35b) egyenletből következik, hogy

$$u'^2=\frac{2gU_1(u^2x-1)\frac{dz}{du}}{u^2U_1\frac{dx}{du}+2ux\left(U_1-u\frac{dU_1}{dx}\right)} \tag{37a}$$

A $\frac{dz}{du}$, $\frac{dU_1}{du}$ és az U_1 maga a felületet leíró vonal egyenletéből egyenesen kiadódván, ez az egyenlet megadja az u' sebesség-komponenst mint az x, u és $\frac{dx}{du}$ függvényét; és már mostan u_1', v és N is fölírhatók mint ez argumentumok függvényei. Jelesül

$$u_1'^2 = \frac{2g\frac{dz}{du}}{u^2U_1^2\frac{dx}{du} + 2uU_1x\left(U_1 - u\frac{dU_1}{du}\right)} \tag{37b}$$

$$v^2 = \frac{2gx\frac{dz}{du}}{\frac{dx}{du} + 2x\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U_1}\frac{dU_1}{du}\right)} \tag{37c}$$

$$\frac{v}{u'} = \frac{u\sqrt{x}}{\sqrt{u^2x-1}} \tag{37d}$$

$$N = -g\frac{dU_1}{du} + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{\frac{dz}{du}}{U_1(u^2x-1)}\right)\frac{2g(u^2x-1)\frac{dz}{du}}{u^2\frac{dx}{du} + 2xu\left(1 - \frac{u}{U_1}\frac{dU_1}{du}\right)}$$

A v^2, N és $\frac{v}{u'}$ helyett az imént fölírt kifejezéseiket tévén be a (35a) egyenletbe, másodrendű közönséges differenciál-egyenletet nyerünk az x számára, melyből ez mint az u függvénye van meghatározva. Az egyenlet megoldása után a (37.) képletek közvetetlenül megadják a sebességeket és a nyomást mint az u függvényeit; a

$$t = \int\frac{du}{u'}$$

egyszerű quadratura megadja az időt mint az u függvényét; végül a pont pályagörbéjét megkapjuk a

$$\frac{du_1}{du} = \frac{u_1'}{U'} = \frac{1}{U_1\sqrt{u^2x-1}}$$

egyenlet folytán az

$$u_1 = \int \frac{du}{U_1 \sqrt{u^2 x - 1}}$$

egyszerű quadratura végzésével.

Az x függvényt meghatározó másodrendű differenciál-egyenlet legegyszerűbb, ha a forgási felület körkúp, in specie henger és sík. Jelöljük a körkúp tengelye és alkotója közötti szöget γ-val; az alkotó hosszát a csúcstól a tömegpontig u-val; akkor

$$\frac{dz}{du} = \cos.\gamma\,;\ U_1 = u \sin.\gamma\,;\ \frac{dU_1}{du} = \sin.\gamma\,;\ r_2 = \infty,$$

minélfogva

$$1 - \frac{u}{U_1} \sin.\gamma = 0$$

és

$$v^2 = \frac{2gx \cos.\gamma}{\frac{dx}{du}}\,; \tag{38a}$$

$$\frac{v}{u'} = \frac{u\sqrt{x}}{\sqrt{u^2 x - 1}} \tag{38b}$$

$$N = -g \sin.\gamma + 2g \frac{\cos.^2\gamma}{u^3 \frac{dx}{du} \sin.\gamma} \tag{38c}$$

$$\frac{d}{du}\frac{1}{2}v^2 - g\frac{dz}{du} = g\cos.\gamma\left(\frac{d}{du}\frac{x}{\frac{dx}{du}} - 1\right)$$

$$= -g\cos.\gamma \frac{x\frac{d^2x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2}\,;$$

Ezek folytán a keresett egyenlet

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{k\frac{dx}{du}}{u^3\sqrt{x(u^2x-1)}}\left(2\,\mathrm{ctg}.\gamma - u^3\frac{dx}{du}\,\mathrm{tg}.\gamma\right) \tag{39}$$

másodrendű *negyedfokú* differenciál-egyenlet.

E differenciál-egyenletet csak azon esetekben sikerült *egyszerű* quadraturákra visszavinnem, ha $\gamma=0$, vagy $\frac{\pi}{2}$, azaz ha a körkúp körhengerré vagy síkká degenerál. Csak e speciálesetekre vonatkozó számítások közlésére szorítkozom.

17. Ha a felület körhenger, akkor az egyenlet nagyon egyszerűvé és könnyen megoldhatóvá lesz. Az átmenetelt eszközlendők, hozzuk be változókul X és z-t e helyettesítések révén.

$$u^2x=X$$

$$R+\frac{z}{\cos\gamma}=u\,,$$

hol R a helyettesítésnél állandó, míg az átmenetnél

$$\lim R=\infty, \lim\gamma=0.$$

Lészen

$$\lim.\, u^2x=\lim.\, R^2x=X,$$

$$\lim.\, R^2\frac{d^2x}{du^2}=\frac{d^2X}{dz^2}$$

$$\lim.\, R^2\frac{dx}{du^2}=\frac{dX}{dz},$$

minélfogva az egyenlet ez lesz:

$$\frac{d^2X}{dz^2}=\frac{k\,\frac{dX}{dz}}{\sqrt{X(X-1)}}\lim.\left(\frac{2\operatorname{ctg}\gamma}{u}-\frac{dX}{dz}\operatorname{tg}.\gamma\right)$$

Ámde

$$u\sin.\gamma=U_1;\ \lim.\operatorname{tg}\gamma=0;\ \lim.\cos.\gamma=1,$$

azért a körhenger esetén a mogoldandó differenciál-egyenlet egyszerűen ez:

$$\frac{d^2X}{dz^2}=\frac{2k}{U_1}\frac{\frac{dX}{dz}}{\sqrt{X(X-1)}}\,, \tag{40}$$

hol U_1 a körhenger sugarát jelenti.

Ezen egyenlet két egymásután végzendő quadraturára vihető

vissza, ha k a sebességnek bármilyen függvénye. Ugyanis (38a) egyenlet szerint

$$v^2 = 2g \frac{X}{\frac{dX}{dz}};$$

ha tehát $k = f\left(\frac{v^2}{2g}\right)$, akkor

$$\frac{dX}{dz} = Y; \quad \frac{d^2X}{dz^2} = Y\frac{dY}{dX}$$

helyettesítést alkalmazván, a differenciál-egyenlet e kettővé oszlik:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2}{U_1} f\left(\frac{X}{Y}\right) \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}} \tag{41a}$$

$$\frac{dX}{dz} = Y. \tag{41b}$$

A quadraturák könnyen végezhetők, ha k arányos a v első hatványával, és akkor is, ha k állandó. Az első esetben

$$k = \frac{h}{2\sqrt{2g}} v$$

jelölés mellett az első egyenlet így irandó:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{h}{U_1} \frac{1}{\sqrt{Y(X-1)}},$$

melynek integrálja

$$\int \sqrt{Y} dY = \frac{h}{U_1} \int \frac{dX}{\sqrt{X-1}} + \text{const.},$$

azaz

$$\tfrac{1}{3} Y^{\frac{3}{2}} = \frac{h}{U_1} (X-1)^{\frac{1}{2}} + \text{const.} \tag{42}$$

A második esetben k állandó lévén, a

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2k}{U_1} \frac{1}{\sqrt{X(X-1)}},$$

egyenlet megoldása

$$Y=\frac{2k}{U_1}\int\frac{dX}{\sqrt{X(X-1)}}$$

azaz

$$Y=\frac{k}{U_1}\log.(X+\sqrt{X(X-1)})+\text{const.} \tag{43}$$

Végül

$$z=\int\frac{dX}{Y} \tag{44a}$$

formula megadja a differenciál-egyenlet megoldását, egyben a tömegpont vertikális emelkedését mint az X változó függvényét. A tömegpont meridiánszöge

$$u_1=\int\frac{dz}{U_1\sqrt{X-1}},$$

azaz

$$u_1=\frac{1}{U_1}\int\frac{dX}{Y\sqrt{X-1}}. \tag{44b}$$

Meghatározandó még az idő mint az X függvénye. Ámde

$$u'=v\sqrt{\frac{X-1}{X}}$$

és

$$v=\sqrt{2g}\sqrt{\frac{X}{\frac{dX}{dz}}}$$

tehát

$$u'=\sqrt{2g}\sqrt{\frac{X-1}{Y}}=\frac{dz}{dt}$$

honnan

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{dX}{\sqrt{Y(X-1)}}. \tag{44c}$$

18. A differenciál-egyenlet megoldása még egyszerűbb, ha a kúp vizszintes síkká degenerál; ekkor $\gamma=\frac{\pi}{2}$ folytán

$$\text{ctg.}\,\gamma=0,\quad \text{tg.}\,\gamma=\infty,$$

tehát a differenciál-egyenlet csak úgy lesz kielégítve, ha

$$\frac{dx}{du} = 0,$$

azaz x=const.

Ennek az eredménynek mechanikai jelentése az, hogy horizontális síkon a tömegpont pályája egyenes vonal. Ugyanis a (36) értelmében

$$x = \frac{1}{u^2 \cos^2 \vartheta},$$

minélfogva

$$u \cos \vartheta = \text{const.},$$

a mi a szóban levő koordinátákban, az egyenes egyenlete.

Réthy Mór.

AZ ADJUNGÁLT HELYETTESÍTÉSEK ALKALMAZÁSA AZ ADJUNGÁLT LINEÁR DIFFERENTIALEGYENLETEKNÉL.

RADOS úr az adjungált helyettesítésekről írt értekezésében* említi, hogy az

$$y_\alpha = a_{\alpha_1} x_1 + c_{\alpha_2} x_2 + \ldots + c_{\alpha_n} x_n \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés elmélete voltaképen nem más, mint a

$$c_{\alpha 1},\ c_{\alpha 2},\ \ldots,\ c_{\alpha n}$$

-ből alkotott

$$\| c_{\alpha\beta} \|$$

mátrixok elmélete. E mátrixok elmélete önként felmerül, ha az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

változókkal kogrediens változókat vezetünk be, és e kogrediens sorozatokból alkotjuk meg az összes m-edfokú determinánsokat. RADOS úrnak az említett értekezésben levezetett tétele e szerint a determinánsok lineár helyettesítéseinek karakterisztikus egyenletére vonatkozik. Ha kogrediens változókul tekintjük egy homogén lineár differenciálegyenlet alaprendszerét és ez alaprendszer differenciálhányadosait egészen az $(m-1)$-sőig, akkor RADOS úr tétele adjungált lineár differentiálegyenletek *alapegyenletére* vonatkozó tétellé válik.

1. Legyen:

---

* Math. és Phys. Lapok III. köt. 12. l.

$$\begin{matrix} x_{11}, & x_{12}, & \ldots, & x_{1n} \\ x_{21}, & x_{22}, & \ldots, & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1}, & x_{m2}, & \ldots, & x_{mn} \end{matrix} \qquad 1)$$

a kogrediens változóknak m sora (ahol $n > m$). Az

$$x'_{ik} = c_{k1}\,x_{k1} + c_{k2}\,x_{i1} + \ldots + c_{kn}\,x_{in} \qquad 2)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

lineár helyettesítés együtthatói tehát függetlenek az i indextől, vagyis a felírt változók minden sora ugyanazt a 2) alatti lineár helyettesítést szenvedi.

Jelöljük az 1) alatti mátrixból alkotható m-ed fokú determinánsokat bizonyos sorrendben

$$X_1, X_2, \ldots, X_\mu \qquad \left(\mu = \binom{n}{m}\right) \qquad 3)$$

-vel és alkalmazzuk a 3) alatti sorozatban az x_{ik} változókra a 2) alatti lineár helyettesítéseket, akkor X_i átmegy az

$$X'_i = C_{i1}X_1 + C_{i2}X_1 + \ldots + C_{i\mu}X_\mu \qquad 4)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \mu)$$

kifejezésbe, a hol a C_{ij} együtthatók a $|c_{ik}|$ determináns m-edfokú aldeterminánsait jelölik, még pedig, ha

$$X_i = \begin{vmatrix} x_{1i_1} & x_{1i_2} \ldots x_{1i_m} \\ x_{2i_1} & x_{2i_2} \ldots x_{2i_m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{mi_1} & x_{mi_2} \ldots x_{mi_m} \end{vmatrix}$$

és

$$X = \begin{vmatrix} x_{1j_1} & x_{1j_2} \ldots x_{1j_m} \\ x_{2j_1} & x_{2j_2} \ldots x_{2j_m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{mj_1} & x_{mj_2} \ldots x_{mj_m} \end{vmatrix},$$

akkor

$$C_{ij} = \begin{vmatrix} c_{i_1j_1}, & c_{i_1j_2} \ldots c_{i_1i_m} \\ c_{i_2j_1}, & c_{i_2j_2} \ldots c_{i_2i_m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{i_mj_1}, & c_{i_mj_2} \ldots c_{i_mj_m} \end{vmatrix}.$$

RADOS úr tétele szerint a 4) alatti lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei a 2) alatti lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökeiből úgy nyerhetők, hogy e gyökök közül minden lehető módon m különbözőt kiválasztunk és ezek szorzatát alkotjuk. A kogrediens változók bevezetésével tehát olyan új

$$X_1, X_2, \ldots, X_\mu$$

változókat nyertünk, melyek az adjungált lineár helyettesítésnek vannak alávetve.

2. Ilyen kogrediens változókat nyerünk akkor is, ha egy homogén lineár differenciálegyenlet alaprendszerét és ez alaprendszer differenciálhányadosait vesszük tekintetbe.

Legyen az adott homogén lineár differenciálegyenlet a következő:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+ \ldots +p_n y=0, \qquad 5)$$

a hol

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i} \qquad 5)$$

és a p együtthatók a független x változó egyértékű analitikai függvényei. Legyen e differenciálegyenlet egyik, valódi szinguláris pontja a, akkor, miként ismeretes, e pont *környezetét* * egész a legközelebbi szinguláris pontig terjedő, az a körül, mint középpont körül leírt kör határozza meg. Ha $x=x_0$ pont e körön belül fekszik és az a-tól különbözik, akkor, mint a lineár differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, e pont környezetében előállíthatók oly $x-x_0$ pozitiv egész hatványai szerint haladó

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad 6)$$

partikuláris megoldások, melyek *alaprendszert* alkotnak.

Ha a független változó az $x=a$ szinguláris helyet körüljárván, eredeti helyzetébe visszatér, akkor, ha az a pont *igazi* szinguláris pont volt, nem pedig *látszólagos*, a 6) alatti alaprendszer e szinguláris ponthoz tartozó lineár helyettesítést szenved. E körüljárás folytán y_i átmegy

* FUCHS Crelle J. 66. k. 125. l.

$$y_i = c_{i1} y_1 + c_{i2} y_2 + \ldots + c_{in} y_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad 7)$$

-be. Ugyanezt a lineár helyettesitést szenvedik az alaprendszerrel együtt a differenciálhányadosok is, amennyiben $y_i^{(k)}$ átmegy:

$$y_i^{(k)} = c_{i1} y_1^{(k)} + c_{i2} y_2^{(k)} + \ldots + c_{in} y_n^{(k)}$$

-ba. E szerint tehát mondhatjuk, hogy az

$$\begin{array}{llll} y_1 , & y_2 , & \ldots & y_n \\ y_1' , & y_2' , & \ldots & y_n' \\ y_1'' , & y_2'' , & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} , & y_2^{(m-1)} , & \ldots & y_n^{(m-1)} \end{array}$$

rendszer a változók m kogrediens sorozatát alkotja.

Ha már most e rendszertől ép úgy, mint az 1) alatti rendszerből megalkotjuk az

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu \qquad \left(\mu = \binom{n}{m}\right) \qquad 9)$$

m-edfokú determinánsokat, akkor a 9) alatti függvények a 7) alatti lineár helyettesítés m-edik adjungált helyettesitésének lesznek alávetve, ha a független változó az $x - x_0$ pontból kiindulva, az $x = a$ szinguláris pont körül jár oly úton, mely csakis ezt a szinguláris pontot kerüli meg.

3. A 9) alatti függvények általánosságban oly μ-edrendű homogén lineár differenciálegyenletnek alaprendszerét alkotják, melynek együtthatói az 5) alatti differenciálegyenlet együtthatóiból és azok differenciálhányadosaiból (egész a μ-ik rendig) raczionális módon alkothatók meg.

Legyen például:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

Ha már mostan Y differenciálhányadosait alkotjuk, akkor közvetetlenül látjuk, hogy

$$Y' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_1' & y_2' & \dots & y_m' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(m-2)} & y_2^{(m-2)} & \dots & y_m^{(m-2)} \\ y_1^m & y_2^m & \dots & y_m^m \end{vmatrix},$$

mert ha nem az utolsó sorban levő elemek differenciálhányadosait képezzük, akkor a keletkező determináns identice 0. Ha a differenciálást folytatjuk és arról gondoskodunk, hogy az m-ik differenciálhányadosok mindig az 5) alatti differenciálegyenlet segitségével alacsonyabb rendűek által fejeztessenek ki, akkor általában ilyen alakú kifejezésekre jutunk:

$$Y^{(\varrho)} + A_{1\varrho} v_1 + A_{1\varrho} v_2 + \dots + A_{\mu\varrho} v_\mu , \qquad 11)$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, \dots, \mu)$$

a hol az A együtthatók az 5) alatti egyenlet együtthatóiból és azok differenciálhányadosaiból raczionális módon keletkeznek, továbbá a v kifejezések az

$$\begin{Vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m & y_m' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{Vmatrix} \qquad 12)$$

mátrixból alkotható m-edfokú determinánsokat jelölik.

Általánosságban a 11) alatti lineár egyenletrendszer determinánsa nem 0, tehát a $v_1, v_2, \dots v_\mu$ eliminálása rávezet a következő

$$Y^{(\mu)} + P_1 Y^{(\mu-1)} + \dots + P_\mu Y = 0 \qquad 13)$$

homogén lineár differenciálegyenletre, melynek a 10) alatti determináns eleget tesz. E differenciálegyenlet megalkotásánál csak azt vettük tekintetbe, hogy az $y_1, y_2, \dots, y_m$ az 5) alatti homogén lineár differenciálegyenlet integráljai, következésként e 13) alatti differenciálegyenletnek eleget tesznek az összes

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu \qquad 9)$$

m-edrendű determinánsok. Megint a legáltalánosabb esetet tartva szem előtt, mondhatjuk, hogy ez a rendszer a 13) alatti egyenlet alaprendszere, azaz nem áll fönn ilyen alakú reláczió:

$$a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_\mu Y_\mu = 0,$$

a hol $a_1 \ldots a_\mu$ 0-tól különböző állandók.

4. Ha az x független változó ez $x=a$ szinguláris pont körül jár a már jelzett módon, akkor a 9) alatti alaprendszer lineár helyettesítést szenved, mert Y_i átmegy

$$Y_i = C_{i1} Y_1 + C_{i2} Y_2 + \ldots + C_{i\mu} Y_\mu \qquad 14)$$

-be, a hol a szereplő lineár helyettesítés, miként említve volt, a 7) alatti helyettesítés m-edik adjungált helyettesítése.

Ismeretes, hogy minden szinguláris ponthoz tartozik általánosságban μ olyan, egymástól független megoldás, a melyek a lehető legegyszerűbb körüljárási relácziót tüntetik fel, a mennyiben mindegyikük egy *állandóval* szorzódik. Ez állandó szorzók nem egyebek, mint a

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\varrho, & C_{12} & \ldots & C_{1\mu} \\ C_{21} & C_{22}-\varrho & \ldots & C_{2\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{\mu 1} & C_{\mu 2} & \ldots & C_{\mu\mu}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. Ez az egyenlet a 13) alatti homogén lineár differenczialegyenlet $x=a$ szinguláris pontjához tartozó *alapegyenlet.*

Ha rövidség végett a 13) alatti egyenletet az 5) alatti eredeti differenczialegyenlet m-edik adjungált differentialegyenletének nevezzük, akkor, miként látjuk, ez adjungált differenczialegyenlet alapegyenlete az adjungált helyettesítés karakterisztikus egyenlete és e szerint Rados úr tétele a következő egyszerű tételre vezetett:

Az m-edrendű adjungált homogén lineár differenczialegyenlet alapegyenletének gyökei az eredeti differenczialegyenlet megfelelő alapegyenletének gyökeiből úgy származnak, hogy az n gyökből minden lehető módon m gyök szorzatát alkotjuk.

5. Ez a tétel a homogén lineár differenciálegyenlet általános elméletéből is következik. Ismeretes ugyanis, hogy ha az a szinguláris ponthoz tartozó alapegyenlet gyökei:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

és általában

$$r_k = \frac{1}{2\pi i} \log \omega_k$$

tesszük, akkor az $x=a$ pont környezetében az alaprendszer előállítható a következő alakban:

$$Y_k = (x-a)^{r_k} P(x-a), \qquad (k=1, \ldots n) \qquad 16)$$

a hol a $P(x-a)$ az $(x-a)$ hatványai szerint haladó LAURENT-féle sor, mely abban az esetben, midőn az $x=a$ pont a differenciálegyenletnek úgynevezett *határozott* pontja, csak véges számú negativ hatványt tartalmaz.* (A FUCHS-féle osztálynál minden szingularis pont ilyen jellegű.) Ha y_k ezen értékeit tekintetbe vesszük, akkor azon Y determináns, mely az

$$y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_m}$$

-ből és ezek differenciálhányadosaiból alakul, tehát az

$$Y = \begin{vmatrix} y_{i_1} & y_{i_2} & \ldots & y_{i_m} \\ y'_{i_1} & y'_{i_2} & \ldots & y'_{i_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(m-1)}_{i_1} & y^{(m-1)}_{i_2} & \ldots & y^{(m-1)}_{i_m} \end{vmatrix}$$

ilyen alakra hozható az a pont környezetében:

$$Y = (x-a)^{r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_m}} R(x-a)$$

tehát az x független változónak az a pont körül járásánál valóban az

$$Q = e^{2\pi i (r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_m})} = \omega_{i_1} \cdot \omega_{i_2} \cdot \ldots \cdot \omega_{i_m}$$

-mel szorzódik. *Beke Manó.*

* FUCHS Crelle Journal 66. pag. 132.

A KARAKTERISZTIKUS EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

A karakterisztikus egyenletek elmélete igen alkalmas arra, hogy bizonyos algebrai feladatoknak *explicit* megoldását nyújtsa. Ez azon a megjegyzésen * alapszik, hogy

»*Minden algebrai egyenlethez racziónális uton található oly helyettesítés, a melynek karakterisztikus egyenlete vele összeesik.*«

A jelen dolgozatban e megjegyzés alapján a következő feladatokat tárgyalom:

1. *Adva lévén két egyenlet, megszerkesztendő amaz egyenlet, melynek gyökei az adott egyenletek gyökeinek szorzatai, azaz, ha az első egyenlet gyökei* $\omega_i \, (i=1, 2, \ldots, m)$, *a másodikéi* $\omega'_k \, (k=1, 2, \ldots, n)$ *a keresett egyenlet gyökei*

$$\omega_i \omega'_k \qquad (i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

legyenek.

2. *Adott egyenlethez megszerkesztendő az az egyenlet, melynek gyökei az adott egyenlet gyökeinek adott pozitív egész kitevővel képezett hatványai.*

*

1. Az első feladat megoldását a következő tétel szolgáltatja:

Ha az

$$x'_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rm}x_m \qquad (r=1, 2, \ldots, m) \qquad (A)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m,$$

---

* L. Rados G.: Az adjungált helyettesítések elméletéről. E folyóirat III. kötetének 18. és 19. l.

ha továbbá az

$$y_s = b_{s1}y_1 + \ldots + b_{sn}y_n \qquad (B)$$
$$(s=1, 2, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$$

akkor a

$$z'_{rs} = \sum_{\varrho=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{n} a_{r\varrho} b_{s\sigma} z_{\varrho\sigma} \qquad (A, B)$$
$$(r=1, 2, \ldots, m;\ s=1, 2, \ldots, n)$$

lineár helyettesítés karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_i \omega_k$$
$$(i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n).$$

Az utolsó helyettesítés részletesen kiírva a következő:

$$z'_{11} = a_{11} b_{11} z_{11} + \ldots + a_{11} b_{1n} z_{1n} + \ldots + a_{1m} b_{11} z_{m1} + \ldots + a_{1m} b_{1n} z_{mn}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z'_{1n} = a_{11} b_{n1} z_{11} + \ldots + a_{11} b_{nn} z_{1n} + \ldots + a_{1m} b_{n1} z_{m1} + \ldots + a_{1m} b_{nn} z_{mn}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z'_{m1} = a_{m1} b_{11} z_{11} + \ldots + a_{m1} b_{1n} z_{1n} + \ldots + a_{mm} b_{11} z_{m1} + \ldots + a_{mm} b_{1n} z_{mn}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z'_{mn} = a_{m1} b_{n1} z_{11} + \ldots + a_{m1} b_{nn} z_{1n} + \ldots + a_{mm} b_{n1} z_{m1} + \ldots + a_{mm} b_{nn} z_{mn}$$

A bebizonyítás áttekinthetővé tétele végett vezessük be a következő KRONECKER-féle jelöléseket: legyen

$$\delta_{r\varrho} = 0, \quad r \gtrless \rho; \quad \delta'_{s\sigma} = 0, \quad s \gtrless \sigma$$
$$\delta_{r\sigma} = 1, \quad r = \rho; \quad \delta'_{s\sigma} = 1, \quad s = \sigma$$
$$\left(\begin{matrix} r, \varrho = 1, 2, \ldots, m \\ s, \sigma = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

Ezeknek alkalmazása után præmissáink a következők. Az

$$\begin{matrix} (a_{11} - \delta_{11}\omega_i) x_1 + \ldots + (a_{1m} - \delta_{1m}\omega_i) x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1} - \delta_{m1}\omega_i) x_1 + \ldots + (a_{mm} - \delta_{mm}\omega_i) x_m = 0 \\ (i=1, 2, \ldots, m) \end{matrix} \qquad 1.$$

és

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}-\delta'_{11}\omega'_k y_1+\ldots+(b_{1n}-\delta'_{1n}\omega'_k)y_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}-\delta'_{n1}\omega'_k y_1+\ldots+(b_{nn}-\delta'_{nn}\omega'_k)y_n=0 \end{array}\right\} \quad \text{II.}$$
$$(k=1,2,\ldots,n)$$

lineár egyenletrendszerek kielégíthetők az x és y ismeretlenek oly értékrendszerei által, melyeknek van a zérustól különböző x és a zérustól különböző y eleme.

Legyen egy-egy ily értékrendszer

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\xi_1,\quad x_2=\xi_2,\ldots,x_m=\xi_m \\ y_1=\eta_1,\quad y_2=\eta_2,\ldots,y_n=\eta_n \end{array}\right\} \quad \text{III.}$$

Ha az I. alatti egyenletek mindegyikét rendre végig szorozzuk a II. alatt álló egyenletek mindegyikével, akkor ismét oly rendszert nyerünk, melyet a III. alatti értékrendszer kielégít.

E rendszer a következő:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}-\delta_{r\varrho}\omega_i)(b_{s\sigma}-\delta'_{s\sigma}\omega'_k)\,x_\varrho y_\sigma=0$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n)$$

Vagy ha a kijelölt műveleteket végrehajtjuk, lesz:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}b_{s\sigma}+\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)\,x_\varrho y_\sigma-\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}a_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega'_k x_\varrho y_\sigma-$$
$$-\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}b_{r\varrho}\delta_{s\sigma}\omega_i x_\varrho y_\sigma=0 \qquad \text{IV.}$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n).$$

De más oldalról az I. és II. alatt álló egyenletekből következik, hogy

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega'_k-\delta_{r\sigma}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)\,x_\varrho y_\sigma=0$$
$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(b_{s\sigma}\delta_{r\varrho}\omega_i-\delta'_{s\sigma}\delta_{r\varrho}\omega_i\omega'_k)\,x_\varrho y_\sigma=0\,;$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n)$$

ha ezeket az egyenleteket a IV. alattihoz adjuk, lesz:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}b_{s\sigma}-\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)\,x_\varrho y_\sigma=0$$
$$(r,i=1,2,\ldots,m;\ s,k=1,2,\ldots,n).$$

E rendszert szintén kielégíti a III. alatti értékrendszer és így a:

$$\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}(a_{r\varrho}b_{s\sigma}-\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}\omega_i\omega'_k)\,z_{\varrho\sigma}=0$$
$$(r,\,i=1,2,\ldots,m;\;s,\,k=1,2,\ldots,n)$$

lineár egyenletrendszernek van oly megoldása, melyben nem minden ismeretlennek értéke zérus. Ennélfogva kell, hogy e rendszer determinánsa eltünjék. Minthogy a

$$\delta_{r\varrho}\delta'_{s\sigma}=1$$

egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$r=\rho,\quad s=\sigma,$$

és e szorzat minden más esetben zérus, e rendszer determinánsa a

$$z'_{rs}=\sum_{\varrho=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n}a_{r\varrho}b_{s\sigma}z_{\varrho\sigma}$$

helyettesítés karakterisztikus függvényének helyettesítési értéke az

$$\omega_i\omega'_k$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\;k=1,2,\ldots,n)$$

helyeken és ez a helyettesítési érték egyenlő zérussal.

Azonban a vizsgált karakterisztikus egyenlet gyökei általánosságban különbözők s minthogy a talált gyökök száma mn az egyenlet fokszámával megegyez, nem is lehet más gyöke az egyenletnek, mint az előbb említettek, tehát az összes gyökök a következő táblázatban foglaltatnak:

$$\begin{array}{l}\omega_1\omega'_1,\ \omega_1\omega'_2,\ \ldots,\ \omega_1\omega'_n\\ \omega_2\omega'_1,\ \omega_2\omega'_2,\ \ldots,\ \omega_2\omega'_n\\ \ldots\ldots\ldots\\ \omega_m\omega'_1,\ \omega_m\omega'_2,\ \ldots,\ \omega_m\omega_n.\end{array}$$

Ezzel a fönt kimondott tétel be van bizonyítva.

E tételből még egy ismeretes determinánstétel következik. Ha ugyanis az A, B, (A, B) helyettesítések determinánsainak értékeit rendre A, B, (A, B)-vel jelöljük, akkor az algebra elemei szerint

$$\frac{(-1)^{mn}}{(-1)^{mn}}(A,B)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\omega_i\omega'_k=(\omega_1\omega_2\ldots\omega_m)^n(\omega'_1\omega'_2\ldots\omega'_n)^m;$$

de

$$(\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m)^n = \left(\frac{(-1)^m}{(-1)^m} A\right)^n$$

$$(\omega'_1\omega'_2 \ldots \omega'_n)^n = \left(\frac{(-1)^n}{(-1)^n} B\right)^m$$

és igy

$$(A, B) = A^n B^m.$$

Ezt a tételt legelőször RADOS tanár úr állitotta fel * és GRASSMAN módszereinek alkalmazásával bizonyitotta be, újabban HENSEL más módszer alapján bizonyitotta be ujból.**

II. Éppen úgy, a mint az előbbi módon két, helyettesitésből alkottunk egy harmadikat, úgy összetehetünk három helyettesitést is megállapitván, hogy

$$(A_1, A_2, A_3) = ((A_1, A_2), A_3),$$

és általában p számú helyettesitést, a hol megállapitjuk, hogy

$$(A_1, A_2, \ldots, A_p) = ((A_1, A_2, \ldots, A_{p1}), A_p)$$

legyen.

2. E megjegyzés után áttérhetünk a második feladat megoldására. Legyenek az A helyettesités karakterisztikus egyenletének gyökei:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m.$$

Képezzük az $(A, A, \ldots, A^p)$ helyettesitést. Ennek karakterisztikus egyenlete az

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2} \ldots \omega_{i_p}$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m)$$

gyökökkel bir. Jelöljük ezt az egyenletet *a)* egyenletnek.

Az A helyettesités másodfokú aldeterminánsaiból képezett helyettesitést jelöljük A'-vel. RADOS úrnak az adjungált helyettesitésekről szóló és már idézett dolgozatából tudjuk, hogy karakterisztikus egyenletének gyökei:

---

* Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. VIII. pg. 60.

** Acta Math. Bd. XIV. Ugyanitt találni e tételre vonatkozó irodalmi megjegyzéseket.

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2}$$
$$(i_1 \gtrless i_2;\ i_1\ i_2 = 1, 2, \ldots, m).$$

Képezzük most az $(A', A', A, \ldots, A^{p-2})$ helyettesitést. Karakterisztikus egyenletének gyökei lesznek:

$$\omega_{i_1}\omega_{i_2}\omega_{i_3} \ldots \omega_{i_p}$$
$$(i_1 \gtrless i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m).$$

Jelöljük ezt az egyenletet $\beta)$-val.

Az $\alpha)$ és $\beta)$ egyenletek explicit alakban vannak megadva. A legnagyobb közös osztó algorithmusa segítségével áttérhetünk az $\alpha')$, $\beta')$ egyenletekre, melynek az $\alpha)$ illetőleg a $\beta)$ egyenlet gyökeit csak egyszerűen tartalmazzák.

Azt állitom, *hogy az $\alpha')$ és $\beta')$ egyenletek többtagúinak hányadosa adja a keresett egyenletet.*

Ugyanis az $\alpha')$ egyenletben a következő tipusú gyökök vannak. Olyanok, melyekben p tényező különböző, ezek bent vannak a $\beta')$ egyenletben is; olyanok, melyekben $p-i$ $_{(i=1, 2, \ldots, p-2)}$ tényező különböző, ezek a $\beta')$ egyenletnek is gyökei.

És ezzel kimeritettük a $\beta')$ egyenlet gyökeit; de az $\alpha')$ egyenletben még oly gyökök is vannak, melyekben az összes tényezők egyenlők és ezek a következők:

$$\omega_i^p, \ _{(i=1, 2, \ldots, m)}.$$

Ezzel a 2. feladat is meg van oldva.

Bauer Mihály.

PHYSIKAI SZEMLE.

A hőmérséklet mérése elektromos úton.

Dr. Carl Barus: Die physikalische Behandlung und die Messung hoher Temperaturen. Leipzig Amb. Barth 1892.

Karl Barus: Die Messung hoher Temperaturen. Physikalische Revue II. Band 295—317. l. 1892.

L. Holborn und W. Wien: Ueber die Messung hoher Temperaturen. Zeitschrift für Instrumentenkunde. Zwölfter Jahrgang. 257—267 és 296—307 l. 1892.

C. E. Guillaume: La mesure des températures par les procédés électriques. La Lumière Électrique XXVIII. köt. 1888.

J. Blondin: Recherches récentes sur la mesure des températures par les procédés électriques. La Lumière Électrique XLVII. köt. 1893.

*

A physikai méréseknek igen nagy része czéljául tűzi ki annak megállapítását: miképen változik a különböző anyagok szerkezete s az őket jellemző állandók a hőmérséklettel. Hogy ezt tehesse, s hogy a különböző mérések egymással összehasonlíthatók legyenek, mindenek előtt a hőmérséklet mérésére vonatkozólag egységes megállapodásra van szükség. Bármely jelenség, mely a hőmérséklettel változik, alapja lehet a hőmérséklet definitiójának. A míg a hőmérsékletnek theoretikus alapon való definitiója nem történik, addig ama szempont dönt, hogy mennyire állítható elő az illető jelenség menten minden egyéb zavaró körülménytől, hogy tehát mennyire biztos a megállapodás. Már Galilei folyadék kiterjedésére alapította hőmérsékleti skáláját. Mióta Gay-Lussac kimutatta, hogy valamennyi gáz a hőmérséklettel egyformán terjed ki, azóta a hőmérséklet tudományos definitiója a gázok kiterjedése alapján történik. Közben azonban a thermodynamika fejlődvén, lehetségessé vált a megfordítható körfolyamatok segítségével a hőmérsékletnek theoretikus alapon való definitiója. Ugyanakkor kiderült, hogy a tökéletes gázok kiterjedésére alapított hőmérsékleti skála eme theoretikusan megállapított skálával egyezik. A mennyiben azonban a «permanens» gázok sem követik tökéletesen a Gay-Lussac-Mariotte-féle törvényt, az egyes gázok kiterjedésére alapított skálák egymástól, valamint az absolut skálától némi eltérést mutatnak. Azonban a hydrogénre ez az eltérés oly csekély, hogy mindeddig még az eltérés irányát sem sikerült kideríteni.

A léghőmérőnek nagy előnye, hogy igen széles körben használható.

Lefelé a levegő kritikus hőmérséklete szab határt, melynek közelében a levegő elveszti a tökéletes gáz jellegét. Felfelé pedig az edény szab határt, melybe a levegőt szükségképen zárni kell; igen magas hőmérsékletnél t. i. az edény vagy megolvad vagy nem zárja el a levegőt tökéletesen a környezettől. Rosz oldala a léghőmérőnek, hogy igen gondos kezelést követel, ha megbízható eredményeket várunk tőle, s aránylag nagy tért foglal el; pedig nagyobb téren belül magas hőmérsékletet előállítani és állandósítani, oly esetekben pl. a melyekben folyadékfürdők már nem használhatók, igen nehéz feladat.

Gyakorlati szempontból tehát igen kivánatos oly módszer megállapítása, mely az előbb említett hátrányoktól ment. Elvi szempontból bármely, a hőmérséklettel változó jelenség felhasználható e czélra, csak biztos adatokat adjon. Igen régen hasznosítják e czélból a folyadékok, nevezetesen a higany kiterjedését a hőmérséklettel. Üvegcsőbe zárt higanynak persze más a látszólagos kiterjedése, mint a levegőé, azért a higany hőmérőt a léghőmérővel kell összehasonlítani, ha az absolut skálában akarunk vele mérni. Kellő gonddal kezelve a higanyhőmérő 0 és 100° között néhany ezred fokig biztos adatokat szolgáltat. Azonban sokkal kisebb körben használható, mint a léghőmérő, mert hiszen 39°-nál a higany megfagy, 300°-on túl pedig gőzének sürüsége igen rohamosan növekszik.

Felfelé a higany forrpontján túl is használhatóvá teszik a higanyhőmérőt az által, hogy a capillaris csövet nitrogennel töltik meg. Ekkor azonban a hőmérő utólagos kalibrálása keresztül nem vihető, másrészt a hőmérő belsejében előálló nyomásváltozások az edény oly deformatióját hozzák létre, melyről nehéz pontosan számot adni. Ily módon a higanyhőmérő használható ugyan még 400°-on túl is, de 200°-on túl alig eszközölhetők vele igen pontos mérések. Kitünik ebből oly módszernek a szükségessége, mely úgy nagyon magas, mint nagyon alacsony hőmérsékletek mérésére alkalmas s melylyel a léghőmérő hátrányai elkerülhetők.

Kinálkoznak erre elektromos módszerek: nevezetesen a thermoelem elektromotoros erejének s a vezetők ellenállásának változása a hőmérséklettel.

Különösen a thermoelektromos módszer kecsegtet nevezetes előnyökkel.

1. A tér, melynek hőmérséklete lemérendő, igen kicsiny lehet, mert hisz a thermo-elem egyik forrasztási helyét kell csak a térbe elhelyezni; kis keresztmetszetű drótokból készítve az elemet, a forrasztási hely tényleg csak igen kis helyet foglal el. — 2. Az elekromotoros erő csak a két forrasztási hely hőmérsékletétől függ; független a hőmérséklet eloszlásától az elem mentén. — 3. Platinát s annak valamely ötvényét használva, a módszer használhatóságának felső határa a platina olvadási pontja; tehát igen tág közben alkalmazható. — 4. A forrasztási hely igen rövid idő alatt felveszi

ama tér hőmérsékletét, melybe helyeztetett, holott a léghőmérő gömbje pl. csak hosszabb idő mulva veszi fel teljesen a környezet hőmérsékletét.

A kisérlet feladata már most eldönteni, hogy a módszer tényleg használnavehető-e, azaz hogy ugyanazon elem ugyanazon hőmérsékleti viszonyok között ugyanazon elektromotoros erőt mutatja-e, hogy idővel, nevezetesen többszöri hevítés után nem változnak-e meg állandóan az elem adatai.

A kisérletezés útja elő van írva: meg kell határozni, miképen változik az elem elektromotoros ereje a hőmérséklettel? Ha az összefüggés a hőmérséklet és elektromotoros erő között minden időben ugyanaz marad, akkor a módszer használnavehető. Lemérve az elem elektromotoros erejét, visszakövetkeztethetünk az egyik forrasztási hely, s ezzel a környezet hőmérsékletére. Magától értetődik, hogy csak az egyik forrasztási hely hőmérsékletét kell változtatni, míg a másik állandóan ugyanazon hőmérsékleten marad.

Az előbb említett czélból sok kisérletet tettek. Csakhamar a thermoelekromos áramok felfedezése után Becquerel és Breschet sikerrel alkalmazták a thermo-elemet az emberi test hőmérsékletének mérésére. Regnault is foglalkozott a thermo-elemekkel. Kisérleteiből azt a következtetést vonta, hogy a thermo-elem hőmérséklet-mérésre alkalmatlan. Nem ismerve még tüzetesebben a thermo-áramok sajátságait, Regnault abban a nézetben volt, hogy a thermo-elem elektromotoros ereje csak a két forrasztási hely hőmérséklet-különbségétől függ. Jelenleg azonban tudjuk, hogy függ a két hely abszolut hőmérsékletétől is; úgy hogy az egyik helyet állandó hőmérsékleten tartva, a másikat emelve, az elektromotoros erő növekedik bizonyos pontig, azontúl hevítve azonban, az elektromotoros erő csökken: ezen pont közelében az elektromotoros erő lassan változik. Ebből rögtön levonható ama következtetés, hogy oly thermo-elemet kell választanunk, melynek az u. n. neutrális pontja messze fekszik a hőmérsékleti köztől, melyben az elem mérésre használandó.

Részletesen foglalkozott a kerdéssel Le Chatelier; különféle elemeket vetett vizsgálat alá; legjobbnak találta a platina és 10%-os rhodiumos platinából készült elemeket, melyek igen állandóknak mutatkoztak: többszöri hevítés az elemen semmit sem változtatott. A léghőmérő használatát elkerülte azzal, hogy elemének egyik forrasztási helyét ismert forrpontú folyadék forró gőzébe helyezte; igen magas hőmérsékleteknél pedig olvadó fémbe.

Az egyes fémek olvadási pontjául a Violle meghatározta értékeket vette.

Ugyanilyen elemmel Wien és Holborn is foglalkoztak; a hőmérsékleteket közvetlenül léghőmérővel határozták meg. Különös gondot fordítottak a léghőmérő ugynevezett «kártékony teréből» származó hibára. A léghőmérő gömbje ugyanis igen vékony cső segítségével van a manometerrel — melylyel a léghőmérőben levő állandó térfogatu levegő nyomását mérik —

összekötve. Az ezen csőben lévő levegő igen rosszúl definiált hőmérsékleti viszonyok között van, a miből hibák származnak, melyekről igen nehéz számot adni. Hogy a hőmérséklet ezen csőben való elosztását kipuhatolják, magát a thermo-elemet használták fel.

A thermo-elem két vékony összeforrasztott drótból állott; rendes észlelésnél a forrasztási hely a léghőmérő gömbjének közepén volt elhelyezve, úgy azonban, hogy a sodronyt a léghőmérőben s a vékony csőben el lehetett tolni, miáltal a forrasztási helyet a vékony cső különböző helyeire hozhatták. Az ott észlelt elektromotoros erő értékéből következtethettek a hőmérsékletre, miután már előző kisérletekből közelítőleg ismerték a hőmérséklet és elektromotoros erő közötti összefüggést. Kisérleteiket 400°-tól körülbelül 1400°-ig terjesztették ki. Az eredményeket formulába foglalták, mely az elektromotoros erőhöz a megfelelő hőmérsékletet adja. A formula ily alaku:

$$t = 13{,}76e - 0{,}004841e^2 + 0{,}000\ 001\ 378e^3$$

e az elektromos erő, t az egyik forrasztási hely hőmérséklete, míg a másik 0° hőmérsékleten van.

Ez a képlet számos mérés eredményét fejezi ki; egy ugyanazon elem elektromotoros erejéből számított hőmérséklet a tényleg észleltől 1000° körül legfeljebb 5°-kal tér el, ugy hogy elemükkel 1000° körül a hőmérsékletet 5°-nyi pontossággal határozhatják meg. Ugyanekkora eltéréseket mutatnak egymástól az egyes elemek, melyek lehetőleg egyforma anyagból készültek.

Legbehatóbban foglalkozott a kérdéssel legujabban Barus. A platina és 10%-os iridiumos platinából készült elemet vizsgálta egyenesen a léghőmérővel. Hogy a léghőmérő gömbjében a hőmérséklet lehető egyforma legyen, úgy a léghőmérőnek, mint a fütőkemenczének igen érdekes szerkezetet adott. Az elem egyik forrasztási helyét a gömbbe benyúló csőbe helyezte. A bayeux-i porczellánból készült léghőmérőt muflival vette körül és igy helyezte a kemenczébe, melynek lángjai tehát a hőmérőt direct nem érték. A mufli a léghőmérő csöve mint tengely körül foroghatóan volt elhelyezve, mi által a hőmérőben a forgás tengelye körül a hőmérséklet eloszlása symmetrikus volt. Maga a kemencze függélyes hengerből állott, melybe két láng oldalnyilásokon, tangentiális irányban lépett be; ez által valóságos lángörvény keletkezett a kemenczében, s egyúttal a hőmérőben függélyes tengely körül is symmetrikusan oszlott el a hőmérséklet.

A gonddal végzett kisérletek igen kielégítő eredményre vezettek; az elem többszöri használat után is egyformán viselkedett. A hőmérséklet és elektromos erő közötti összefüggést nem sikerült emprikus formulába önteni az észlelés határain belül. Az elektromotoros erő görbéje különben igen közel egyenes. Az elem annyira állandónak mutatkozott, hogy Barus

becalése szerint még 1300°-nál is 1°-ig biztosan meghatározható vele a hőmérséklet. Az elektromotoros erő 350°-tól 1100°-ig 3400 mikrovolttól körülbelül 14000-ig változik. Az egyes elemek viselkedésében nagyobb különbségek mutatkoztak, ugyanazon elektromotoros erőnek körülbelül 5°-kal eltérő hőmérsékletek feleltek meg.

Mindeme kisérletekből kitünik, hogy előzetesen kalibrált platina a 10%-os rhodiumos platina elemmel a hőmérséklet 1300°-ig körülbelül 1°-nyi pontossággal meghatározható; nagy gonddal készült, de előzetesen nem kalibrált elemmel pedig körülbelül 5°-nyival.

Ha az ellenállás változásaval akarjuk a hőmérsékletet az absolut skálában mérni, mindenek előtt tudnunk kell, miképen változik az ellenállás a hőmérséklettel. Erre vonatkozólag igen számos mérést eszközöltek, különféle vezetőkkel. Egyenesen a hőmérséklet mérése szempontjából vizsgálta a platina ellenállását Callendar. Rendkivül tiszta platinával rendelkezett, melyen a leggondosabb chemiai elemzés sem volt képes idegen alkatrészeket kimutatni. Körülbelül 0,2 mm-es drótot használt, melynek ellenállása méterenkint 0°-nál körülbelül 5 ohm. Mindenek előtt a drótok ellenállásának változatlanságát vizsgálta s meggyőződött, hogy többszöri hevítés után ugyanazon hőmérsékletnél 0° és 600° között az ellenállás $\frac{1}{5000}$-ig állandó; a drótokat t.i. csak ilyen közben vizsgálta. Azután ugyanazon anyagból készült különböző drótokat hasonlított össze; kitünt hogy a különböző drótok ellenállásából számított hőmérsékletek 0° és 100° között nehány század fokig, 600°-nál pedig 1°-ig egyeztek. 0° és 600° között az észlelés határain belül parabolikus formulával állíthatta elő az ellenállást, nevezetesen:

$$r_t = r_0 (1 + 0{,}003448t - 0{,}000000533t^2)$$

Exponentialis formulával is kifejezhette a viszonyt s pedig ily alakban:

$$r_t = r_0 e^{\frac{\alpha t}{1+\beta t}}$$

hol

$$\alpha = 0{,}003426 \text{ és } \beta = 0{,}001529$$

Látható tehát, hogy az ellenállás változásával 0 és 100° között a hőmérséklet néhány századfokig, 600° körül pedig körülbelül 1°-ig biztosan mérhető. Callendar különben kisérleteit 600°-on túl is folytatja.

Rendkivül érdekesek Cailletet és Colardeau kisérletei. Említve volt, hogy középhőmérsékletnél a hydrogen-thermometer adatai teljesen egyeznek a thermodynamikus absolut skálaval. Az a kérdés, lefelé meddig tart az egyezés? A hydrogen folyósodási pontjához közeledve, elveszti a tökéletes gaz jellegét, s akkor a két skála nem egyezhet.

Meddig megbízható a hydrogen-thermometer? Ezen kérdéssel foglalkoznak Cailletet és Colardeau. A mint a gázhőmérő felmondja a szolgálatot, nem áll biztos módszer a rendelkezésünkre a hőmérsékletnek abszolut ská-

lában való mérésére, s egyenesen a gázhőmérő adataiból nem is lehet eldönteni, valjon eltérnek-e már az absolut skálától vagy nem. Csak kerülő úton lehet erről meggyőződni.

«Képzeljük, hogy ugyanazon térben egy hydrogen hőmérő mellett oly készülékek sora van felállítva, melyek a hőmérséklettől függő különböző sajátságokon alapulnak.

Jegyezzük fel mindegyiknek az állását: $J_1\ J_2\ J_3 \ldots$ ha a hőmérséklet $T_1\ T_2\ T_3 \ldots$, mely utóbbi adatokat a hydrogen-hőmérő szolgáltatja oly közben, melyben még eléggé tökéletes gáz.

Ezen eredmények görbéit megrajzolva, mindegyik készülékre egy

$$J=f(T)$$

összefüggést nyerünk, mely a készülék adatait az absolut hőmérséklettel összefüzi. Fordítva felhasználhatjuk eme képletet arra, hogy minden egyes készülék adatából a hozzátartozó hőmérsékletet kiszámítsuk. De világos, hogy ezen számítás csak addig bir értékkel, a míg T oly határok között fekszik, melyek között a kalibrálás eszközöltetett. Minden, kissé távoleső extrapolatio igazolva van a többiekkel való egyezése által és pedig annál biztosabban, minél nagyobb a felhasznált készülékek száma s minél különfélébb jelenségeken alapulnak.

Lassankint sülyesztvén a hőmérsékletet, minden valószínűség szerint be áll majd ama pillanat, mikor a hydrogen, kritikus pontját eléggé megközelítve, nem ad eléggé egyező adatokat.»

Cailletet és Colardeau 5 ily készüléket használtak: 1. hydrogen-hőmérőt; 2. 0,2 mm. átmérőjü és 6 m. hosszú platina-sodronyt, melynek ellenállását mérték; 3. Le Chatelier-féle thermo-elemet; 4. vasvörösrézből álló thermo-elemet; 5. 300 gr. sulyú platina-darabot, melylyel a hőmérsékletet kalorimetrikusan mérték. Mindegyikhez meghatározták a hozzá tartozó $f(T)$ görbét, meghatározták az ethylen forrpontját normális nyomás alatt s a következő értékeket nyerték:

Hydrogen-hőmérővel	102°,4
Platina ellenállásával	102°,6
Calorimetrikusan	102°
Le Chatelier elemével	102°,1
Vas-vörösrézelemmel	102°,9

Az egyezés teljesen kielégítő, s igy biztosra vehető, hogy —100°-ig a hydrogen-thermometer adatai a thermodynamikus skálával egyeznek. Azelőtt már Wroblewsky végzett hasonló vizsgálatokat, de thermometerét csak egy thermo-elemmel hasonlította össze s azt következtette, hogy a hydrogen-thermometer —190°-ig helyes. Következtetése azonban nem oly biztos, mint az előbbi. *Tangl Károly.*

A Mathematikai és Physikai Társulat ünnepélyes ülése

1894. OKTÓBER HÓ 25-ÉN.

Dr. KÖNIG GYULA alelnök az ülését megnyitván, üdvözli a nagy számmal megjelent tagtársakat. Előadja, hogy a választmány határozata szerint a mai ülés feladata a társulat elnökét, b. EÖTVÖS LORÁND urat mint m. kir. vallás- és közoktatásügyi minisztert, a Math Phys. Társulat nevében üdvözölni, az érettségi vizsgálatot tett tanulók első mathematikai versenyének eredményét kihirdetni s a jutalmakat kiosztani.

Felkéri FÉNYES DEZSŐ (Arad) és SZABÓ JÓZSEF (Vácz) tagtárs urakat, hogy MAURITZ REZSŐ vál. tag vezetése alatt ő Nagyméltóságát az ülésre meghívni szíveskedjenek.

Az egybegyültek a belépő elnököt felállással üdvözlik, zajos éljenzéssel fogadják, mire KÖNIG alelnök a következő szavakkal nyitotta meg a rövid időre félbeszakadt ülést:

Nagyméltóságú Elnök Úr, tisztelt Tagtársak!

A Mathematikai és Physikai Társulat ma családi ünnepet ül. E családi jellegnek felel meg az egyszerű külszín; de azért mégis úgy tetszik, úgy érezzük, mintha valami láthatatlan dísz járná be megszokott otthonunkat, mintha a magyar tanügy, a magyar tudomány ünnepe volna, a mit megülni készülünk.

Legmélyebb alattvalói hódolattal emlékszünk meg Ő Felsége legkegyelmesebb elhatározásáról, mely b. EÖTVÖS LORÁNDOT, társulatunk szeretett elnökét a magyar közoktatásügy élére állította. Üdvözletét hozza ez alkalomból e társulat elnökének és megalkotójának; jogos örömünket és bizalmunkat, nagyratörő reményekkel párosult megnyugvásunkat tolmácsolja majd fölkért szónokunk. De engedjék azért röviden kimondani azt, hogy üdvözletünknek az ünnepelt férfiu kiváló személyes tulajdonságai mellett, még messzevágó elvi jelentősége is van.

A magyar tanügy, a magyar tudomány b. EÖTVÖS LORÁND miniszterré való kinevezésével nagykorúvá lett. Gyámság alatt álltunk; és a gyámság

alól — bármily jóakaró legyen is — szabadulni, mindenkor jogos vágya az ifjunak. Önállók lettünk, a magunk jelölte, körünkből lett vezér parancsol sorainknak és már ezért is fokozott kötelességtudással, fokozott buzgalommal keressük útunkat pályánk rózsái és tövisei között.

Ma a rózsák napja derül; nem legkevésbbé nekem. Mert igaz hálával tartozom Önöknek, t. tagtársak, hogy én nyithattam meg ezen ülésünket, és hogy én adom majd ismét át e helyet szeretett elnökünknek, honnét a mainál hosszabb időre sem ma, sem később nem eresztjük el soha!

Most pedig a szó Bartoniek Géza titkár urat illeti.

A szólásra felhivott a következő beszédet mondta:

Nagyméltóságú Miniszter úr, mélyen tisztelt Elnökünk!

A Mathematikai és Physikai Társulat igen emlékezetes évfordulóhoz közeledik: negyedik fordulójához annak a napnak, a melyen a helybeli mathematikus és physikus szaktársak Nagyméltóságod meghívására ezen a helyen első izben összegyűltek, hogy meghallgassák Nagyméltóságodnak a gravitatióra vonatkozó vizsgálatairól tartandó előadását.

Nagyméltóságod két előadásban ugyanannyi év páratlan kitartású munkásságának fényes eredményeivel ismertetett meg bennünket. Láttuk, mint enyészteti el Nagyméltóságod az akadályokat, melyek más kutatókat az útnak úgyszólván a legelején megállítottak. Láttuk, miként teszik át Nagyméltóságodnak szinte végtelenig finomított módszerei a kutatások határait oly terekbe, a melyeken az elmélet ugyan már előbb is otthonosan mozoghatott, de hol a szabatos ismeretszerzés még alig próbálkozott. Láttuk, miként vezet egy-egy szerencsésen megoldott kérdés új problémák egész seregére s a végleges benyomás, mely rajtunk erőt vett, az volt, hogy a Nagyméltóságod kutatásaiban felszínre vetett kérdések megoldása nem egy tudós, hanem a tudósok egész iskolájának munkájára vár.

Azonban minderről bővebben szólni nem érzem magam illetékesnek. Csupán csak egy kisérletre hivom fel most tisztelt tagtársaim figyelmét: arra a kisérletre, a melyet ő Nagyméltósága amaz előadásainak hallgatóin s közvetve az összes magyar mathematikusokon és physikusokon folyamatba tett. Kisérlet tárgyává tette, nem lehetne-e a magyar mathematikusokat és physikusokat egyesíteni oly czélból, hogy az a munka, melyet az egyes a saját szakbeli tökéletesedése terén elvégez, a többi szaktársakra is értékesüljön s hogy egymást támogatva, valamennyien könnyebben haladjunk. A társulás czélját nem valami hangzatos, csalogató jelszavakba burkolva fejezte ki. «Tanuljunk egymástól, hogy mennél jobban tanithassunk!» Erre szólított fel bennünket Nagyméltóságod; s várakozásában nem csalódott.

Excellentiádnak ez a kisérlete, mint sok más, sikerült. A magyar ma-

thematikus és physikus szaktársak meghallották Nagyméltóságod hivását, egyesültek s rövid idő alatt létrejött a Mathematikai és Physikai Társulat.

Nagy érdeme Nagyméltóságodnak, s nagy érdeme és dicsősége Nagyméltóságoddal együtt annak a kicsi, de lelkes tanárcsapatnak, mely a mai nemzedéket nevelte s nevelte úgy, hogy a mesterek eszméiért lelkesedni tudott, bárha egy része a sorssal nem épen könnyű harczban áll. A magyar mathematikusok és physikusok megértették, hogy Nagyméltóságodnak bámulatosan egyszerű formulája mély értelmet rejt, magasztos czél felé vezet. Megérezték, hogy a tudomány, a tudományhoz vezető iskola s ezzel műveltségünk szinvonala látja hasznát, ha az egyes a szakbeli tökéletesedés útján előbbre halad.

A ki társulatunk ügyeiről csupán csak szerény folyóiratunk lapjairól értesülhet s ha tárgyiasan és elfogulatlanul itélni tud, azt a megdönthetetlen igazságot fogja róluk leolvasni, hogy Nagyméltóságod társulatunkat nemcsak életre szólította, de valósággal megalapította és megalakította, oly szervezetet adván neki, mely fennállását hosszú időre biztosítja. Mindenesetre addig, a meddig a magyar mathematikusok és physikusok szellemi irányzata lényegében meg nem változik.

A társulat ama tagjai, kiknek azzal kedvezett a szerencse, hogy Nagyméltóságodat a társulat alapítás munkájában közvetlenül szemlélhették, többet is láttak: tartoznak vele a jelennek s a jövőnek, hogy ezt most ünnepélyesen konstatálják.

Minden társulati működés sikerességének egyik legfőbb tényezője, éltető eleme, a jó társulati szellem. A mi kis társulatunk kiváló szerencséje, hogy állandóan Nagyméltóságod példája lebegett előttünk. Ha csak kiváló állásából folyó kötelességei lehetetlenné nem tették, mindenkor megjelent összejöveteleinken, példát adott a munkában s példát adott abban, miként kell egymás törekvéseit méltányolnunk, egymást buzdítanunk, serkentenünk. Nagyméltóságod személyes tulajdonságainak köszönjük, hogy társulatunkban a minden jó ügyet megrontó kicsinyes rivalitások gyökeret nem vertek s hogy társulati működésünk nekünk nemcsak továbbképzésünkre hasznos, hanem egyúttal kellemes foglalkozásunk is. Röviden úgy merném ezt kifejezni, hogy Nagyméltóságod a társulatnak nemcsak életet, hanem erkölcsöt is adott.

Mind ennek természetes következménye, hogy mi, a társulat tagjai, Nagyméltóságod bölcs vezetésében rendületlen bizalmukat helyezzük s Nagyméltóságod előtt a legmélyebb tisztelettel, de egyúttal legbensőbb vonzalommal is hódolunk. S ha eddig még sem gondoltunk arra, hogy tiszteletünknek, legőszintébb hálánknak kifejezést adjunk, tán azért van, mert Nagyméltóságod megmutatta nekünk, mint kell az eszmék szolgálatában lelkesedéssel munkálkodni, de személyek kultuszára példát soha sem adott.

Hálánk néma volt és lehetett mindaddig, míg külső, nagy impulzus szólásra nem kényszerité.

Nem hiszem, hogy akad tagtársaim, a ki túlzással vádolna, ha azt mondom, hogy azon a napon, a melyen Ő Felsége legmagasabb kegyelme Nagyméltóságod kezére bizta hazánk szellemi ügyeinek legfőbb intézését s a magyar művelődésnek minden híve a legigazabb örömmel telt el, a mi érzelmeink egy fokkal melegebbek voltak, s lelkesedésünk magasabbra emelkedett.

Most már nem hallgathattunk. De épen azért, mivel abban a kivételesen szerencsés helyzetben voltunk, hogy Nagyméltóságod társulatunkért többet tett, mint másokért, mi is többel tartoztunk, mint mások. Híven Nagyméltóságod előttünk jól ismert intentióihoz, nem szóval, hanem tettel, vagy legalább is a jó szándék és a becsületes elhatározás kétségtelen jeleivel akartunk ma Nagyméltóságod előtt megjelenni.

Az esemény emlékét a társulat életében megörökítendő, a választmány elhatározta, hogy a hazai középiskolákon érettségi vizsgálatot tett tanulókat minden évben mathematikai-physikai versenyre szólítja, a verseny győzteseit megjutalmazza; és hogy ki legyen fejezve az a szerencsés körülmény, hogy társulatunknak Nagyméltóságod volt alapító elnöke, elhatározta azt is, hogy a díjak *b. Eötvös*-díj néven adassanak ki; a mihez ezennel kegyes beleegyezését kérjük.

Az első versenyt megtartottuk s örömünkre, sikerrel tarthattuk meg.

Mielőtt arra kérnők Nagyméltóságodat, hogy az eredményt kihirdetni s a megitélt jutalomdíjakat kiosztani méltóztassék, még egy más kéréssel is járulunk Nagyméltóságod elé.

Annak a komoly elhatározásnak bizonyságául, hogy a Nagyméltóságodtól a társulatba vitt eszmék szolgálatában a jövőben is rendületlenül kitartani kivánunk, összegyüjtöttük aláirásainkat. Nem pompás kötetbe, csupán szerény fasciculusba foglaltuk, melynek egyetlen ékessége a társulat symboluma: a *Mathematika*.

Kedves előttünk ez a symbolum eredete miatt; és kedves ama symbolikus erejénél fogva, melyet mi neki tulajdonítunk.

Nem a klasszikus szépségek piaczáról vettük mását: eredetije a M. T. Akadémia homlokzatát díszíti. Mi onnét lehoztuk és szövetségünk külső jelét: oklevelünket ékesítettük vele. Ma már ott díszlik tudományszakaink legszerényebb munkásának főbüszkesége, a könyves polcza fölött. Hő vágyunk, erős hitünk, hogy a hová Mathematikánk képe bevonult, a tudomány szeretetét, ha szunnyadt, felébresztette, s ha ébren volt, kitartásra buzdította.

De kedves nekünk ez a symbolum azért is, mert emlékezetünkbe hozza, hogy azok a dicsők, kiknek rendelkezéséből a művész alkotása az Akadémia

homlokzatára jutott, nagy, a nemzet mûvelődésében igen nagy fontosságot tulajdonítottak ama a szakoknak, a melyekért mi lelkesedünk.

És igaz, mély megindulás fog el bennünket, ha arra gondolunk, hogy a legtöbb, a legtisztább, a legmelegebb fényt abban az időben épen annak a neve sugározta ki az Akadémiából, mely névnek Nagyméltóságod az örököse. Ez a fény messze elhatott, addig, a meddig a civilisatió terjed; de legmelegebb sugarait mégis a haza fogta fel, és felfogta épen akkor, a mikor az életet ébresztő meleg után a nemzet a legjobban áhitozott.

S hatásukra élet gerjedt. Most már élet van a hazában, minden téren; de hogy az élet egészséges fejlődésre vezessen, világosság, sok világosság kell még ahhoz.

A társulat minden tagjának szivéből olvasom ki a kivánságot: Legyen Nagyméltóságod működése az, mely ezt a világosságot szétáraszsza. És adja Isten, hogy Nagyméltóságod az eszmék diadalát boldogságban erhesse meg.

S midőn végül arra kérem Nagyméltóságodat: fogadja kegyesen a mai ünnep emlékeül ezt a mi neveinkkel teleirt fasciculust, a társulat összes tagjainak még egy kérését is bátorkodom előadni: Ne hagyja el Nagyméltóságod társulatunkat, maradjon elnökünk ezentúl is. Nem úgy értjük kérelmünket, hogy annyi munkáját, gondját mernők társulatunk javára kivánni, mint eddig; jól tudjuk, hogy Nagyméltóságodat immár az egész ország gondjai terhelik, hogy minden munkás órája nagy érdekek szolgálatában múlik el.

De vannak, lesznek piheuő perczei is. Ezekben gondoljon Nagyméltóságod mi reánk, a mi szerény társulatunkra s jöjjön el körünkbe meggyőződni, vajjon híven kitartunk-e amaz eszmék szolgálatában, melyek ápolását társulatunkra bizta.

S ha Nagyméltóságod tapasztalata mi reánk nézve kedvező lesz, ne vonja meg tőlünk jóindulatát.

*

E szavak elhangzása után ő Nagyméltósága a jelenlevők zajos éljenzése között a következő beszéddel foglalja el az elnöki széket:

Mélyen tisztelt Mathematikai és Physikai Társulat!

Avval, hogy itt oly nagy számmal megjelentek, azzal, hogy hozzám nem annyira magasztaló, mint inkább barátságos szavakat intéztek, örömet kivántak nekem okozni. És én nem tagadhatom, bevallom szives örömest, hogy igazán nagy örömet is okoztak. Örvendek, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat, melynek alapításához én is hozzájárulhattam valamivel

fennállásának négy éve alatt azzá fejlődhetett, a mi ma, hogy tagjainak száma szaporodott s folyton szaporodik; hogy tagjainak szivében az egyetértés, mely minden társulat fennállására és gyarapodására szükséges, nagyra növekedett és nem szünt meg soha az igazi lelkesedés a tudományos, a kulturális czélok iránt.

De a mikor ezen örömről szólok, a melyet nekem most okoztak, nem tagadhatom el azt sem, hogy ezen öröm mellett, mint minden földi öröm mellett van valami fájdalom is; valami abból a fájdalomból, melyet érez az, a ki a megszeretett otthont, a melyben nagyra nőtt, a melyben soká dolgozott, elhagyni kényszerült és a melyet azután később, bár mint szeretett vendég, de mégis csak mint vendég láthat meg. Hisz ez a terem nekem otthonom, kedves otthonom volt, most pedig csak vendégül jelenek meg benne.

Önök uraim ismernek engem jól, hiszen eddigi pályatársaim, nagyrészt régi barátaim; azért tudják azt, nem szükséges, hogy részletesen kifejtsem önök előtt, hogy nem a nagyravágyás, nem a hatalom után való törekvés volt az, a mely arra indított, hogy jelen állásomat elfoglaljam. Tudják, hogy erre is ugyanazon törekvés, ugyanazon czélokra való törekvés indított, a mely az előtt vezérelt; az a törekvés: hogy hazánknak a tudomány szolgálatában munkása legyek.

Előbb azok közé tartoztam, kik a tudomány művelését maguk eszközlik; magam fogtam meg mintegy azon szerszámokat, ásót, kapát, a melylyel a tudomány földét művelik. Most más feladat áll előttem, a melynek czélja mégis a régi maradt, bár teendőm más; az t. i., hogy egyengessem az útat azoknak, a kik ezen tudományos föld művelésében dolgozni kiváhnak.

Mostani foglalkozásom mellett, mostani állásomban, a mikor a miniszteri székben ülök, részrehajlónak lennem nem szabad; nem szabad részrehajlónak lennem nemcsak egyének, de tudományszakok iránt sem. A miniszteri székben nem szabad, hogy csak physikus legyek. Hanem hiszen, a mint az előttem szóló is mondta, a munka közben vannak pihenő órák is; és ezen pihenő órákban engedjék meg, hogy ismét ide jöjjek és akkor ismét a régi physikus, mint régen, ismét az Önök körében jó barátjuk maradhassak.

Már most szívből jövő köszönetemet mondom ki az ünnepeltetésért és

a barátságos jóindulatért, a melyet irántam tanusítottak. Engedjék meg, hogy, mint régen, ezen elnöki székemet elfoglalhassam, hogy ujra együtt hozzáláthassunk azon munkához, a mely minket eddig is egyesített.

*

S most térjünk át a munkára. — A mai ülés második tárgya a tanulók mathematikai versenyéről szóló jelentés s a díjak kiosztása. Felszólítom az ügyvivő titkárt jelentésének előterjesztésére.

Bartoniek Géza ü. titkár jelentése a következő:*

Mélyen tisztelt Mathematika és Physikai Társulat!

A választmány f. é. junius hó 22-én tartott ülésén azzal bízott meg, hogy a hazai középiskolákon a lefolyt tanévben érettségi vizsgálatot tett tanulók között rendezendő országos verseny ügyében a szükséges intézkedéseket megtegyem.

Szerencsém van jelenteni, hogy a versenyre szóló felhívást az összes hazai teljes középiskolák igazgatóinak megküldtem, azzal a kérelemmel, hogy azt az abiturienseknek tudomására hozni szíveskedjenek.

Bár oly időben vették a felszólítást, a mikor a legtöbb helyütt a tanulók már elszéledtek volt s az évzárás teendőivel legjobban voltak elhalmozva, az igazgató urak méltányolták a társulat törekvését s gondoskodtak róla, hogy a versenyre hívatottak a felszólításról értesüljenek. Tudomásom van róla, hogy több igazgató magánlevélben hívta fel az intézet volt tanítványait a versenyben való részvételre.

Az igazgató urak buzgalmának s a napi sajtó készséges támogatásának köszönhető, hogy a verseny felől az érdekeltek jókor értesülhettek.

A kitűzött határidőig, szeptember 8-ig összesen 67 érettségit tett tanuló jelentkezett.

Ekkor az elnökség megállapította a verseny tételeit s a verseny megtartását szeptember hó 17-re, d. u. 2 órára tűzte ki.

A kitűzött időre a jelentkezők közől Budapesten 48, Kolozsvárott pedig 6 kezdő főiskolai tanuló jelent meg.

A társulat részéről Budapesten a verseny helyén megjelentek: König Gyula és Schmidt Ágoston alelnökök, Balog Mór, Beke Manó, Csillag Vilmos, Fröhlich Izidor, Gruber Nándor, Kürschák József, Nagy Dezső, Tangl Károly, Tötössy Béla, Wagner Alajos, Wittmann Ferencz t. tagok, végre Bartoniek Géza, Rados Gusztáv titkárok, Kopp Lajos és Kövesligethy Radó jegyzők.

Kolozsvárott a verseny ugyanabban az időben Farkas Gyula, Pfeiffer

* Az ülésen időkiméléshől csak rövid kivonata adatott elő.

Péter, Sárkány Lajos és Zachár János tagtárs urak jelenlétében vette kezdetét.

Schmidt alelnök melegen üdvözölte az elnök nevében «az első országos mathematikai verseny bajnokait» s nyugodt, kitartó munkára buzdítván őket, sok sikert kívánt működésöknek.

Miután az ügyvivő titkár a verseny föltételeit kihírdette, a kitűzött tételeket elzáró boríték a versenyzők előtt felbontatott s a tételek kihírdettettek.

A verseny — természetesen zárt helyen — szabályszerűn folyt le, miről a verseny tartama alatt vezetett jegyzőkönyv tanuskodik.

A versenyre kitüzött idő végeig a két helyen együttvéve 29 dolgozat adatott be. Minden dolgozat készítője a felügyelő tagok előtt dolgozatát aláírta s aláírását az átvétellel megbízott két társulati tag a dolgozaton hitelesítette. A verseny végével az összes dolgozatok lepecsételtettek.

A biráló bizottság jelentését a választmány október hó 19-én tartott ülésén tudomásul vette s a dijaknak javaslat szerint való kiadását elrendelte.

A dolgozatok megbirálására kiküldött bizottság jelentése, melyet Rados G. titkár terjesztett elő, következőleg hangzik:

A Mathematikai és Physikai Társulat 1894. évi szeptember hó 17-én tartott tanulóversenyén a következő tételeket tűzte ki megoldásra:

1. Bizonyíttassék be, hogy a $2x+3y$ és $9x+5y$ kifejezések x és y ugyanazon egész számú értékeire oszthatók 17-tel.

2. Adva van egy kör és két pont, P és Q; szerkesztessék meg ebbe a körbe irt derékszögű háromszög, melynek egyik befogója a P ponton, másik befogója a Q ponton megy át. A P és Q pontok milyen fekvése zárja ki a megoldás lehetőségét?

3. Valamely háromszög oldalai oly számtani haladványt alkotnak, melynek különbsége d; a háromszög területe T. Mekkorák e háromszög oldalai és szögei? Ugyane feladat megoldandó, ha $d=1$ és $T=6$.

A versenyen 29 dolgozatot adtak be; ezek közül 21 olyan, a melyben a kitűzött tételek egyike sem volt helyesen megoldva s így tekintetbe nem jöhetett; maradt tehát nyolcz olyan dolgozat, a mely legalább egy tételnek helyes megoldását tartalmazza. Ezek közül ötben a versenyző csakis egy feladatot tudott megoldani és így azok a jutalmazásnál tekintetbe nem vétettek. A végül fönmaradó három dolgozat készítői: Kupferschmidt József, Pap Pál és Seidner Mihály urak.

Pap és Seidner urak mind a három feladat megoldását teljesen kidolgozták és így méltók arra, hogy megjutalmaztassanak. A biráló bizottság a nevezett urak dolgozatainak belértéke között világosan döntő különbséget

nem tudott találni és így a pályadíjak odaitélésénél azt a körülményt is tekintetbe kellett vennie, hogy SEIDNER úr 2 óra 10 percz alatt, PAP úr pedig 3 óra 10 percz alatt készült el dolgozatával. A biráló bizottság ennélfogva egyhangúlag hozott határozata alapján azt ajánlja, hogy SEIDNER MIHÁLY úr az első-, PAP PÁL úr pedig a második Eötvös-díjjal jutalmaztassék.

KUPFERSCHMIDT úr dolgozatában két tétel helyesen lévén kidolgozva, a biráló bizottság KUPFERSCHMIDT JÓZSEF úr megdicsérését ajánlja.

Budapest, 1894 szeptember 25.

Szemethy Béla, *König Gyula,* *Mauritz Rezső.*
Rados Gusztáv, *Éberling József,* *Bartoniek Géza,*

A jelentés meghallgatása után elnök a következőket mondta:

Ezennel kijelentem, hogy az érett tanulók első mathematikai versenyének első díját SEIDNER MIHÁLY, a losonczi állami főgymnasium végzett tanulója, a második díjat pedig PAP PÁL, a sárospataki ev. ref. főgymnasium volt tanulója nyerte el. KUPFERSCHMIDT JÓZSEF, a budapesti V. ker. kir. kath. főgymnasium volt tanulójának a dolgozata dicséretben részesült. Lépjenek elő s vegyék át szép dolgozataik jutalmát.

A verseny győztesei a társulat tagjainak rokonszenves üdvözlése közben az elnök asztala elé lépnek. Ő Nagyméltósága a következő szavakat intézte hozzájuk:

Önök a hallott birálati jelentés szerint a társulat mathematikai versenyén a feladatok helyes megoldásával jelét adták önálló felfogásuknak, mathematikának művelésére való rátermettségöknek s kiemelkedtek pályázó társaik felett.

A kitüzött díjakat a társulat színe előtt ime fogadják nyilvánosan; fogadják egyszersmind a társulat köszönetét törekvésökért azzal a reménységünkkel kapcsolatban, hogy a megkezdett jó uton haladván, tovább fogják fejleszteni tehetségeiket s hazai tudományosságunknak majdan díszére fognak válni. Nehéz út áll még önök előtt, sok munka és sok küzdelem; de csakis az így szerzett győzelem az, melynek igaz értéke van.

Gondolataik ebben a pillanatban bizonyára azoknál időznek, a kikre akkor kellett gondolniok, mikor munkájukhoz a siker reményével hozzáfogtak, mikor kész munkálatukat megítélés czéljából kezökből kiadták. Önök most hálával gondolnak azokra az intézetekre, hol tanulmányaikat

elvégezték s hálás szivvel gondolnak szeretett tanáraikra, kik önöket tanították, kiknek ezen szép sikeröket köszönik. Seidner Mihály, az ön tanára WINTER JÓZSEF úr, öné pedig, Pap Pál, ELLEND JÓZSEF úr volt. Írják meg nekik, hogy mily sikert köszönnek az ő fáradozásuknak; köszönjék meg nekik kitünő tanításukat s írják meg nekik, hogy én a magam, valamint a Mathematikai és Physikai Társulat üdvözletét és köszönetét küldöm nekik.

*

A társulat elnökének átnyújtott felírat szövege a következő:

Nagyméltóságú Miniszter Ur,

Mélyen tisztelt Elnökünk!

A Mathematikai és Physikai Társulatnak alulírott tagjai legmélyebb tisztelettel üdvözlik Nagyméltóságodat a m. kir. vallás- és közoktatásügyi miniszter magas állásában. Minket, kik nagyrészt a tanítás terén vagyunk a magyar kultúrának munkásai, de kivétel nélkül valamennyien lelkesedünk érte: a legigazabb örömmel és legszebb reménységgel tölt el a tudat, hogy hazánk szellemi haladásának legfelsőbb intézése immár Nagyméltóságod kezére van bízva. Nagyméltóságod a tudománynak, a tudományhoz vezető iskolának összes ügyeit az egyedül jogosúlt, t. i. a legmagasabb ideális álláspontból tekinti és életföltételeiket ennek megfelelőleg itéli meg. Ez forrása örömünknek, reménységeinknek.

Nem tagadhatjuk meg magunktól, hogy legmélyebb hálánkat is ki ne fejezzük Nagyméltóságod előtt; hálánkat azért, hogy Nagyméltóságod társulatunkat megalakította, munkásságát folyamatba hozta és haladásának útját s a czélhoz vezető eszközöket hosszú időre helyesnek igérkező módon megjelölte. «Tanúljunk egymástól, hogy mennél jobban taníthassunk!» Ezekkel a szavakkal szólított minket Nagyméltóságod a közös munkára, a munkából mindjárt kezdetben az oroszlánrészét foglalván le magának.

Társulatunk élete még rövid; olyan rövid, hogy történetét elmondani, megírni alig lehet. A kezdet kezdetén vagyunk csak, de tele a jövőbe vetett bizalommal s lelkesedéssel az elénk tüzött czélért.

Egy eredménye, s az eredmény fontossága miatt nagynak mondható eredménye már is van társulati működésünknek: a szaktársak tömörültek és soraink mindjobban tömörülnek; általánossá vált a kívánság, hogy együtt munkálkodjunk s a hit, hogy együtt munkálkodva a Nagyméltóságod kitüzte czélhoz közel jutunk.

Hálánkat azzal kívánjuk leróni, hogy a lelkesedést, melyet Nagyméltóságod a társulatba belevitt, ébren tartjuk, a társulat czéljaihoz hívek maradunk.

Kérve Nagyméltóságodat, hogy társulatunkhoz s hozzánk való nagy jóindulatát, addig míg reája érdemesek vagyunk, tőlünk meg ne vonja, maradunk

Nagyméltóságodnak alázatos szolgái:
(Aláírások).

A felirat fehér pergamen-bőrbe van kötve. A táblán a *Mathematika* képe látható, R. Hirsch Nelly művészi tuss-rajzában. Az initiale-t Rauscher Lajos műegyetemi tanár volt szives elkészíteni; a szöveget antiqua-írásban Nagy Sándor írta meg. Az ívek, 387 tagtárs aláírásával, fasciculusba vannak összefűzve s a véletlentől adott sorrendben következnek egymásután.

*

Ezután következett dr. Klupáthy Jenő t. társ előadása, melyet az előadások rovatában fogunk ismertetni.

A Math. Phys. Társulat I. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Seidner Mihály dolgozata.

Valamely háromszög oldalai oly számtani haladványt alkotnak, melynek különbsége d, a háromszög területe T; mekkorák e háromszög oldalai és szögei? Ugyanezen feladat megoldandó, ha d=1 és T=6.

Megoldás.

A háromszög oldalai: a, $a+d$, $a+2d$; a Δ területe

$$T=\sqrt{s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

hol

$$s=\frac{a+b+c}{2}, \qquad s=\frac{3}{2}(a+d)$$

$$[s-(a+d)]=\frac{a+d}{2}, \qquad [s-(a+2d)]=\frac{a-d}{2}.$$

Alkalmazva tehát

$$T=\sqrt{\frac{3}{2}(a+d)\left(\frac{a+d}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-d}{2}\right)\left(\frac{a+3d}{2}\right)}$$

$$T=\frac{a+d}{4}\sqrt{3\,(a-d)\,(a+3d)}.$$

Vegyük fel, hogy $(a+d)=x$, akkor

$$T=\frac{x}{4}\sqrt{3\,(x-2d)\,(x+2d)}$$

$$4T=x\sqrt{3\,(x^2-4d^2)}$$

$$16T^2=3x^4-12x^2d^2,$$

melyből

---

* A dolgozatok minden változtatás és javítás nélkül vannak lenyomatva. *Szerk.*

$$x = \sqrt{\left(\frac{+12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 192T^2}}{6}\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{6d^2 \pm \sqrt{36d^4 + 48T^2}}{3}\right)} = a + d$$

$$a = -d \pm \sqrt{\left(\frac{6d^2 \pm \sqrt{36d^4 + 48T^2}}{3}\right)},$$

mely egyenletbe d-nek fent adott $d=1$ és $T=6$ értékeket behelyettesítve, lesz

$$a = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{6 \pm \sqrt{36 + 1728}}{3}\right)}$$

$$a = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{6 \pm \sqrt{1764}}{3}\right)}$$

$$a = -1 \pm \sqrt{\frac{6 \pm 42}{3}}$$

$$a = -1 \pm 4$$

$$a = 3;\ a+d=4,\ a+2d=5,$$

az a háromszög tehát derékszögű háromszög, melynek átfogója 5.

A szögekre nézve pedig

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Minthogy azonban derékszögű háromszögről van szó, azért én a

$$\sin a = \frac{a}{c}$$

képletet használhatom

$$\sin a = \frac{3}{5}$$

$$\log \sin a = \log 3 - \log 5$$

$$\log 3 = 0{\cdot}47712$$

$$\log 5 = 0{\cdot}69897$$

$$\log \sin a = \overline{9{\cdot}77815 - 10}$$

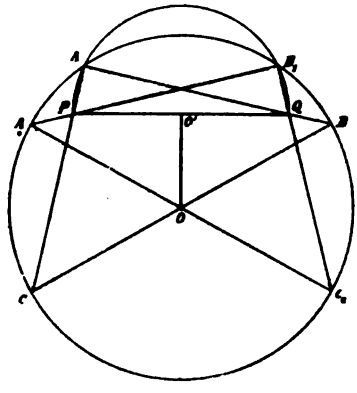
$$a = 36°52'10{\cdot}71''; \quad \beta = 90° - a = 53°7'49{\cdot}29''$$

*

Adva van egy kör és két pont P és Q; szerkesztessék meg ebbe a körbe írt derékszögű háromszög, melynek egyik befogója a P, másik befogója a Q ponton megy át. A P és Q pontok milyen fekvése zárja ki a megoldás lehetőségét.

Megoldás.

A szerkesztés alapja az, hogy a félkör alapon nyugvó kerületi szög derékszög. Ha tehát én a P-t és Q-t összekötő egyenest felezem, s a felezési pontból, mint középpontból a felezett távolsággal, mint sugárral kört rajzolok, akkor ezen kör bármely pontjából kiinduló és a P és Q pontokon átmenő két egyenes derékszöget zár be. A két kör metszési pontjában lesz a keresett háromszög derékszögének csúcspontja, miből önként következik, hogy a feladat csak akkor oldható meg, ha P—Q távolság fele nagyobb, mint a Q—P vonalnak a kör kerületétől való távolsága, s ha a P és Q pontok a körön belül vannak.



Ime: Ilyen háromszög kettő van.

*

Bizonyittassék be, hogy a $2x+3y$ és $9n+5y$ kifejezések x és y ugyanazon egész számú értékeire 17-tel oszthatók.

Megoldás.

Vegyük fel, hogy $2x+3y=n\,.\,17$, hol n valamely positiv egész szám. Ezen egyenletből

$$x=\frac{17\,.\,n-3y}{2}=8n-y+\frac{n-y}{2}.$$

$$\frac{n-y}{2}=s,$$

melyből

$$y=n-2s$$

$$x=8n-n+2s+s=7n+3s,$$

x-nek eme értékeit a másik $(9x+5y)$ kifejezésbe behelyettesítve lesz:

$$9x+5y=62n+27s+5n-10s=68n+17s=17\,(4n+s)$$

miből látjuk, hogy $(9x+5y)$ szintén többszöröse 17-nek, tehát ezzel osztható.

2. Pap Pál dolgozata.

1. Feladat. Bizonyíttassék be, hogy a $2x+3y$ és $9x+5y$ kifejezések x és y ugyanazon egész számú értékeire 17-el oszthatók.

Osszuk a két kifejezést 17-el, legyenek ekkor a hányadosok: q és q', akkor

$$\frac{2x+3y}{17} = q$$

és

$$\frac{9x+5y}{17} = q'.$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 4-el, s az így nyert egyenletet adjuk össze a másodikkal, akkor

$$\frac{8x+12y}{17} = 4q$$

$$+\frac{9x+5y}{17} = q'$$

$$x+y \quad = 4q+q'.$$

Ha x és y bizonyos egész számú értékénél tehát p. a $2x+3y$ kifejezés osztható 17-el, vagyis q egész szám, akkor az utolsó egyenlet szerint a $9x+5y$ kifejezés is osztható 17-el, mert q' is egész szám. Az utolsó egyenletben ugyanis $x+y$ és $4q$ egész számok, következésképp q' is egész szám, mert egész szám csakis egész számmal összeadva ad eredményül egész számot.

2. Feladat. Adva van egy kör és két pont p és q; szerkesztessék meg ebbe a körbe irt derékszögű háromszög, melynek egyik befogója a p ponton, másik befogója a q ponton megy át. A p és q pontok mily fekvése zárja ki a megoldás lehetőségét?

A p és q pontokat* összekötő pq egyenes a körbe rajzolt derékszögű Δ befogóinak ama részeivel, melyek tőle a derékszög felé esnek, egy kisebb derékszögű Δ-et alkot, melynek átlója pq.

Az adott p és q pontokon át úgy szerkesztünk derékszögű háromszöget, hogy a pq egyenes felező pontjából $\frac{pq}{2}$ sugárral kört rajzolunk. E kör geometriai helye lesz oly derékszögű Δ csúcs pontjainak, melyeknek átfogója pq. Minthogy pedig egy adott körbe rajzolt derékszögű Δ kerestetik, a keresett csúcspont az adott körvonal és a rajzolt $\frac{pq}{2}$ sugarú körvonal két

* A rajz az előbbivel lényegében egyező, csak p helyett P és q helyett Q teendő. *Szerk.*

metszéspontja lesz. A csúcspontokból a p és q pontokon keresztül menő s az adott kör kerületéig terjedő egyenesek lesznek a keresett derékszögű háromszögek befogói.

A keresett háromszögek itt: ABC és $A'B'C'$ Δ.

Ha p és q pontok olyan helyzetet foglalnak el, hogy a rajtok keresztül haladó $\frac{pq}{2}$ sugarú kör nem metszi az adott kört, a megoldás lehetetlen. E két kör pedig nem metszi egymást akkor, ha

$$00' > r + \frac{pq}{2} \qquad 1)$$

$$00' > r - \frac{pq}{2}. \qquad 2)$$

$00'$ jelenti az adott kör középpontjának a pq egyenes felező pontjától való távolságát, r az adott kör sugarát.

Ha p és q a kör kerületén belül fekszik, s a megfejtésre nézve kedvező helyzetet foglal el, akkor a két derékszögű Δ befogói tényleg átmennek a két ponton; ha pedig a két pont a kerületen kivül fekszik, akkor a befogók meghosszabbításai. Ha a két pont az adott kör kerületébe esik, végtelen számú megoldás van.

3. Feladat. Valamely Δ oldalai oly számtani haladványt alkotnak, melynek különbsége $=d$. A Δ területe $=t$. Mekkorák e háromszög oldalai és szögei? Ugyanez a feladvány megoldandó, ha $d=1$ és $t=6$.

Legyen a Δ egyik oldala $=b$, akkor $a=b-d$ és $c=b+d$, továbbá

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2},\quad s-a = \frac{b}{2} + d,\quad s-b = \frac{b}{2},\quad s-c = \frac{b}{2} - d,$$

s mivel

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

azért

$$\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b}{2} + d\right)\left(\frac{b}{2} - d\right) = t^2$$

s innen

$$\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right) = t^2$$

és

$$b^4 - 4b^2d^2 = \frac{16t^2}{3}$$

s ebből

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16t^2}{3}}} = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}}\right)}$$

A gyökjelek előtt azért alkalmazunk «+» jelt, mert b-nek tagadó és imaginarius szám nem felelhet meg.

Az utolsó képlet alapján

$$a=b-d=-d+\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4t^2}{3}}\right)}$$

és

$$c=b+d=\quad d+\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4t^2}{3}}\right)}.$$

Az ismeretlen szögeket legczélszerűbben a $t=\frac{bc}{2}\sin\alpha$ és $t=\frac{ac}{2}\sin\beta$ és $\gamma+180°-\alpha-\beta$ képletek alapján határozhatjuk meg, a honnan

$$\sin\beta=\frac{2t}{ac},\qquad \sin\alpha=\frac{2t}{bc}.$$

Ha $d=1$ és $t=6$, akkor

$$b=\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4t^2}{3}}\right)}=\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+\frac{4.36}{3}}\right)}=$$

$$=\sqrt{2(1+\sqrt{49})}=4$$

$a=b-d=3$, $c=b+d=5$. Tehát $a=3$, $b=4$, $c=5$.

A szögekre nézve:

$$\sin\alpha=\frac{2t}{bc}=\frac{2.6}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\log 3=0{\cdot}477121$$
$$-\log 5=0{\cdot}698970$$
$$\log\sin\alpha=9{\cdot}778151-10$$

$$\begin{array}{r}14\\ \hline 32:2{\cdot}81=\end{array}$$

$$\alpha=36°52'12''$$

$$\sin\beta=\frac{2t}{ac}=\frac{4}{5}$$

$$\log 4=0{\cdot}602060$$
$$\log 5=0{\cdot}698970$$
$$\log\sin\beta=9{\cdot}903090-10$$

$$\begin{array}{r}19\\ \hline 76:1{\cdot}58=48\end{array}$$

$$\beta=53°7'48''$$

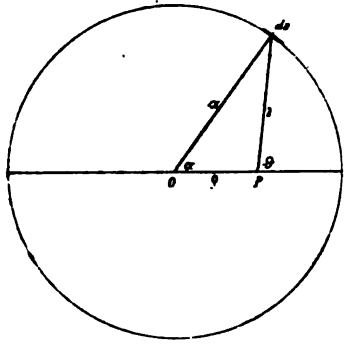
Mivel pedig $\alpha+\beta=90°$, azért $\gamma=180°-(\alpha+\beta)=90°$.

MEGOLDOTT FELADATOK.

19. *Valamely egyenletes vonalas körgyűrű elemei a gyűrű vonalán kívül levő pontokra csak a távolságtól függő centralis erőkkel hatnak. Milyennek kell az erők törvényének lennie, hogy a gyűrű középpontjába helyezett, a gyűrű síkjában szabadon mozogható pont az erők behatása alatt stabilis egyensúlyban legyen?* (Fröhlich.)

Megoldás Vladár Lajos tanárjelölt úrtól.*

1. Legyen a P pont helyzete ρ, φ polárcoordináták által megadva. Az egész gyűrű U erőfüggvénye, mely e pont coordinátainak függvénye, az adott viszonyok közt csak ρ-tól függ, minthogy ugyanazon ρ távolságban körül vive P pontot a centrum körül, a viszonyok bármely φ-nál változatlanul maradnak. Ha egyszerűség kedveért P coordinátai ρ, 0-nak választatnak, ha továbbá a gyorsulás meghatározandó törvénye $f(r)$, a kör sugara a, akkor az r távolságban levő μ lincár sűrűséggel biró ds ívelem részéről P-re kifejtett erő ρ-menti összetevője



$$\mu ds f(r)\cos\vartheta = -\mu a da \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial \rho} \quad 1)$$

hol a $V(r) = \int f(r)\,dr$ a gyorsulás potentiálja, továbbá:

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\alpha\,; \quad \partial\rho = -\partial r\cos\vartheta.$$

A ρ-ra merőleges erőcomponensek az OP-re nézve symmetrikusan fekvő ds elempárokra vonatkozólag ellentetten egyenlők lévén, összegük zérus s az eredőre nem folyhatnak be.

E szerint az egész kör részéről gyakorolt erő

---

* Augusztus hóban Bián, szülőhelyén meghalt. *F.*

$$\frac{dU}{d\rho} = F = -2a\mu \int_0^{\pi} \frac{dV(r)}{dr} \frac{\rho - a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\alpha}}\, d\alpha. \qquad 2)$$

P pont a kör centrumába helyezve stabilis vagy labilis egyensúlyba jut, a mint az erőfüggvény e helyen maximum vagy minimum. E szerint kell, hogy $\overset{\text{stabilis}}{\text{labilis}}$ egyensúly esetén álljon $(F)_{\rho=0} = 0$ közös feltétel mellett,

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} = \left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\rho=0} \lesseqgtr 0. \qquad 3)$$

2. Közvetlenül látható, hogy $(P)_{\rho=0} = 0$ feltétel a 2) értelmében mindig teljesül.

Más oldalról a 3) feltétel, ha 2)-vel a 3)-ban jelzett műveleteket végrehajtjuk, írható

$$\left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\rho=0} = a\mu\pi\left\{\frac{d^2V(a)}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dV(a)}{da}\right\} \lesseqgtr 0. \qquad 4)$$

A

$$\frac{d^2V(a)}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dV(a)}{da} = \frac{df(a)}{da} + \frac{1}{a}f(a) = 0$$

megoldása

$$f(a) = \frac{k}{a},$$

épen indifferens egyensúlyra vezet, mert ekkor, — mint erről könnyű számítás győz meg, — F összes magasabb differentiálhányadosai $\rho = 0$-ra eltűnnek.

Továbbiakra az

$$f(a) = \frac{k}{a}$$

megoldásban k az a függvényeképen úgy határozandó meg, hogy

$$\frac{d}{da}\left(\frac{k(a)}{a}\right) + \frac{1}{a}\frac{k(a)}{a} = \frac{1}{a}\frac{dk(a)}{da} \lesseqgtr 0$$

legyen $\overset{\text{stabilis}}{\text{labilis}}$ egyensúlyi állapotnak megfelelőleg.

2a. Ha pl. a távolság hatványával arányos erők vizsgálatára szorítkozunk, a midőn tehát

$$f(a) = \pm c^2 a^n, \text{ s így } k(a) = \pm c^2 a^{n+1},$$

a fentebbi feltételeknek megfelelőleg

$$\frac{1}{a}\frac{dk(a)}{da} = \pm (n+1)c^2 a^{n-1} \lesseqgtr 0.$$

Azaz, taszító erő esetén $\overset{\text{stabilis}}{\text{labilis}}$ az egyensúly, a mint $n \lesseqgtr -1$, vonzó erő esetén megfordítva, a mint $n \gtreqless -1$. Innen látható, hogy az

$$f(a) = -\frac{c^2}{a^2}$$

Newton-féle erőtörvény labilis egyensúlyi állapotot létesít.

Ha pl. a körvonal vezető s elektromos töltést nyer, a levezetett megoldás szerint a P pontot a centrumból kimozdítván, oda visszatér vagy nem, a mint a P pont a vezető kör töltésével egyenlő vagy ellentett nemű elektromosságú.

2*b*. Ha a kör kerületéből induló kifeszített rugalmas fonalak tartják a pontot egyensúlyban, ez esetben, minthogy a fonál részéről gyakorolt rugalmas erő a pont kitérésével (x) arányos s ennek irányával ellenkező,

$$f(r) = -C^2(r - r_0);$$

hol r_0 a fonál hoszsza normális (ki nem feszített) állapotban

$$\frac{df(a)}{da} = -C^2;$$

továbbá

$$\frac{f(a)}{a} = -C^2\frac{a - r_0}{a} = -C^2 + C^2\frac{r_0}{a}.$$

Az egyensúly tehát *stabilis*, mert mindig

$$\frac{df(a)}{da} + \frac{f(a)}{a} = -2C^2 + C^2\frac{r_0}{a} < 0.$$

hol kifeszített fonalaknál $r_0 : a$ hányados mindig kisebb az egységnél. Ez az eredmény a tapasztalással szintén megegyezik.

*

20. *Bizonyittassék be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2$$

mindig osztható 2-vel, $(a+1)$*-gyel és* $2(2a-1)$*-gyel.* (Szily).

*

Első megoldás Privorszky Alajos műegyetemi hallgató úrtól.

A feladatban adott binomiális együtthatók négyzetösszege, ismét binomiális együttható. Kiindulunk az

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^{l}\binom{m}{k}\binom{n}{l-k} = \binom{m}{0}\binom{n}{l} + \binom{m}{1}\binom{l}{l-1} + \cdots + \binom{m}{l}\binom{n}{0}$$

ismeretes egyenlőségből; ha felteszszük, hogy

$$m=n=l=a$$

és tekintetbe veszszük, hogy

$$\binom{a}{k}=\binom{a}{a-k}$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, a)$$

a következő eredményhez jutunk:

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2=\binom{2a}{a}.$$

Az eredeti feladat ezzel vissza van vezetve annak a kimutatására, hogy a $\binom{2a}{a}$ binomiális együttható a fent felsorolt számelméleti tulajdonságokkal bír.

1. A $\binom{2a}{a}$ *együttható páros*, mert

$$\binom{2a}{a}=\frac{2a\,(2a-1)\ldots(a+1)}{1.2\ldots a}=\frac{2a}{a}\binom{2a-1}{a-1}=2\binom{2a-1}{a-1}$$

és $\binom{2a-1}{a-1}$ egész szám.

2. A $\binom{2a}{a}$ *binomiális együttható osztható* $(a+1)$*-gyel*, mert

$$\binom{2a}{a}=\frac{2a\,(2a-1)\ldots(a+2)}{1.2.3\ldots(a-1)}\cdot\frac{a+1}{a}=\frac{a+1}{a}\binom{2a}{a-1},$$

továbbá $\binom{2a}{a}$ egész szám, $a+1$ és a relatív prímszámok és így ennek következtében

$$\frac{1}{a}\binom{2a}{a-1}=p$$

szintén egész szám; de akkor

$$\binom{2a}{a}=p\,(a+1),$$

tehát $\binom{2a}{a}$ $(a-1)$-gyel osztható.

3. A $\binom{2a}{a}$ *binomiális együttható osztható* $2\,(2a-1)$*-gyel.* Ugyanis

$$\binom{2a}{a} = \frac{2a(2a-1)}{a.(a-1)} \cdot \frac{(2a-2)\ldots(a+1)}{1.2\ldots(a-2)} =$$

$$= \frac{2(2a-1)}{a} \cdot \frac{(2a-2)\ldots(a+1)\,a}{1.2\ldots(a-2)(a-1)} = \frac{2(2a-1)}{a}\binom{2a-2}{a-1};$$

de hogy

$$\frac{1}{a}\binom{2a-2}{a-1} = q$$

egész szám, ez a 2. tulajdonság következménye; ekkor pedig

$$\binom{2a}{a} = 2(2a-1)\,q$$

egyenlőségből következik, hogy $\binom{2a}{a}$ $2(2a-1)$-gyel is osztható.

*

Hasonló megoldást küldöttek be dr. HORVÁTH JÓZSEF főiskolai tanár úr Pápán, MAKSAY ZSIGMOND főreáliskolai tanár úr Pécsett és CSILLAG VILMOS főreáliskolai h. tanár úr *Szerk.*

*

Második megoldás Bauer Mihály műegyetemi hallgató úrtól.

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2 \equiv 0 \pmod{a+1},$$

ki fogjuk mutatni, hogy ekkor egyszersmind

$$\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a+1}{a}^2 \equiv 0 \pmod{a+2}.$$

Ugyanis

$$\binom{2a+2}{a+1} = \binom{2a+2}{a}\frac{a+2}{a+1}$$

és

$$\binom{2a+2}{a} = \frac{(2a+2)(2a+1)}{(a+2)(a+1)}\binom{2a}{a} = \frac{2(2a+1)}{a+2}\binom{2a}{a};$$

de

$$\binom{2a}{a} = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2 \equiv 0 \pmod{a+1}.*$$

---

* SZILY «A binomiális együtth. stb.» Math. és Phis. Lapok II. 297. l.

Minthogy továbbá $a+2$ relativ prim $a+1$-hez képest és a $\binom{2a+2}{a}$ binomiális együttható egész szám, kell hogy

$$\binom{2a+2}{a} \equiv 0 \pmod{a+1}$$

legyen és így

$$\binom{2a+2}{a+1} = \sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k}^2 = \binom{2a+2}{a} \frac{a+2}{a+1} \equiv 0 \pmod{a+2}.$$

De ezzel ki van mutatva, hogy a tetszőleges értékeinél a kérdésben forgó összeg osztható $(a+1)$-gyel, mert az $a=1$ esetben

$$\binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2 = 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Hasonlóképen járhatunk el a második tétel bebizonyításában. Ugyanis

$$\binom{2a+2}{a+1} = \frac{(2a+2)(2a+1)}{a+1} \cdot \frac{2a(2a-1)\ldots(a+1)}{1.2.3\ldots a} \cdot \frac{1}{a+1} =$$

$$= \frac{2(2a+1)}{a+1} \binom{2a}{a};$$

de mivel

$$\binom{2a}{a} \equiv 0 \pmod{a+1},$$

$$\binom{2a+2}{a+1} \equiv 0 \pmod{2(2a+1)}.$$

Hozzuk be a következő jelölést

$$a+1=a',$$

akkor

$$\binom{2a'}{a'} = \sum_{k=0}^{a'} \binom{a'}{k}^2 \equiv 0 \pmod{2(2a'-1)}$$

és a' felvehet minden egész értéket, mert az $a'=1$ esetre

$$\binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2 = 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

E tételekkel kapcsolatban legyen szabad még a következő tételt bemutatnom :

Ha

$$a+1=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$$

az $a+1$ szám törssténye zős alakja, *akkor* a

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n}=\binom{a}{0}^{2n}+\binom{a}{1}^{2n}+\cdots+\binom{a}{a}^{2n}$$

összeg az n minden egész értékénél osztható, a

$$p_1 p_2 \cdots p_m$$

szorzattal.

A kimutatást lépésenként fogom eszközölni.

I. *Legyen* $a+1=p$ *törzsszám, akkor*

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n}\equiv 0 \pmod{p}.$$

Ugyanis az

$$a-k\equiv -(k+1) \pmod{a+1}$$

azonos kongruenczia mindkét oldalán szorozván az

$$a(a-1)\ldots(a-k+1)$$

szorzattal, lesz

$$\binom{a}{k+1}(k+1)!\equiv -\binom{a}{k}(k+1)! \pmod{a+1}.$$

E kongruenczia minden esetre érvényes, ha

$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

de k ugyanezen értékei mellett $(k+1)!$ az $a+1$ törzsszámhoz képest relatív primszám lévén, $(k+1)!$-sel rövidíthetünk és így lesz

$$\binom{a}{k+1}\equiv -\binom{a}{k} \pmod{a+1};$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

ebből pedig

$$\binom{a}{k+1}^{2n}\equiv \binom{a}{k}^{2n} \pmod{a+1},$$
$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

vagyis

$$\binom{a}{a}^{2n}\equiv\binom{a}{a-1}^{2n}\equiv\cdots\equiv\binom{a}{0}^{2n}\equiv 1 \pmod{a+1}$$

és így ennek következtében

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n}\equiv a+1\equiv 0 \pmod{a+1},$$

de ezt akartuk mindenekelőtt kimutatni.

II. *Ha* $a+1=p$ *törzsszám, akkor:*

$$\sum_{k=0}^{m(a+1)-1}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}=\sum_{k=0}^{mp-1}\binom{mp-1}{k}^{2n}\equiv 0 \pmod{p}$$

ha n, m tetszőleges pozitiv egész számok.

A szóban levő összeget részletösszegekre bonthatjuk fel:

$$\sum_{k=0}^{m(a+1)-1}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\equiv\sum_{k=0}^{a}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}+$$

$$+\sum_{k=a+1}^{2a+1}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}+\cdots+\sum_{k=(m-1)(a+1)}^{m(a+1)-1}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}$$

Először is kimutatom azt, hogy

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\equiv 0 \pmod{a+1}.$$

E végből bebizonyítom, hogy

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n}\equiv\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\pmod{a+1}.$$
$$(k+1=1,2,\ldots,a)$$

Ugyanis

$$m(a+1)-1-k\equiv-(k+1) \pmod{a+1},$$

szorozván mindkét oldalon az

$$(m(a+1)-1)(m(a+1)-2)\ldots(m(a+1)-k)$$

szorzattal, lesz

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}(k+1)!\equiv-\binom{m(a+1)-1}{k}(k+1)! \pmod{a+1}.$$

E kongruenczia minden esetre érvényes, ha

$$(k+1=1, 2, \ldots, a)$$

de ugyanekkor rövidíthetünk $(k+1)!$-sal és ezt megtéve, lesz

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}\equiv-\binom{m(a+1)-1}{k}\pmod{a+1},$$
$$(k+1=1,2,\ldots,a)$$

ebből

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n}\equiv\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\pmod{a+1}$$
$$(k+1=1,2,\ldots,a)$$

$$\binom{m(a+1)-1}{a}^{2n}\equiv\binom{m(a+1)-1}{a-1}^{2n}\equiv\cdots\equiv\binom{m(a+1)-1}{0}^{2n}\equiv$$
$$\equiv 1 \pmod{a+1},$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\equiv 0 \pmod{a+1}.$$

A második részletösszegre nézve szintén ki fogjuk mutatni, hogy

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n}\equiv \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\pmod{a+1}.$$
$$(k+1=a+1,\ a+2,\ \ldots,\ 2a+1)$$

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy $\binom{m(a+1)-1}{k+1}$ az

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}=\frac{[m(a+1)-1]\ldots[(m-1)(a+1)+1]}{1\ldots a}$$

$$(m-1)\,\frac{[(m-1)(a+1)-1]\ldots[m(a+1)-k-1]}{(a+2)\ldots(k+1)}$$

alakban írható. Ha ismét a

$$m(a+1)-1-k\equiv -(k+1)\pmod{a+1}$$

kongruenczia mindkét oldalán szorzunk az

$$[m(a+1)-1]\ldots[(m-1)(a+1)+1]\,(m-1)\,[(m-1)(a+1)-1]\ldots$$
$$[m(a+1)-k]$$

szorzattal, lesz:

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}a!\,(a+2)\ldots(k+1)\equiv -$$

$$-\binom{m(a+1)-1}{k}a!\,(a+2)\ldots(k+1)\pmod{a+1}.$$

E kongruenczia mindenesetre érvényes a

$$(k+1=a+1,\ a+2,\ \ldots,\ 2a+1)$$

értékekre. Ekkor rövidíthetünk is az $a!\,(a+2)\ldots(k+1)$ kifejezéssel és lesz

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}\equiv -\binom{m(a+1)-1}{k}\pmod{a+1}$$
$$(k+1=a+1,\ a+2,\ \ldots,\ 2a+1)$$

és ebből

$$\binom{m(a+1)-1}{k+1}^{2n}\equiv \binom{m(a+1)-1}{k}^{2n}\pmod{a+1}$$
$$(k+1=a+1,\ a+2,\ \ldots,\ 2a+1)$$

vagyis

$$\binom{m(a+1)-1}{2a+1}^{2n}\equiv\binom{m(a+1)-1}{2a}^{2n}\equiv\cdots\equiv\binom{m(a+1)-1}{a+1}^{2n}\pmod{a+1}$$

és így

$$\sum_{k=a}^{2a+1}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \equiv (a+1)\binom{m(a+1)-1}{a+1}^{2n} \equiv 0 \pmod{(a+1)}$$

A bebizonyítás ugyanígy vihető tovább. A dolog veleje mindig csak az, hogy az

$$\frac{m(a+1)-1-a}{a+1}\cdot\frac{m(a+1)-1-2(a+1)}{2(a+1)}\cdots$$

törtalakok szorzata egész szám.

És így bebizonyítottnak tekinthetjük a

$$\sum_{k=0}^{m(a+1)-1}\binom{m(a+1)-1}{k}^{2n} \equiv \sum_{k=0}^{mp-1}\binom{mp-1}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{p}$$

relációt is, a melyben m akármilyen pozitív egész számot jetenthet.

III. Az I. és II. alatt foglaltak már kiadják tételünket. Ha ugyanis

$$a+1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}=p_1m_1=p_2m_2=\ldots=p_rm_r$$

akkor a II. alatti tétel következtében

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n} \equiv \sum_{k=0}^{m_ip_i-1}\binom{m_ip_i-1}{k} \equiv 0 \pmod{p_i}\,;$$
$$(i=1,2,\ldots,m)$$

de mivel $p_1, p_2, \ldots, p_r$ mint $(a+1)$-nek prímtényezői egymáshoz képest relativ törzsszámok, kell hogy

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^{2n} \equiv 0 \pmod{p_1\,p_2\ldots p_m}$$

legyen de ezzel a bevezetésben felemlített tétel teljesen be van bizonyítva.

*

Harmadik megoldás dr. Surák József főgimnáziumi tanár úrtól Budapesten.

Ismeretes, hogy

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}^2 = \binom{2a}{a} = \frac{(2a)!}{a!\,a!}.$$

Ha a 2-nek n-dik hatványával még osztható, akkor $a!$ 2-nek

$$s=E\left(\frac{a}{2}\right)+E\left(\frac{a}{2^2}\right)+\cdots+E\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

kitevőjű, $(2a)!$ pedig 2-nek

$$s_1=E\left(\frac{2a}{2}\right)+E\left(\frac{2a}{2^2}\right)+\cdots+E\left(\frac{2a}{2^{n+1}}\right)$$

kitevőjű hatványával osztható, s mivel

$$s_1>2s,$$

azért $\binom{2a}{a}$ osztható kettővel.

Catalan tétele szerint

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!}$$

egész szám; ha

$$b=a-1,$$

akkor

$$\frac{(2a)!\,(2a-2)!}{a!\,(2a-1)!\,(a-1)!}=\frac{(2a)!}{a!\,(a-1)!\,(2a-1)}$$

szintén egész szám; de minthogy a és $2a-1$ viszonylagos törzsszámok, *azért*

$$\frac{(2a)!}{(a!)^2\,(2a-1)}$$

szintén egész szám, még pedig a föntebb kimutatott tételnél fogva páros szám.

Az ismeretes

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!}=\binom{2a}{a}\binom{2b}{b}+2\sum_{k=1}^{b}(-1)^k\binom{2a}{a-k}\binom{2b}{b-k}$$

képletnél s az először kimutatott tételnél fogva:

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{2.a!\,(a+b)!\,b!}$$

egész szám, tehát ($b=1$ esetben)

$$\frac{(2a)!}{(a!)^2\,(a+1)}$$

is az.

*

Hasonló megoldást beküldött dr. Szabó Péter úr Kolozsvárról. *Szerk.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

A villámhárítókról.*

Franklin óta az utolsó évtizedig az épületek megvédésére szolgáló villámhárító elrendezésekben alig történt haladás. Mindenütt a Franklin ajánlotta átalánosan ismert elrendezést használják, noha a tapasztalás azt mutatta, hogy az nem minden esetben véd meg biztosan.

Franklin villámhárítójának alapeszméje ismeretes. Az épületek szerinte oly módon védhetők meg, hogy közvetetlen közelében, vagy még helyesebben az épület tetejére csúcsos vezető rudakat szerelünk és ezeket a rudakat fémes vezetékkel a földhöz kötjük. Az elektromos kisülés, ha a vezeték jó karban van és vezetőssége elég nagy, *minden körülmény* között a függőlegesen szerelt csúcsos rúd közvetítésével történik; az épület az elektromos kisülésnek, vagyis a villámnak káros hatásától ment marad.

Ez volt az uralkodó nézet a nyolczvanas évek végéig; s ha a tapasztalás megmutatta, hogy egyik-másik esetben Franklin villámhárítója nem vált be, akkor azt nem az elv, hanem az elrendezés, rendszerint a földvezetés fogyatékosságának tulajdonították.

Ennek következtében a villámhárítókat egész évszázadon át a régi minta szerint szerkesztették és szerkesztik világszerte még ma is, anélkül, hogy az időközben végzett elméleti és kisérleti kutatások eredményeit e téren alkalmazásban látnók. Elméleti és kisérleti tanulmányok megmutatták, hogy az elektromos kisülésnek a villámláskor nyilvánuló tüneményeit meghatározó tényezőkről vallott régibb nézetek helytelenek, s hogy a Franklin-féle minta szerint készített villámhárítók sok esetben nem is válhatnak be.

Tárgyalni kívánom a villámhárítókra vonatkozó régi s helytelen nézeteket, s ez után az idevonatkozó elméleti és kisérleti kutatásokból kiindulva bemutatom a *helyes* és a régieknél *olcsóbb* új villámhárító-szerkezeteket.

---

* Előadatott a Math. és Physikai Társulat 1894. évi márczius hó 15-én tartott ülésén. L. A Mérnök- és Építész Egylet Közlönyé-ben 1894. évf. 3—4. füz.

A régi elmélet szerint azt hitték, hogy a villámhárító annál tökéletesebb, minél csekélyebb a villámhárító rúdjának és földhöz szolgáló vezetékének elektromos ellenállása; tehát minél jobb vezetőségű fémből és minél nagyobb keresztmetszetű rudakból készítik, annál jobb. A földvezetést *elsőrendű* tényezőnek tekintették és a villámhárító vezetékeknek lehetőleg a talajvízszinig való kiterjesztését szükségesnek tartották.

Az ilyen villámhárító elrendezések kellő állapotáról és az összeköttetések jóságáról galvántelepektől szolgáltatott gyönge áramokkal s galvanométerekkel avagy egyszerű ellenállásmérésekkel győződtek meg. A régi nézetek szerint az ilyen vizsgálatok alapján helyesnek talált villámhárító elrendezés minden esetben teljes biztossággal védi meg az épületet villámcsapásoktól s a villámhárító vezetékek közelében lévő tárgyak, személyek biztosságában vannak, ha a villám a hárító vezetékbe csap.

A tapasztalás azonban számtalan esetben azt mutatta, hogy teljesen ép, költséges villámhárító vezetékek sem feleltek meg s a védett épületekben kár történt.

Ennek okát — a fönt részletezett nézet okozta elfogultságban — a nehezen ellenőrizhető és folyton változó jóságú földvezetés hiányaiban keresték.

A rendelkezésre álló statisztikai adatok összevetéséből és a balesetek leírásából azonban kiviláglik, hogy a hiányos védő hatást sem a földvezetés hiányai, sem a vezeték ellenállása nem okozhatták.

Az elektromos kisülés akárhányszor nem a legcsekélyebb ellenállású úton történik; a villám, vastag kőfalat áttörve a vezeték vastag rézrúdjából az épületben lévő fémtárgyakba csap s ezekről az épületben lévő csővezetékre ugorván, a földbe jut; hasonlóan megesik, hogy a villám valamely védett kémény belsejében a falazatot szétroncsolva tör a földbe s mellőzi a hárító vezetéket.

Mind a két esetben a villám tényleges utjának elektromos ellenállása, még abban az esetben is, ha a hárító vezetékben hibák volnának, sok milliószor nagyobb a hárító vezeték ellenállásánál.

Az is megtörténik, hogy a hosszú időig bevált villámhárító vezetékeknek hiányossá lesz a védő hatásuk, ha az épületben lévő fémtárgyak csoportosulása változik s ismét megfelelő, ha a fémtárgyak régi helyükre kerülnek.

A villámhárító vezetékhez közel, az épület belsejében a falhoz támasztott puska, új csővezeték stb. a tapasztalás szerint okot szolgáltathat arra, hogy a villámhárító vezeték védő hatása megszünjön.

Sokszoros tapasztalat mutatja tehát, hogy a villámhárító vezetékek védő hatása, illetőleg a hárító elrendezés jósága nem csak a vezetékek ellenállásától, illetőleg a keresztmetszet nagyságától és a fém vezetőségétől, de más tényezóktől is függ.

Az e kérdésre vonatkozó viták mindaddig — a míg szigorú kisérleti alapon nem álltak — nem vezethettek eredményre. E viták közül a FARADAY és SNOW HARRIS WILLIAM között folyt élénk harczot kell kiemelnünk.

FARADAY azt állította, hogy a villámhárító jósága csakis a vezetékek vezetősségétől függ, míg SNOW HARRIS a mellett kardoskodott, hogy az elektromos kisülés útját meghatározó tényezők között a vezeték keresztmetszetének alakja és a vezetékek elrendezésének módja is szerepel.

A vita eredménytelen volt, mert a két hirneves természettudós egyike sem tudta nézeteit helytállóan megokolni.

A később szerzett kisérleti tapasztalások SNOW HARRIS nézeteinek helyességét igazolták. E kisérleti tapasztalások arra tanítanak bennünket, hogy az *állandó áramok* útját, eloszlás módját jellemző tapasztalati törvények (pl. az Ohm-féle törvény) rövid tartamú, változó erősségű áramokra, pl. a *villámcsapás* névvel jelzett elektromos kisülésekre nem alkalmazhatók.

Az ily kisülések útját első sorban a vezetékek elektrostatikai foganóssága (kapaczitás), továbbá elektromágneses tehetétlensége (önindukcziója) s csekélyebb mértékben elektromos ellenállása befolyásolja.

Az első helyen említett két tényező jelentőségét a mechanikából származó analógia segítségével magyarázhatjuk meg, ha az elektromos vezetékeket csővezetékeknek képzeljük, melyekben összenyomhatatlan folyadék mozog.

Képzeljünk pl. száraival függőlegesen álló két végén nyitott *U* alakú üvegcsövet. A cső végkeresztmetszeteiben uralkodó nyomáskülönbségek következtében e csövön másodperczenkint határozott mennyiségű folyadék haladhat keresztül.

E mennyiség a nyomás különbségétől, a cső keresztmetszetétől, a folyadékoszlop mozgásakor érvényesülő molekularis ellenállásoktól függ. Ezt a függést oly képlet fejezi ki, mely az elektromótoros erő, áramerősség és elektromos ellenállás közötti viszonyt ábrázoló OHM-féle tapasztalati törvényhez hasonló.

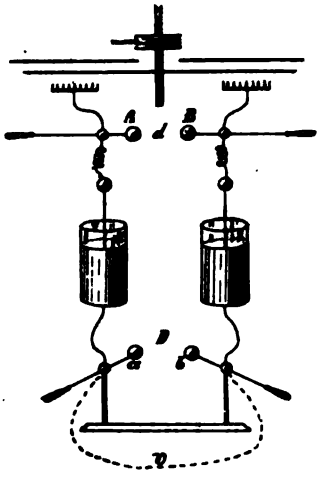
Az ez alkalommal észlelhető tüneményektől elütő tüneményeket láthatunk azonban akkor, ha ugyan-e csőben nyugvó folyadékoszlopot felszinére mért erős ütéssel akarjuk mozgásba hozni. A folyadékoszlop tehetetlenségénél fogva nem enged az ütésnek s megeshetik — ha elég erős ütést mérünk a folyadék felszinére, hogy az üvegcső falai megrepednek és a folyadék kiömlik. Ez eset akkor áll be legkönnyebben, ha a cső falai merevek; de elmarad esetleg akkor, ha a cső falai rugalmasak és az ütés okozta nyomást és lökést szakadás nélkül kiállják.

A csőfal rugalmassága az elektromos vezetékek kapaczitását, a folyadékoszlop tehetetlenségből származó tünemények pedig a változó erősségű elektromos áramokkal észlelhető önindukczió jelenségeket jellemzik.

Valamely elektromos vezeték tehát, legyen bár keresztmetszete csekély, az elektromos kisülésnek biztos útat nyit, ha kapaczitása elég nagy s önindukcziója csekély; másrészt megeshetik az, hogy az elektromos átmeneti áram elhagyja az előzőnél sokkal nagyobb keresztmetszetű vezetéket, ha ez utóbbinak kapaczitása csekély s önindukcziója nagy.

A villámhárítók kérdésének ez alapon való kisérleti vizsgálását először Guillemin és Hughes kisérlették meg igen tanulságos eredménynyel.* Ujabb időben, a nyolczvanas évek végével Oliver Lodge nagybecsű kisérleteivel hatalmasat lendített a villámhárítók kérdésének végleges megfejtésén.**

Mindenekelőtt Lodge kisérleteit akarom behatóbban tárgyalni.



1. ábra.

Az első kisérlet annak egyszerű kimutatására való, hogy az igen rövid idő alatt végbemenő statikai kisülések útját meghatározó tényezők között az elektromos ellenállásnak alsórendű szerepe van.

Ennek kimutatására az 1. ábrán előtüntetett elrendezés szolgálhat. Valamely elektromos megosztó gép két $A - B$ kisütő rúdját kössük vezetően össze két leydeni palaczk belső felületével. A száraz faállványon álló palaczkok külső felületei pedig két ab kisütő rúddal állnak vezető összeköttetésben.

Az AB gömbök d távolsága és az ab gömbök D távolsága változtatható, és pontosan meghatározható. Ha A és B között kisülések történnek, ezekkel egyidőben az ab gömbök között is szikrák csapnak át: az ab között létesülő kisülések az AB között történő kisülések közvetetlen következményei és a D szikrahosszúsága bizonyos körülmények között a d szikratávolságnak közel kétszerese lehet.

A két távolság viszonya a d távolság abszolut értékétől, az alkalmazott leydeni palaczkoknak s az egész rendszernek kapaczitásától s önindukcziójától függ.

Az állandó erősségű áramokra vonatkozó kisérleti tapasztalataink alapján már most azt következtethetnők, hogy a és b között a szikrák meg-

* Hughes: Annales Télégraphiques 1865. Guillemin: Comptes Rendus 1866, p. 1083.

** Oliver Lodge: Lightning conductors and lightning guards, London 1892.

szünnek, ha az *ab* rúdakhoz, tehát a *d* szikratávolsággal párvonalosan, vezetőt, pl. vastag rézdrótot kapcsolunk.

Evvel szemben azt tapasztaljuk, hogy ámbár *a* és *b* között vezető összeköttetést létesítettünk, *a* és *b* között szikrák csapnak át, ha a *D* távolság bizonyos a *d* távolságtól és az összekötő drót méreteitől, alakjától stb. függő értékénél kisebb.

Azt tapasztaljuk tehát, hogy *a* és *b* között a *D* levegőrétegen át halad az elektromos kisülés, jóllehet ez útnak ellenállása sok milliószor nagyobb az *a* és *b*-t összekötő rézdrót ellenállásánál.

Állítsuk be már most *D* távolságot úgy, hogy az *A* és *B* között átcsapó szikráknak megfelelő *a* és *b* között végbemenő kisülések majd a levegőn, majd a rézdróton haladjanak át; nevezzük e kritikus távolságot Δ-nak.

Egy kisérletben pl. *V* 150 cm. hosszú, 1 cm. átmérőjű sárgaréz volt; ez esetben Δ kb. 19 mm.

Ha már most az előbb említett sárgarézrudat ugyanoly hosszúságú s átmérőjű 0·5 mm. falvastagságú sárgarézcsővel helyettesítem, a kritikus távolság kisebb; tehát a sárgarézcső, noha ohmikus ellenállása sok százszorta kisebb a tömör sárgarézrudénál, szemlátomást jobban vezeti a kisüléseket.

Ha végre a *V* csövet pl. 10 méter hosszú, 3 mm. átmérőjű rézdróttal helyettesítjük, a Δ kritikus távolság attól függ, mily alakba hajlítjuk a drótot.

Azt találjuk, hogy Δ a legkisebb, ha a rézdrótot zeg-zúgban ide-oda hajlítjuk vagy a drótot felező pontjában meghajlítva, a két félt szorosan egymás mellé fektetjük, de úgy, hogy egymást ne érintsék, a végeket pedig *a*-hoz, illetőleg *b*-hez kötjük s legnagyobb értékét éri el Δ, ha a drótot spirálisba csavarjuk.

Azt találjuk továbbá, hogy Δ távolság tetemesen kisebbedik, tehát az *a*-t és *b*-t összekötő *V* rézdrót jobban s jobban vezeti a kisüléseket, ha lapos szalaggá kalapáljuk, vagy a rézdrótot ugyanakkora keresztmetszetű rézszalaggal helyettesítjük.

Ezekből következik, hogy az ilyen rohamos lefolyású áramok, statikai kisüléseit első sorban a vezetők alakja, illetőleg a vezetők elektromágneses tehetetlensége (önindukciója) szabja meg; a vezető annál jobban vezeti a kisülést, minél kisebb az önindukciója.

Ha az előbb említett rézdrótot vékonyabb, ugyanolyan hosszúságú rézdrót helyettesíti, Δ kisebb mint az előző esetben; azaz a vékonyabb drót jobban vezeti a kisülést a vastagabbnál. Még kisebbé lesz Δ, ha a vezető összeköttetést igen vékony vasdrót alkotja. A vékony vasdrót tehát jóllehet ellenállása több százszor nagyobb az első helyen említett rézdrót ellenállásánál, emennél jobban vezeti az elektromos kisülést.

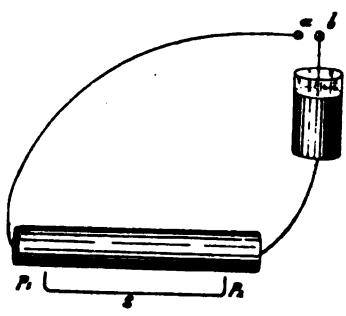
Ha végre igen nagy, több ezer Ohm-nyi ellenállású, de csekély öninduk-

cziójú vezetővel, pl. hajcsőbe zárt folyadékoszloppal létesítünk vezető összeköttetést a és b között, azt találjuk, hogy a Δ távolság alig növekszik, tehát ez az óriási ellenállású folyadékfonál alig vezeti valamivel rosszabbul a kisülést mint a rézdrót.

Mindezekből tehát azt következtetjük, hogy ha a felhő és a föld között történő kisülést jó vezető úton úgy akarják elvezetni, hogy a kisülés minden esetre e vezetőn keresztül haladjon, vagyis a vezető jó villámhárító legyen; ekkor első sorban a vezetékek alakjára elrendezésére, egyszóval a rendszer önindukciójára kell tekintettel lenni.

Ha e tényezőket figyelmen kívül hagyva, a keresztmetszet lehető nagyításában, lehetőleg vastag vezetőrudakban keressük a megoldást, nem érünk czélt.

A vastag vezetékek megbízhatósága megitélhető a következő kisérletből.



2. ábra.

A 2. ábrabeli leydeni palaczk kisülési áramát pl. 1 m. hosszú, 2—3 cm. átmérőjű szigetelt R vörösrézrúdon vezetjük keresztül és az R rézrúddal párvonalasan az s vékony, pl. 0·02 mm. átmérőjű platina szált fektetjük, melynek p_1 és p_2 végei k. b. 0·5 mm. távolságban állnak R rúdtól. Azt tapasztaljuk, hogy p_1-be és p_2-be R rúdból szikrák csapnak át, valahányszor a és b között a leydeni palaczkot kisütő nagy szikra csap át.

Hasonlóan meglehetős erős ütéseket kapunk, ha pl. 1 cm. átmérőjű 3—4 m. hosszú rézdrótból készített spirálison keresztül vezetjük a leydeni palaczk kisülő áramát és a spirális végeit nedves kézzel megérintjük.

Ha már most összevetjük az a és b között észlelhető szikrát a villám tüneményével s ily módon képet alkotunk a két kisülés nagyságának egymáshoz való viszonyáról, fogalmat alkothatunk arról is, hogy a vezetékekből történő esetleges oldalkisülések éppen nem ártatlan jellegűek.

Az itt bemutatott kisérleteket elméletileg Stefan J. nyomán követhetjük.*

Stefan a vezetőket az áramfonalaknak megfelelő vezetőfonalakra bontja, s e vezető fonalakra a párhuzamosan kapcsolt vezetőkre vonatkozó ismert képleteket alkalmazza.

Legyen két ilyen I. és II. fonál ohmikus ellenállása r_1 illetőleg r_2, önindukcziója L_1 illetőleg L_2 s kölcsönös indukcziójuk M; jelöljük a meg-

* Stefan J. Wied. Ann. XLI. köt., p. 400. 1890.

felelő áramok erősségét i_1 illetőleg i_2-vel, akkor e két fonálra egész általánosan az

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

egyenlet áll.

Ha már most — mint az előző kisérletek esetében i_1 igen gyorsan irányát változtatgatja, ha tehát elektromos oscillatiókról van szó; akkor az $i_1 r_1$ és $i_2 r_2$ tagok a többiekhez képest igen kicsinyek s elhanyagolhatók. Ekkor tehát az 1) egyenlet az

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

alakot ölti, melyből -- mivel az időtől független tagok nincsenek az egyenletben — az

$$L_1 i_1 + M i_2 = L_2 i_2 + M i_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

egyenlet ered.

2) egyenlet pedig kriterium arra, hogy az

$$A = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

kifejezés, mely az áramfonalak jelenlétéből származó a környező térben felhalmozott elektromágneses energia minimum legyen.

Stefan ez eljárást s eredményt két áramfonálról háromra, n-re, végre az áramfonalak végtelen seregére alkalmazva, a 2) képlet alapján a következő tételt mondja ki:

A váltakozó irányú (oscilláló) elektromos áramok a vezetőkben oly módon oszolnak el, hogy a velük együttjáró, a térben felhalmozott energia különben egyenlő viszonyok mellett minimum legyen. Az energia minimuma pedig akkor áll be, ha az áramok a vezetők felszinén haladnak.

A tényleges viszonyok annál jobban közelítik meg ez ideális állapotot, minél nagyobb az áramok váltakozási száma.

A dolog tényleg úgy áll, hogy az áramsürüség a vezetők felszinében legnagyobb s innen a vezető tengelye felé fogy, és pedig annál gyorsabban fogy, minél nagyobb a váltakozási szám, s minél nagyobb az illető fém fajlagos vezető-képessége.

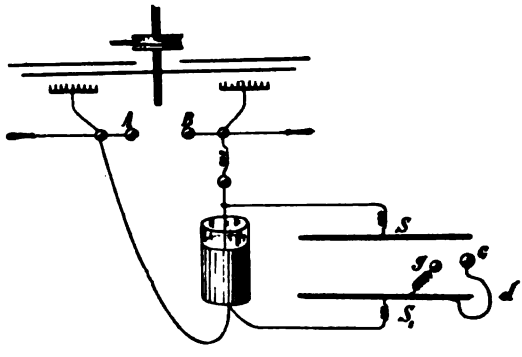
Az itt mondottak helyessége különben az előzőleg közölt elvtől függetlenül is beláthatók, ha megfontoljuk, hogy a vezetők külső fonalainak önindukciója kisebb, mint a belsőké, s azért a külső rétegekben az áramsürüség szükségképen nagyobb, mint a tengelyben, s pedig aránylag annál nagyobb, minél nagyobb a váltakozási szám, s minél nagyobb a fém fajlagos vezető képessége.

Ezekből következik, hogy bizonyos körülmények között fémcső épen

oly jól vagy még jobban vezetheti az ily oscilláló áramokat, mint vele egyenlő méretű tömör rúd, továbbá hogy igen rövid elektromos hullámok a különféle fémekből való vezetékekben* egyforma sebességel terjednek; az első pontot az itt bemutatott kisérletek igazolják, a második következtetést pedig HERTZ igazolta kisérletileg.

Teljesség kedveért néhány megközelítő számítással nyert számértéket közlök. 4 mm. átmérőjü vasdrót felületén, ha a teljes váltakozások száma másodperczenkint $n=500$, k. b. 6-szor nagyobb az áramsürüség, mint a drót tengelyében; ha $n=1000$, akkor a felületi sürüség a tengelyben való áramsürüségnek k. b. 20-szorosa.

Ha $n=50\times10^6$, akkor az áramsürüség a felszin alatti 0·0085 mm. mélységben már 100-ad része a felszinben való áramsürüségnek. $d=0{\cdot}0058$



3. ábra.

mm. mélységben a felszín alatt az áramsürüség 23-szorta kisebb a felszinen való sürüségnél, s az áram fáziskülömbsége a felszinben haladó áramokkal szemben egy fél periodus, tehát az áramok ebben a mélységben a felszinben haladó áramokkal minden pillanatban ellenkező irányúak. Ez a jelenség 4 mm. átmérőjü rézdrótban k. b. 0·045 mm., ugyanoly vastag ujezüst drótban pedig 0·1 mm. mélységben lép fel.

Lássuk már most az u. n. *oldalkisülések* létrejöttét elősegítő tényezőket (3-ik ábra).

A és *B* az elektromos megosztó gép két kisütő rúdja, mely a leydeni palaczk két felületével áll vezető összeköttetésben. E két felület az *S* és S_1 fémlemezekkel van összekötve.

A palaczk kisüthető pl. oly módon, hogy a *G* szigetelt gömböt *d* drót

* Ilyenkor az áramok, ha helyesen akarunk beszélni, nem a *vezetékekben*, hanem a *vezetékeken* haladnak.

közvetítésével az S_1 lemezhez kötjük. A kisülés ekkor az S és G között létesülő szikrával történik és d drót vezeti a kisülés áramát. Ha már most d szomszédságába G gömbhöz közel g gömböt szerelünk s ezt r ellenállás közvetítésével S_1-hez kötjük, azt látjuk, hogy a G és S között létesülő szikrákkal egyidejüleg d és g között is létesülnek szikrák, r ellenállás növelése gyengíti a szikrákat, de nem szünteti meg.

A g és d között létesülő szikrák különben egyenlő körülmények között annál élénkebbek, minél nagyobb a d vezetéknek önindukcziója; tehát akkor a legerősebbek, ha d drót spirálisba van hajlítva. Az e kisérletből szerzett tapasztalatokat alkalmazhatjuk a villámcsapáskor történő kisülésre s a villámhárító vezetékekre.

S_1 lemez a földet, S a felhőt, d a villámhárító vezetéket és g a földdel többé-kevésbbé vezető összeköttetésben lévő, az épületben elhelyezett fémtárgyakat, személyeket jelképezi.

E kisérletek után a FRANKLIN mintája szerint készült villámhárító elrendezések fogyatékosságára vonatkozó tapasztalatok nem lephetnek meg bennünket. E tapasztalatok sehogy sem egyeznek a villámhárítókra vonatkozó és sajnos még ma is általánosan hitt régi nézetekkel; eredményük a következő 2 pontban foglalható össze:

1. Jókarban lévő, jó földvezetéssel ellátott villámhárító nem szolgáltat föltétlen biztos védelmet; a villámlétesítette kisülő áram gyakran az egész villámhárító vezetéknek vagy egyes részeinek mellőzésével az épületekbe csap át.

2. A villámhárító vezetékének szomszédságában lévő vezetők, személyek a villámcsapás pillanatában veszélyben vannak; gyakran előforduló oldalkisülések végzetesekké válhatnak.

Az előző kísérletek egyúttal megmutatják az útat, hogy miképpen fokozható a villámhárító vezetékek révén elérhető biztosság s miképen zárható ki a veszedelem.

Mielőtt ezek alapján a helyes és megfelelő villámhárító elrendezések tárgyalásába fognék, még a villámhárítók végvezetőire, a csúcsos, függőleges rudak szerepére és czélszerűségére vonatkozó néhány téves nézetet igazítok helyre.

A régi villámhárító elrendezésekben szereplő 2—3 m. hosszú aranyozott hegyű függőleges rúdnak az épület megvédésében elsőrendű szerepet tulajdonítanak. Számos, jelenleg használatban lévő szakmunka e függőleges rúd méretezését és szerelésmódját különös gonddal tárgyalja. A villámhárítótól védett terület méretei a régi elmélet szerint a felfogó rúd magasságától függnek; a villámhárító ugyanis a régi felfogás szerint megvédi abban a kúpban foglalt testeket, melynek csúcsa a villámhárító rúd csúcsában, alapkörének középpontja pedig a rúd talpában fekszik. Az alapkör

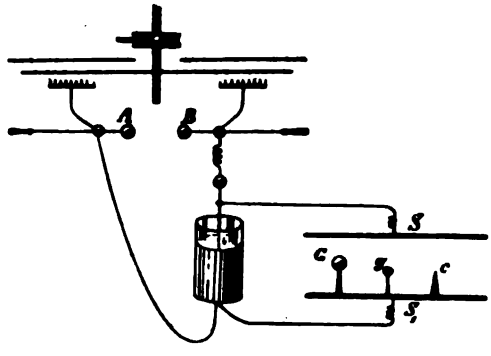
sugarát a villámhárító csúcs magasságának kétszeresére, mások háromszorosára veszik.

Az előbb közölt kisérletek alapján belátható, hogy ennek a törvénynek ily általános alakban nincs komolyan vehető alapja; sőt a következő kisérletekből kiviláglik, hogy sok esetben a csúcsos függőleges rúdnak védőhatást egyátalában nem tulajdoníthatunk.

Vegyük szemügyre e czélból a következő elrendezést (4. ábra).

Az elektromos megosztógép A B kisütő rudjaihoz a leydeni palaczkot s az S és S_1 szigetelt fémlemezeket kötjük.

Az S_1 lemezre a G nagy rézgömböt, a g kis gömböt és a c csúcsot szereljük úgy, hogy ezeknek S lemeztől való távolsága szabályozható legyen anélkül, hogy az S_1 lemezzel való vezető összeköttetés megszünnék.



4. ábra.

Ha a G és g gömböket és a c csúcsot egyforma magasságban szereljük, azt találjuk, hogy az S_1 és S között való kisülések nem szikra alakjában, nem időnkint, hanem folytonosan a csúcs közvetítésével történnek: a csúcs végében az ismeretes gyönge fénytüneménynyel járó csöndes kisülés látható. A viszonyok változatlanok maradnak, ha a csúcs a golyóknál jóval alacsonyabban van szerelve. A csúcs tehát megakadályozza az erősebb, időközönkint való kisülések létrejöttét. Ha végre a csúcsnak S lemeztől való távolsága elég nagy, ekkor a csúcsból történő csöndes kisülések mellett a csúcsból átcsapó gyönge szikrákat is élesztheténk. A csúcs tehát a G és g golyókat megvédi a szikráktól.

C csúcsot eltávolítván, meggyőződhetünk arról is, hogy g kis gömb a nagyobb G gömböt védi, a mennyiben a nagy gömbnél jóval lejebb kell szerelnünk, hogy a szikrák G nagy gömbbe csapjanak.

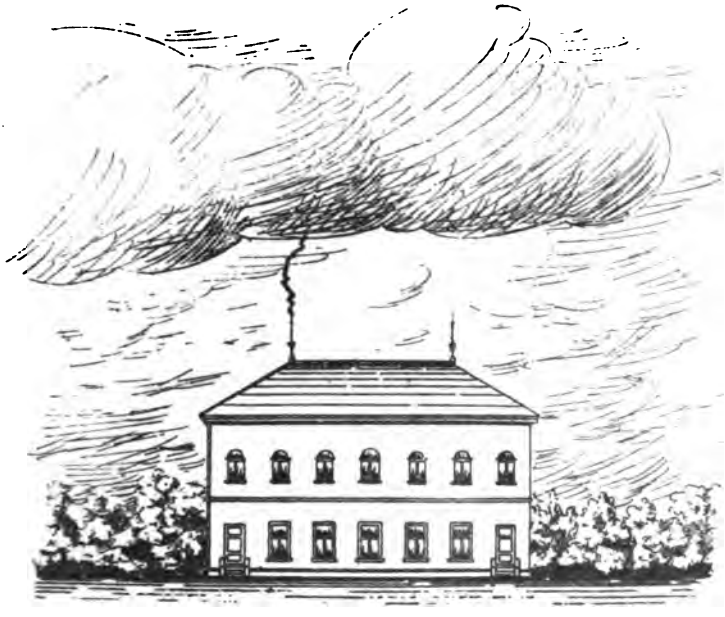
A G és g gömböket megvédi az S_1 lemezen álló Bunsen-láng is, vagy olyan fémcső, melyből forró levegő áramlik ki.

Egyúttal meggyőződhetünk arról is, hogy a csúcs a lángot védi, s hogy ennél sokkal jobb szikrahárító.

A gömböknek és a csúcsnak vezetékeibe igtatott nagyobb ellenállások a védő hatásokon nem változtatnak, a szikrák mindössze gyöngébekké válnak.

Az S és S_1 lemezek potentiálkülömbsége ez esetben *nem hirtelen*, hanem fokozatosan emelkedik a szikrák létesítésére szükséges értékre.

Hasonló viszonyok uralkodnak a természetben abban az esetben, mi-



5. ábra. Elsőrendű villámcsapás.

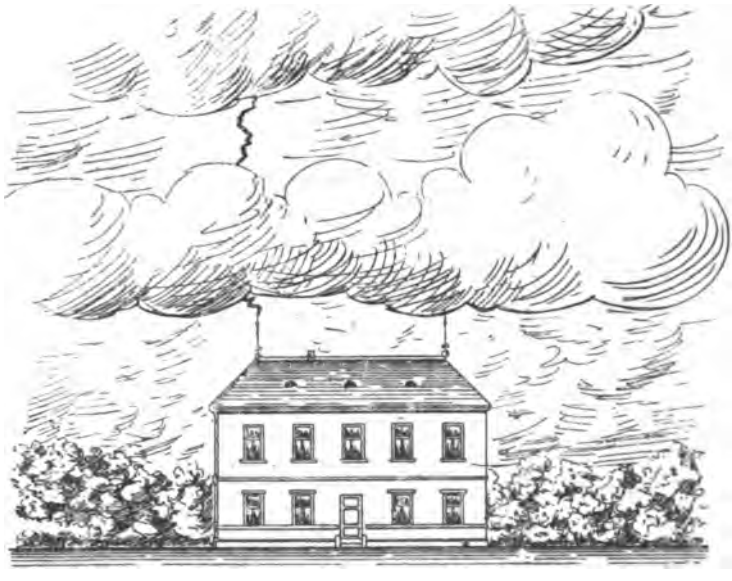
dőn pl. valamely épület felett lévő felhő és a föld között való potentiál különbség lassan emelkedik a villám létesítésére szükséges értékre, s a villám a felhőből az épületbe csap. (5. ábra.)

Az előző kisérletből következik, hogy az épületen lévő csúcsos, szegletes testek védik a többieket s hogy függőleges, a földdel vezető összeköttetésben lévő rúddal ellátott villámhárító elrendezés jobban felel meg mint más ily csúcsok hiján szerkesztett villámhárító.

A természetben azonban gyakori az az eset, hogy valamely felhő a felette lévő felhőbe sül ki; az alsó felhő s a föld között való potentiálkülömbség ennek következtében hirtelen felszökik, s a felhőből villám csap az alant lévő épületbe. (6. ábra.)

Ez az eset a 7. ábrabeli kisérleti elrendezéssel utánozható. A megosztó gép *A B* kisütő rúdjaihoz a leydeni palaczkot kötjük. S_1 lemezt a leydeni palaczk külső felületéhez, *S* lemezt *b* gömbhöz, *a* gömböt pedig *B* gömbhöz kötjük. Az *S* és S_1 lemezek potentiálkülömbsége, ha *a* és *b* között szikra csap át, hirtelen emelkedik fel arra az értékre, mely a *G* és *g* gömbök és *S* között való szikra létesítésére szükséges.

Azt látjuk, hogy ez esetben a kisebb gömb nem védi meg a nagyobbat és a csúcs sem védi meg a gömböket. A csúcsot a két gömbbel egy magas-



6. ábra. Másodrendű villámcsapás.

ságba állíthatjuk anélkül, hogy megakadályozhatnók ezzel *S* lemez és a gömbök között való szikrák létesülését.

Ha ellenben égő Bunsenlámpát szerelünk az S_1 lemezre, vagy forró légáramlatot bocsájtunk ki az S_1-re szerelt fémcsőből, azt tapasztaljuk, hogy e forró légáram teljesen megvédi a csúcsot és a gömböket, s a légoszlopba, illetőleg a lámpa lángjába erős szikrát csapnak.

Következik ebből, hogy a 6. ábrán előtüntetett esetben a csúcsos rúd nem növeli a villámhárító elrendezés biztosságát. Növeli azonban a villámcsapás valószínűségét, mivel a csúcs jóval magasabban van az épület tetejénél; s a vezeték fogyatékosságánál fogva kárt okozhat az ilyen villámcsapás, mely — ha a csúcsos rudat mellőzük, nem is létesült volna.

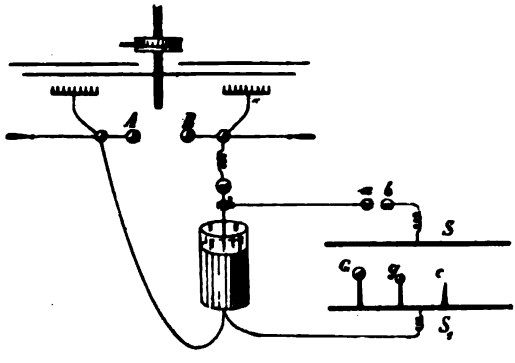
Belátható továbbá ezek alapján, hogy gyárak kéményeit, házak kürtőit

régi divatú csúcsos villámhárító nem védheti meg hasonló esetben a villámcsapástól.

A tapasztalás mutatja, hogy sok esetben a kisülés a villámhárító vezetéknek s a csúcsos rúdnak részben vagy teljesen való mellőzésével és a forró légoszlopnak és falazatnak közvetítésével halad a föld felé.

E kisérletek alapján hozzáfoghatunk a helyes, illetőleg a régi villámhárító elrendezéseknél helyesebb, czélszerűbb elrendezések tárgyalásához és megokolásához.

A bevezető sorokban az elektromos vezetékeket csővezetékekhez hasonlítottuk és az elektrosztatikai kapaczitásból és önindukczióból származó tüneményeket a csőrendszer falainak rugalmasságával, illetőleg a csőrendszerben haladó folyadék tehetetlenségével jelképeztük.



7. ábra.

Kifejtettük, hogy a csőrendszer annál jobban helyt állhat a folyadék oszlopra mért ütéseknek, minél nagyobb falainak rugalmassága s minél kevésbbé érvényesül a folyadék tehetetlensége.

Ha tehát teljesen megfelelő villámhárító vezetéket, azaz oly vezetékeket akarunk létesíteni, melyeket a villámcsapáskor történő hirtelen kisülést jól vezessék, a vezetékeket oly módon válaszszuk meg és rendezzük el, hogy elektrosztatikai kapaczitásuk lehető nagy s önindukczijuk lehető csekély legyen.

Mind a két föltételnek eleget tehetünk, ha lehetőleg nagy felszinü, csekély keresztmetszetü vezetékeket, vagy vezetékkötegeket alkalmazunk; a vezetékek keresztmetszetét — tekintettel a kisüléskor beálló hőfejlődésre, természetesen nem szabad oly csekélyre vennünk, hogy kisüléskor esetleg elolvadjanak. Kondenzátorokat a vezetékek kapacitásának növelésére nem

alkalmazhatunk: e. kondenzátorok a kisüléskor szereplő nagy potentialkülömbségnek helyt nem állhatnának s első alkalommal tönkremennének.

Könnyen belátható, hogy bizonyos határon túl nem csökkenthető a villámháritóvezetékek önindukciója, a mi egyértelmű avval, hogy a régi mintájú villámhárító elrendezés s annak változatai nem szolgálhatnak feltétlen biztos védelmet.

Ha valamely épületet föltétlen biztossággal akarunk megvédeni, s ki akarjuk zárni teljesen annak lehetőségét, hogy a kisülés az épületet útjába ejtse, ekkor az épületet fémhálóból, vagy még czélszerűbben 2—3 mm. vastag fémlemezekből való teljesen zárt vagy zárható burkolattal kell ellátni és e burkolatot a földel kell összekötni.

Az ilyen burkolat föltétlen biztossággal védi meg az épületet; a burkolatba csapó villámok minden körülmények között a burkolat mentén jutnak a földbe.

Az ilyen villámhárító elrendezés azonban lakóházak, templomok stb. védésére költséges volta és az architektura miatt, továbbá gyakorlati okokból nem alkalmazható.

Ilyennek alkalmazása tényleg csak ott okolható meg, a hol a legcsekélyebb elektromos szikra is nagy veszedelmet idézhetne elő; tehát puskapor raktárak, puskapor gyárak, s hasonló rendeltetésű épületek megvédésére.

Az ilyen fémlemez vagy hálóburkolat azonban csak akkor védi meg az épületet föltétlen biztossággal, ha tökéletesen zárt; ez annyit jelent, hogy a falakra, tetőre rakott lemez vagy háló burkolat az ajtókra alkalmazott fémburkolattal, s az ablakra feszített fémhálókkal együtt összefüggő vezető felületet alkosson.

A vezető felületet bárhol áttörő szigetelt drót (pl. telegráf vezeték, vagy világító vezeték) a villámcsapást az épület belsejébe juttathatja. Ez az eshetőség csak oly módon zárható ki, ha a vezetéknek s kezdetének kellő megvédéséről gondoskodunk. — Tökéletes alakban ez oly módon eszközölhető, hogy a vezetéket szigetelt fémburkolattal látjuk el; e fémburkolat az itt szóban lévő épület fémburkolatához, másrészt a vezeték másik végén lévő szerkezeteket védő épület fémburkolatához csatlakozik.

Ily módon pl. a táviró vezetékek, valamint a végeiben alkalmazott készülékek teljesen zárt vezető burkolattal környeztetnek. Védetlen, vagy hiányosan védett épületekben elhelyezett éghető vagy robbanó anyagok oly módon védhetők meg a villámcsapások ellen föltétlen biztossággal, ha fémburkolattal s földvezetéssel ellátott, teljesen zárható tartókba helyeztetnek el.

A tartót magába záró összefüggő vezető felülettől határolt tér teljesen

ment a felületben haladó kisülésektől s szikrák az e felülettől határolt térben nem létesülhetnek.

Az ilyen tökéletes villámhárító elrendezés költségeinél fogva, valamint gyakorlati s architektonikus okokból nem alkalmazható lakóházak, középületek stb. megvédésére. Az előzőleg tárgyalt kisérleti tapasztalások felhasználásával azonban elég olcsó (a Franklin-féle villámhárító elrendezéseknél tetemesen olcsóbb) villámhárító elrendezésekkel láthatók el az épületek, melyek igen jó védelmet szolgáltatnak. Megeshetik ugyan, hogy gyöngébb oldalkisülések, még ezek alkalmazása ellenére is jutnak az épületbe, de ezek jelentékenyebb kárt nem ejthetnek. Ez oldalkisülésre okot az épületben lévő fémes, egyátalában vezető testek, gáz- és vízvezetéki csövek kályhák stb. szolgáltatnak, de hatásuk s egyuttal az oldalkisülések valószinüsége aránylag könnyen csökkenthető.

A szóban forgó egyszerü elrendezés az épület főbb körvonalait, a tetőnek, a falaknak éleit követi és megfelelő földvezetékkel ellátott fémes vezetékvázból áll. E czélból az épület tetejének gerinczét, a tető széleit, az épület függőleges éleit és sarkait követve k. b. 3 mm. átmérőjü czinkezett vasdrotot vagy ugyanilyen keresztmetszetü vasdrót-köteget húzunk. E vezetékeket találkozó s metsző helyeikben gondosan összeforrasztjuk s ily módon összefüggő vezető vashálót létesítünk.

Czélszerü a tető gerinczén végig haladó vezetékre 3—4 cm. hosszú fémcsúcsokat szerelni, megfelelő forrasztásokkal a vezetékekkel való vezető összeköttetést kellőleg biztosítva.

Ily vezetékek létesítésére igen alkalmas az általánosan ismert, kerítések készítésére használatos *czinkezett tüskés vasdrót*. Ez elrendezést Maxwell ajánlotta először anélkül, hogy megokolta volna. Nyilván a fémhálót akarta főbb vonásaiban utánozni. Angolországban, valamint az afrikai angol gyarmatokban sok helyütt alkalmazzák ujabb időben ezt az elrendezést, még pedig a mint a statisztikai adatok mutatják, a legjobb sikerrel.

Az eredmény kivált az afrikai gyarmatokban szembeötlő, a hol a zivatarok hevességüknél s gyakoriságuknál fogva emberéletben s vagyonban azelőtt jelentékeny károkat okoztak.

Az afrikai gyarmatokban ez elrendezés bevált még egy másik gyakorlati előnynél fogva is.

Az ily vasdrótból készült vázakat kevés költséggel mezőkön álló magányos épületek, szinek, szénaboglyák megvédésére is lehet alkalmazni.

Az itt vázolt elrendezések földvezetésének készítésekor ugyanazok az elvek követendők, melyeket a felső vezetékek elrendezésekor kell szem előtt tartani.

A földvezetékeket is oly módon kell méretezni, hogy önindukcziójuk lehetőleg csekély s kapacitásuk lehető nagy legyen. Tömör, hengeres ru-

daknak alkalmazása teljesen helytelen és szerfelett drágítja az elrendezést. Legczélszerűbb 2—3 mm. vastag, 4—5 cm. széles czinkezett vasbádogból vágott fémszalagokat alkalmazni, melyek alsó végéből 2—3 mm. átmérőjű és k. b. 40—50 cm. hosszú vasdrótok ágaznak szét. Minél több az e fajta földvezeték, annál jobb; számuk az épület nagyságától függ. — Nagyobb épületnél, pl. nagyobb bérháznál czélszerű az épület mindegyik sarkán lefutó vezetékhez földvezetéket kötni.

Az előbb említett vasszalagok helyett előnyösen vékony, czinkezett vasdrótból készült köteleket alkalmazhatunk, melyeknek alsó végén a szálakat 40—50 cm. szélességben szétfejtjük.

Mint már említettük azelőtt a földvezetés kérdésének elsőrendű fontosságot tulajdonítottak; gyakran a száz m.-t meghaladó hosszúságú vezetékeket is készítettek, csakhogy a villámhárító földvezetékét valamely kútnak vagy tónak vizével hozhassák vezető összeköttetésbe.

Értekezésünk elején kísérletekkel bizonyítottuk be azt, hogy a vezetés jósága ez esetben csak másodsorban kerül szóba; s a régi villámhárító elrendezésekről, bárminő jó vezető összeköttetést is létesítettek a földdel, nagy önindukcziójuknál, azaz helytelen alakjuknál fogva nem képezhettek jó földvezetéket. Ellenben a fönt részletezett villámhárító elrendezés tapasztalás szerint tényleg még akkor is megteszi a szolgálatot, ha a föld és földvezeték között létesített vezető összeköttetés nem is éppen a legjobb.

E vezető összeköttetés jósága a földvezetékek elrendezésmódjának megválasztásától függ, melynek esetről-esetre a talajviszonyokhoz kell alkalmazkodnia.

A legjobb vezető összeköttetés az, ha a földvezeték a talajvíz színéig megy. Kutaknak, folyóknak, tavaknak vize czélszerűen használható fel vezető összeköttetés közvetítésére, föltéve, hogy közvetetlenül a védett épület mellett vannak, s így a vezeték nem okoz tetemes költséget.

Kutaknak stb. ily czélokra való felhasználása azonban csak akkor engedhető meg, ha fémes vezetékek nem torkolnak beléjök. Ily fémes vezetékek, pl. vízvezetéki csövek stb. állandó veszély forrásai zivatar idején.

A tapasztalás ugyanis arra tanít, hogy a villámhárító vezeték közvetítésével a vízbe jutó villámcsapás az egész víztömegben s a vele összeköttetésben levő csővezetékben tetemes zavarokat idézhet elő. A vízbe torkolló csővezetékek több száz méternyi távolban levő végeiből erős szikrák csaphatnak át szomszédos tárgyakba, s életben és vagyonban kárt okozhatnak. Az ilyen villámcsapás hatását legjobban mutatja egy Angolországban megfigyelt eset, melyben egy tó összes halállománya tönkrement, a tótól körülbelül 100 m-nyire levő villámhárítóba ütött villám következtében, mely a villámhárító főbb vezetékén át a tó vizébe jutott.

Ott, a hol a nagy távolság vagy az imént említett veszélyek miatt kuta-

kat, nagyobb víztömegeket nem használhatunk a földvezetés közvetítésére, ott legczélszerűbben a következő elrendezést követjük. A földvezetéket közel az épület alapfalaihoz legalább 4—5 m-nyire a földbe mélyesztvén, e mélységben elágaztatjuk; czélszerű, ha a földvezetés számára készített függőleges fúrás alsó részét kóksz-szal vagy faszénnel töltjük meg, s a környező földréteget a túlságos kiszáradástól óvjuk.

Nem szorúl bővebb magyarázatra, hogy különben egyenlő nedvességi viszonyok mellett a földvezetés annál jobb, minél mélyebbre visszük a föld felszíne alá: a kisülés elvesztése annál tökéletesebb lesz.

A földvezetés kérdésével kapcsolatban sokat foglalkoztak szakértők és bizottságok annak a kérdésnek a tisztázásával, vajjon megengedhető-e a villámhárítók földvezetékének a földalatti gáz- vagy vízvezetéki csövekhez való kapcsolása?

A míg a gyors statikai kisülések eloszlására és mozgására ugyanazokat a törvényeket alkalmazták, mint az állandó áramok eloszlására, addig e kérdésekre igenlő volt a felelet. A tapasztalat mai állása szerint azonban e kérdésre csak tagadólag felelhetünk; illetőleg ki kell mondanunk azt, hogy a földalatti csővezetékeket lehetőleg kerülnünk kell, még pedig nem azért, mintha a csővezetéken esetleg ejthető károktól tartanánk, hanem ama károk miatt, melyeket e csővezetéknek, a házakba torkolló elágazásai okozhatnak.

A csővezeték egy részén haladó kisülés a csővezeték távolabb eső részeiben és a csővezeték egyes pontjai vagy a végrészek és a föld között tetemes elektromos eróket létesíthet. A végrészeken alkalmazott csapokból a szomszédos vezetőkbe, esetleg a csap közelében levő személyekbe, erős szikrát csaphatnak át és komoly bajt okozhatnak.

Érdekes adatokat szolgáltat ehhez az Angolországban megejtett idevonatkozó megfigyelések statisztikája. Sok esetben megtörtént, hogy valamely épületbe csapott villám hatása következtében a szomszédos épület valamely csövéből kiáramló világító gáz meggyuladt, vagy a szomszédos épület vízvezetéki csapjánál foglalatoskodó egyén hatalmas ütést kapott.

Egyébiránt megjegyzendő, hogy sok esetben a földvezetés és a csővezetékek között létesített kapcsolás révén elért eredmény vajmi kétes. E csővezetékek földvezetése sok esetben vajmi hiányos, s ezért a kapcsolás a villámhárító földvezetésének tökéletességét csak mérsékelt módon gyarapítja.

Megjegyzéseink egyformán vonatkoznak gáz- és vízvezetéki csövekre. A vízvezetékből helyenkint kiszivárgó víz tapasztalás szerint nem sokat változtat a földvezetés minőségén, ez első sorban a talajviszonyoktól függ.

Egyébiránt teljesen hibás volna, ha azt tételeznók fel, hogy a kisülés levezetésében a csőrendszer egész terjedelmében szerepelhet: a csővezeté-

kek nagy önindukciója miatt a csőrendszernek csak igen csekély kiterjedésű része vesz részt a kisülés levezetésében.

Városokban a villámhárítók földvezetékei akárhányszor csővezetékek közelébe jutnak; ez a helyi viszonyok miatt el nem kerülhető. Ez esetben villámcsapáskor a földvezetékből erősebb kisülések juthatnak a csővezetékbe (különösen akkor, ha a földvezeték nem halad le kellő mélységig), s nagyobb károkat ejthetnek a csövekben. Ilyenkor két baj közül a kisebbet választva, a csővezetékhez kötjük a hárító földvezetéket.

Már említettük, hogy a villámhárító elrendezések (ha csak nem fémlemez vagy fémháló burkolatokat alkalmazunk) ugyan elég nagy biztossággal, de nem feltétlen biztossággal védik meg az épületben levő vezetőket. A villámhárító vezetékből átcsapó oldalkisülések, vagy a kisülés indukciós hatásából származó, az egyes vezetők között átcsapó szikrák ha nem is nagy, de mégis számbavehető károkat okozhatnak.

A villámcsapáskor beálló viszonyokat különben kicsiben utánozhatjuk, ha a villámhárító vezeték legfelső részeiben valamely elektromos megosztó gépből töltődő leydeni palaczktelep kisüléseit bocsátjuk. A villámhárító vezeték alsó részeiből ekkor meglehetős szikrákat csalhatunk, a vezeték közelében szigetelten felállított vezetők között; ha elég közel vannak, apró szikrák csapnak át. Sötétben a házban lévő csővezetékek csapjain, a villámhárító vezetékhez közel lévő vezetőkön fénytüneményeket észlelünk a padláson elhelyezett leydeni palaczktelep kisülésekor. Az e kisérletkor szereplő töltések elenyésző csekélyek a villámcsapások mennyiségeihez képest s e kisérlet alapján képet alkothatunk a villámcsapástól okozott indukczió hatások nagyságáról.

Az épületekben lévő vezetők, csővezetékek legczélszerűbben oly módon védhetők meg ily indukciós hatások és oldalkisülések hatásaitól, ha vékony, k. b. 2—3 mm. átmérőjű vasdrót vezetékkel kötjük őket össze és e vezetéket külön földvezetéshez kapcsoljuk. A villámhárító földvezetését nem szabad e czélra felhasználnunk. Ily összeköttetéseket a gyakorlatban természetesen csak állandó helyű vezetők között létesíthetünk s ez esetben a vakolatba rejthetők az összekötő drótok. Egyébiránt pedig ügyeljünk arra, hogy a külső villámhárító vezetékek közelébe fémtestek, pl. dísztárgyak, fegyverek stb. ne kerüljenek. A villámhárító vezeték közelében lévő egyének a villámcsapás pillanatában veszélyben forognak, a vezetékből átcsapó oldalkisülések vagy a villám-indukczió hatásai végzetes következményekkel járhatnak.

Az afrikai angol gyarmatokból származó statisztikai jelentések ismételten említenek oly eseteket, melyekben az épületen kívül lecsapó villám az épületben lévő egy-két egyénnek halálát okozta, anélkül, hogy az épületben vagy az illető egyéneken bárminemű külső sérülés látható lett volna.

Az épületben levő vezető testeknek előzőleg ismertetett összeköttetése csak akkor fontos követelmény, ha az épület magányosan áll, s a légköri viszonyok a villámcsapásoknak a 6. ábrán előtüntetett változatát előmozdítják. Nagyobb városok épületeinek fémtetői, csúcsai stb. közreműködnek a fölöttük lévő felhő s a föld között lévő elektromótoros erő kiegyenlítésében, s ezért a nagyobb városok felett végbemenő zivatarok soha sem oly erősek, mint a szabad területek felett.

A kiegyenlítő hatás azonban nem érvényesül, ha a város felett lévő felhőnek potenciálja a 6. ábrán előtüntetett módon hirtelen emelkedik. Ilyen esetekben a régi szerkezetű villámhárítók sehogy sem felelnek meg, s az elrendezésre fordított költség semmiképen sem áll arányban a védelem biztosságával.

Helyén való lesz, ha itt még magas, falazott kürtőknek helyes megvédéséről is megemlékezünk.

Az eddig szokásos, 20—30 m. hosszú csúcsban végződő, tömör rézvezetékek nagy önindukciójuknál fogva tapasztalás szerint sok esetben felmondják a szolgálatot.

A 6. ábrán ismertetett esetben pedig teljesen hibás volna azt hinni, hogy a kürtőnek megvédésében az ilyen vezetéknek szerep juthat. Az említett eset tárgyalásakor kisérletileg kimutattuk, hogy a forró gázok, ez esetben tehát a kürtőből kiáramló forró égéstermékek sokkal jobban vezetik a hirtelen elektromos kisülést, mint a fémes, önindukcziós vezetékek.

A villám ezért a vezetékrudakat részben vagy egészben mellőzve a forró légoszlopban halad lefelé és megrongálja a falazatot.

Megfelelő villámhárító elrendezést oly módon készíthetünk, ha a kürtőn végig kívül 2—3 mm. vasdrótból való egy vagy két vezetéket húzunk a kürtő alapfalai mellett lévő földvezetéshez és e vezetékekhez, egymástól 3—4 m-nyi távolságban, a kürtőt körülövező drótgyűrűket forrasztunk.

Az e dolgozatban vázolt elrendezések költségei jóval csekélyebbek a régi, Franklin-féle minta szerint készített villámhárítók költségeinél.

Igaz ugyan, hogy gyakran akadunk e régi minta szerint készült oly villámhárítókra, melyek a szerelés gyarlóságánál fogva igen csekély költségbe kerülhettek, de ezek adott alkalommal nem is felelnek meg ; oldalkisülések akárhányszor veszélyeztetik az ily elrendezésektől védett épületek biztosságát.

Végül még csak kötelességemnek akarok megfelelni, midőn megemlékezem dr. MANN-ról, ki az afrikai angol gyarmatokban végzett kisérleteivel s ott gyüjtött statisztikai adatokkal nagy szolgálatokat tett a villámhárítók ügyének.

Dr. Hoór.

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány f. é. október hó 19-én tartott ülésen a Mathematikai és Physikai Társulat új tagjaiul a következőket választotta meg: *Berkes Ottó* premontrei kanonok és tanár Csornán (aj. *Edelmann* és *Módly*); *Terlanday Emil* Szt. Benedekrendi tanár Kőszegen (aj. *Simon* és *Bartoniek*); *Serédi Marczell* Szt. Benedekrendi tanár Pannonhalmán (aj. *Palatin* és *Fröhlich*); *Sárgay Antal* k. r. tanár Léván (aj. *Sinkovits* és *Schmidt*); *Pálya Mihály* polg. isk. igazgató Csáktornyán (aj. *Alszeghy* és *Bartoniek*); *Fischer Endre* polg. isk. tanár Csáktornyán (aj. *Alszeghy* és *Bartoniek*); *Dr. Kuthy József* főreálisk. igazgató Székesfehérvárott (aj. *Bod* és *Szily*); *Fabuss Alajos* polg. isk. igazgató Beszterczebányán (aj. *Marcsiss* és *Wagner*); *Bruckner Károly* főgymn. tanár Késmárkon (aj. *Klein* és *Mauritz*); *Korbuly Emil, Orosz József, Nagy Sándor* és *Petres János* mennyiség- és természettudományi kari hallgatók Kolozsvárott (aj. *Farkas* és *Vályi*); *Joó István* a tiszántuli ref. főgymnasiumok felügyelője Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Orosz István* ref. tanítóképezdei tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Gerecz Lajos* áll. főreálisk. tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Potomcsik Ignácz* keresk. akad. tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Priváry József* r. kath. gymn. tanár Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Lesska Ferencz* a M. Á. V. üzletvezetőségének ellenőre Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Stahl Géza* városi főmérnök Debreczenben (aj. *K. Kiss* és *Karay*); *Kappel György* áll. főreálisk. tanár N.-Várad (aj. *Vidovich* és *Krüger*); *Szabó János, Rózsa István, Frank István, Somogyi István* és *Grexa Lóránd* prem. rendű tanárok Kolozsvárt (aj. *Farkas* és *Novotny*); *Burkovits Lajos* főgymn. tanár Keszthelyen (aj. *Edelmann* és *Módly*); *Láng Emil* prem. kanonok és főgymn. tanár Keszthelyen (aj. *Edelmann* és *Módly*); *Fischer Miklós* ág. ev. főgymn. igazgató Iglón (aj. *Kövi* és *Mauritz*); *Dr. Lévay Ede* k. r. főgymn. tanár Nyitrán (aj. *Ferenczy* és *Schmidt*); *Szirtes Ignácz* áll. főreálisk. tanár Pécsett (aj. *Dischka* és *Maksay*); *Riegler Sándor* az áll. keresk. akademia igazgatója Fiumén (aj. *b. Eötvös* és *Bartoniek*); *Dr. Salcher Péter* a cs. és kir. tengerészeti akademia tanára Fiumén (aj. *b. Eötvös* és *Fröhlich*); *Dózsa Jakab* áll. főreálisk. tanár Székely-Udvarhelyt (aj. *Hlatky* és *Rados J.*); *Kolbenheyer Károly Arnold* főgymn. tanár Nagy-Szebenben (aj. *Gidófalvy* és *Ferenczy*); *Karrázy, Zsigmond, Mikola Sándor* és *Ondrus Pál* tanárjelöltek Budapesten (aj. *Klupathy* és *Tangl*); *Niedermayer Gyula* áll. középkereskedelmi iskolai tanár Ujvidéken (aj. *Szutrély* és *Pap*); *Molnár Aladár* áll. polg. isk. tanár Ujvidéken (aj. *Szutrély* és *Pap*).

A KÖRVONAL ÜLDÖZŐ GÖRBÉJE, ÁLLANDÓ TÁVOLSÁG MELLETT.*

KLERICS LYUBOMIR úr, a belgrádi főiskolán a mechanika tanára, 1893. őszszel Budapesten átutaztában közölte velem, hogy *szerkesztés* útján egy meglepő kinematikai tételre jutott, a mely, ha általános érvényességét mathematikai szigorúsággal be lehetne bizonyítani, nemcsak elméleti szempontból, hanem a gyakorlati planimetria tekintetében is rendkívüli fontosságú lenne.

A tétel ez: «Mialatt az üldözött A pont a síkban egy tetszőleges *zárt* görbét körül fut s visszaérkezvén kiindulása helyére (A_0-ba), onnan a zárt görbétől befoglalt terület súlypontjáig (S-ig) egyenes vonalon leszáll, — az alatt az üldöző B pont (föltéve, hogy távolsága A-tól állandó marad, s a mozgás kezdetén B_0, A_0 és S egy egyenesben feküdtek) utoljára egy oly helyre (B_s-be) jut, hogy a B_s-ből A_0B_0-ra bocsátott merőleges hosszát (h-val) az AB távolsággal (l-lel) megszorozván, *e szorzat* (hl) *egyenlő lesz a zárt görbétől befoglalt síkidom területével.*»

Meg akartam győződni, vajjon e tétel, legalább egy síkidomra nézve, bárha bizonyos határok között is, szigorúan igaz-e? Ez okból meghatároztam a *kör* kerületén egyszer körülfutó s azután a középpontig egyenes vonalon leszálló pont üldöző görbéjét, állandó távolság mellett.

Vizsgálataim eredményét KLERICS tanár úr előterjesztette a kir. szerb akadémia 1893. deczemberi osztályülésén és közzé is tette a GLASZ czimű szerb akadémiai folyóirat 41-ik kötetében.

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat deczember hó 6-án tartott rendes ülésén.

Szabadjon a főbb eredményeket a Mathematikai és Physikai Lapok olvasóival is megismertetnem.

I.

Tegyük föl egyelőre, hogy az üldözött A pont az

$$y = f(x) \tag{1}$$

tetszőleges síkpályán mozog; minő pályát ír le az üldöző B pont, a távolság köztök állandóan ugyanaz maradván.

Jelöljük az A pont derékszögű koordinátáit x és y-nal, a B pontéit ξ és η-val, állandó távolságukat l-lel, úgy

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = l^2 \tag{2}$$

és

$$\eta - y = \frac{d\eta}{d\xi}(\xi - x). \tag{3}$$

Jelöljük továbbá az üldöző görbe pálya elemét $d\sigma$-val, úgy a (2) és (3) egybekapcsolásából származik:

$$\xi - x = \pm\, l \frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$\eta - y = \pm\, l \frac{d\eta}{d\sigma}\,.$$

Ha innen x és y értékeit (1)-be helyettezzük, megkapjuk az üldöző görbe differenciálegyenletét.

A (2) alatti egyenlet differenciálása, egyszerű átalakítás után, a

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = \frac{l^2}{\xi - x}\,d\xi = \frac{l^2}{\eta - y}\,d\eta \tag{4}$$

relaczióra vezet, a melyre az alábbiakban szükségünk lesz.

II.

Legyen az A pont pályája: a sugarú kör, melynek középpontját (S-t) a koordináták kezdetéül véve, lesz:

$$\left(\xi \mp l\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2+\left(\eta \mp l\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2=a^2$$

és innen, ha B vezérsugarát ρ-val jelöljük:

$$\frac{d\sigma}{d\rho}=\pm\frac{2l\rho}{\rho^2+l^2-a^2}.$$

Vezessünk be ide polár-koordinátákat (ρ és ϑ) s a ϑ szöget számítsuk az SA_0B_0 kezdeti helyzettől, úgy:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right)^2=1+\rho^2\left(\frac{d\vartheta}{d\rho}\right)^2$$

és ebből, minthogy ϑ nőttével ρ csökken,

$$\frac{d\vartheta}{d\rho}=-\frac{\sqrt{4l^2\rho^2-(\rho^2+l^2-a^2)^2}}{\rho(\rho^2+l^2-a^2)}$$

Az integrálás megkönnyebbítése végett, hozzuk be ρ helyett, a

$$\cos\alpha=\frac{\rho^2+a^2-l^2}{2a\rho}$$

értelmezés alapján, új változóul α-t, vagyis az SA és SB vezérsugarak közé zárt szöget. Kellő összevonás után lesz:

$$\frac{d\vartheta}{d\alpha}=\frac{a^2\sin^2\alpha}{l^2-a^2\sin^2\alpha}$$

Jelöljük az

$$\sqrt{1-\left(\frac{a}{l}\right)^2}$$

számot k-val s integráljunk:

$$\vartheta+\alpha=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}\alpha) \qquad (5)$$

az integrálás állandója zérus levén, minthogy a kezdeti helyzetben mind α mind ϑ zérus.

Az SA vezérsugár irányszögét (SA_0-tól számítva) jelöljük φ-vel, s vegyük figyelembe, hogy

$$\alpha=\varphi-\vartheta,$$

úgy az (5) alatti egyenlet még így is írható:

$$\operatorname{tg}(\varphi-\vartheta)=\frac{1}{k}\operatorname{tg}(k\varphi) \tag{6}$$

Ez az egyenlet minden φ-re megadja a hozzátartozó ϑ-t, vagyis kifejezi (ϑ és φ koordinátákban) a *kör üldöző görbéjének egyenletét, állandó távolság mellett.*

Ha $k^2<0$, akkor az üldöző görbe spirális, mely az S középpontú és $\sqrt{a^2-l^2}$ sugarú körvonal felé közeleg; ha $k=0$, a görbe akkor is spirális, mely az S középpont felé közeleg; ha végre $k^2>0$, akkor ρ periodikus függvénye φ-nek, és a periodus egyenlő $\frac{2\pi}{k}$-val.

III.

A körkerület egyszeri körüljárása be levén fejezve,

$$\varphi=2\pi$$

és a (6) egyenlet szerint, a megfelelő $\vartheta=\vartheta_1$ lesz

$$\operatorname{tg}\vartheta_1=-\frac{1}{k}\operatorname{tg}2\pi k. \tag{7}$$

Most az A pont az A_0S félátmérőn leszáll a középpontba. Vegyük az SA_0B_0 egyenest y tengelyül, úgy a (4) alatti egyenletben $x=0$ és tekintettel (2)-re, lesz:

$$\frac{dy}{d\xi}=\frac{l^2}{\xi\sqrt{l^2-\xi^2}}$$

Integrálva és az integrálás állandóját $\frac{c}{l}$-lel jelölve,

$$\xi=\frac{2l}{e^{\frac{c-y}{l}}+e^{-\frac{c-y}{l}}}$$

és (2) szerint

$$\eta=y+\frac{e^{\frac{c-y}{l}}-e^{-\frac{c-y}{l}}}{e^{\frac{c-y}{l}}+e^{-\frac{c-y}{l}}}l$$

E két kifejezésből származik

$$\sqrt{\frac{l+y}{l-y}}\, e^{\frac{\varepsilon-x}{i}} = \frac{l}{\sqrt{l^2-y^2}}\,\frac{\eta}{\xi} + \sqrt{\frac{l^2}{l^2-y^2}\,\frac{\eta^2}{\xi^2}+1} \qquad (8)$$

Az A_0S egyenes valamennyi pontja elsget tartozik tenni ezen egyenletnek. Az A_0 pontra:

$$y = a; \quad \frac{l}{\sqrt{l^2-y^2}} = \frac{1}{k}; \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{cotg}\vartheta_1,$$

tehát:

$$\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}\, e^{\frac{\varepsilon-a}{i}} = \frac{1}{k}\operatorname{cotg}\vartheta_1 + \sqrt{\frac{1}{k^2}\operatorname{cotg}^2\vartheta_1 + 1}$$

Azonban (7) szerint

$$\frac{1}{k}\operatorname{cotg}\vartheta_1 = -\operatorname{cotg} 2\pi k$$

és igy kellő összevonás után:

$$\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}\, e^{\frac{\varepsilon-a}{i}} = -\operatorname{cotg}\pi k. \qquad (9)$$

Az S pontra:

$$y = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{cotg}\vartheta_s$$

hol is ϑ_s az SB_s egyenes irányszögét jelenti.

E szerint

$$e^{\frac{\varepsilon}{i}} = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta_s}{2} \qquad (10)$$

(10) és (9)-ből származik:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2} = -\sqrt{\frac{l+a}{l-a}}\, e^{-\frac{a}{i}} \operatorname{tg}\pi k$$

vagy ha $\frac{a}{l}$ helyébe m-t irunk:

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta_s}{2} = -\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\, e^{-\frac{m}{i}\operatorname{tg}(\pi\sqrt{1-m^2})}$$

s ezzel meg van határozva az SB véghelyzetének irányszöge ϑ_s, a kezdeti helyzettől számitva; a B_s pont vezérsugara pedig

$$\rho_s = l.$$

IV.

KLERICS úr szerkesztése szerint az

$$l^2 \sin \vartheta_s$$

kifejezésnek egyenlőnek kellene lenni πa^2-tel, vagyis

$$\frac{\sin \vartheta_s}{\pi m^2} = 1. \qquad (11)$$

A (11) egyenlet szerint kiszámítottam ϑ_s értékét m különféle értékeire. Az eredményeket a következő kis táblába foglalom össze:

m	$\frac{\sin \vartheta_s}{\pi m^2}$
0·50	0·98063
0·48	0·99257
0·465	0·99968
0·4643	1·00000
0·46	1·00176
0·25	1·01485.

Látjuk, hogy az állitólagos tétel m-nek csakis egyetlen egy értékére szigorúan igaz; de látjuk azt is, hogy a hiba aránylag igen tág határok közt oly csekély (2%-nál is kevesebb), hogy a megegyezés mindenesetre igen figyelemreméltó; mert a hibát a szerkesztésben jóformán észre sem lehet venni.

Szily Kálmán.

AZ INVARIÁNSOK ELMÉLETÉNEK ALAPTÉTELÉRŐL.

(Első közlemény.)

Az algebrai alakok invariánsainak fogalma mindjárt e lapok első számaiban beható elemzésben részesült.[1] A vizsgálat abból az értelmezésből indult ki, hogy valamely egyes algebrai alaknak vagy több alakból álló rendszernek együtthatóiból képezett oly racionális egész kifejezés, mely az egyes alakok együtthatóiban külön-külön homogén, akkor neveztetik *invariánsnak*, ha ezt egyrészt az eredeti, másrészt a lineár transzformációnak alávetett alakoknak együtthatóiból képezzük, a nyerendő kifejezések csak egy állandó szorzóban térnek el egymástól. Az elemzés eredménye az volt, hogy e szorzó csak a helyettesítés determinánsának valamely hatványa lehet. E hatvány kitevőjét Hermite az invariáns *indexének* nevezte.

Egy második közlemény[2] a binár vagyis két változós alakok invariánsaival még részletesebben foglalkozott s különösen ama Gordan-tól eredő tétel egyik bebizonyítását ismertette, hogy

valamely alak vagy alakrendszer összes invariánsai bizonyos véges számú invariánsnak racionális egész összetételei.

Hogy e tétel több változós alakokra vonatkozólag szintén érvényes-e, az sokáig nyilt kérdés volt. Csak 1890-ben sikerült Hilbert Dávid-nak a tétel általános érvényességét bebizonyítania.[3]

---

[1] Kopp. Az invariánsok elméletének alapjairól. I. köt., 68—75. lap.

[2] U. a. (Második és befejező közlemény.) I. köt., 200—213. lap.

[3] Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Mathematische Annalen. 36. köt.

Újabb bebizonyításokat tartalmaznak:

Story. On the Covariants of a System of Quantics Math. Ann. 41. köt.

Jelen közleményem célja e bebizonyítás ismertetése.

Kiinduló pontúl oly eljárás megállapítása szolgál, mely az alakrendszer minden egyes alakjának együtthatóiban homogén függvényekből csupa invariánst állít elő, még pedig az összes ily függvényekből az összes invariánsokat. Ily módon persze végtelen sok invariánst nyerünk.

Egy további fejezet épen azért végtelen függvénysokaságokkal foglalkozik, s a következő tétel bebizonyítását tartalmazza:

Ha adva van az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

változók racionális egész függvényeinek valamely végtelen sokasága, akkor benne mindig található oly véges

$$F_1, F_2, \ldots, F_m$$

függvénysorozat, hogy a vizsgált sokaság bármely F függvénye az

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_mF_m$$

alakban állítható elő, hol az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ együtthatók, az x-eknek alkalmasan választott ráczionális egész függvényei.

Ha itt

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

az adott alakrendszer együtthatóit jelentik, az F-ek pedig az invariánsokat, akkor az

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

együtthatókról kimutatható, hogy vagy már maguk invariánsok vagy invariánsokkal pótolhatók. Ennek igazolásában áll az algebrai alakok szóban forgó alaptételének Hilbert-féle bebizonyítása.

Egyszerűség kedvéért vizsgálatainkban ternár alakokra fogunk szorítkozni, de bárhány változó esetében ugyanaz az eljárás követendő.

Gordan. Ueber einen Satz von Hilbert. Math. Ann. 42. köt. (Csak egy f alak esetével foglalkozik.)

Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Nachrichten etc. zu Göttingen. 1892. (3-te Note.)

I.

1. Legyen adva k ternär alak

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}.$$

A bennök előforduló változókat jelöljük x_1, x_2, x_3-mal s végezzük el a következő helyettesitést

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned} \tag{1}$$

melynek determinánsa

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A transzformált alakokat jelöljük

$$f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}\text{-val.}$$

Ha e transzformált alakok együtthatóinak oly $F_{(fa)}$ ráczionális egész függvényét, mely minden egyes alak együtthatóiban külön-külön homogén, megszorozzuk az a determináns valamely nem negativ egész hatványával s az így nyert $a^q F_{(fa)}$ szorzaton az

$$\begin{aligned} \Omega_a = &\frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{22}\partial a_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{11}\partial a_{23}\partial a_{32}} + \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{23}\partial a_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{12}\partial a_{21}\partial a_{33}} + \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{21}\partial a_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial a_{13}\partial a_{22}\partial a_{31}} \end{aligned}$$

műveletet annyiszor ismételjük, míg végre az

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{33}$$

helyettesítési együtthatóktól ment kifejezésre jutunk, akkor az

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$$

alakrendszer együtthatóinak ily módon nyert függvénye — $I_{(f)}$ — *mindenkor az adott alakrendszer valamely invariánsa lesz.*

Ennek bebizonyításánál az (1) alatti helyettesítésen kivül, még más kettőt végezünk. Az egyiknél x_1, x_2, x_3 helyébe egyszerüen y_1, y_2, y_3-t irunk s e változókra a következő transzformációt alkalmazzuk

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + b_{13}z_3 \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + b_{23}z_3 \\ z_3 &= b_{21}z_1 + b_{32}z_2 + b_{33}z_3. \end{aligned} \tag{2}$$

A másik transzformáczió az (1) és (2) alattinak összetétele. Ennél a régi és új változók a következő összefüggésben vannak

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3, \end{aligned} \tag{3}$$

hol

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k}.$$
$$(i, k = 1, 2, 3).$$

A (2) alatti transzformáczió, melynek determinánsát b-vel jelöljük, az adott alakrendszert

$$f_b^{(1)}, f_b^{(2)}, \ldots, f_b^{(k)}\text{-ba}$$

vigye át. A neki megfelelő differenciáló művelet

$$\begin{aligned} \Omega_b = &\frac{\partial^3}{\partial b_{11}\partial b_{22}\partial b_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{11}\partial b_{23}\partial b_{32}} + \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\partial b_{23}\partial b_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{12}\partial b_{21}\partial b_{33}} + \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\partial b_{21}\partial b_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial b_{13}\partial b_{22}\partial b_{31}}. \end{aligned}$$

A (3) alatti transzformáczió, melynek determinánsa

$$c = ab,$$

az adott alakrendszert

$$f_c^{(1)}, f_c^{(2)}, \ldots, f_c^{(k)}\text{-ba}$$

vigye át. A megfelelő differenciáló művelet

$$\Omega_c = \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\partial c_{22}\partial c_{33}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{11}\partial c_{23}\partial c_{32}} + \\ + \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\partial c_{23}\partial c_{31}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{12}\partial c_{21}\partial c_{33}} + \\ + \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\partial c_{21}\partial c_{32}} - \frac{\partial^3}{\partial c_{13}\partial c_{22}\partial c_{31}}.$$

Az $a^q F_{(fa)}$-ból Ω_a ismételt alkalmazása után keletkező

$$\Omega_a \{a^q F_{(fa)}\}, \quad \Omega_a^2 \{a^q F_{(fa)}\}, \quad \Omega_a^3 \{a^q F_{(fa)}\}, \ldots$$

sorozatban a p-dik elem legyen az első, melyben az $a_{11}, \ldots, a_{33}$ együtthatók többé nem fordulnak elő. (Az utána következők akkor azonosan eltűnnek.)

Minthogy e szerint az

$$I_{(f)} = \Omega_a^p \{a^q F_{(fa)}\}$$

egyenletben az a determináns elemei csak látszólag fordulnak elő, azért szabad őket a (2) helyettesítés együtthatóival pótolni. Leszen

$$I_{(f)} = \Omega_b^p \{b^q F_{(fb)}\}.$$

Ha itt mindkét oldalt az eredeti alakrendszer együtthatói helyébe

$$f_a^{(1)}, f_a^{(2)}, \ldots, f_a^{(k)}$$

együtthatóit tesszük be, akkor

$$I_{(fa)} = \Omega_b^p \{b^q F_{(fc)}\},$$

s innen

$$a^q I_{(fa)} = \Omega_b^p \{c^q F_{(fc)}\}. \tag{4}$$

Ugyanis a az Ω_b műveletnél mint állandó viselkedik s azért szabad a vele való szorzásnak s az Ω_b műveletnek sorrendjét felcserélni.

A $c^q F_{(fc)}$ szorzat az

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$$

együtthatóinak, továbbá az a és b helyettesítési determinánsok elemeinek függvénye, de ez utóbbiakat csak a c_{ik} kapcsolatokban tartalmazza. Ámde e kapcsolatok bármely G függvényéről (alább) könnyen igazolható, hogy

$$\Omega_b G = a \Omega_c G, \tag{5}$$

tehát ez átalakítás p-szer való ismétlése után a (4) alatti egyenlet a következőbe megy át:

$$a^q I_{(fa)} = a^p \Omega_c^p \left\{ c^q F_{(fc)} \right\}. \tag{6}$$

Továbbá $I_{(f)}$ nem változik, ha az f_a-k helyett f_c-ket irunk s egyszersmind az Ω_a műveletet Ω_c-vel cseréljük fel. E szerint

$$I_{(f)} = \Omega_c^p \left\{ c^q F_{(fc)} \right\}$$

s a (6) alatti egyenlet egyszerűbben így irható

$$I_{(fa)} = a^{p-q} I_{(f)},$$

a mi épen annak képletben való kifejezése, hogy $I_{(f)}$ az adott alakrendszernek invariánsa.

Az (5) alatti képlet, mely imént végzett levezetésünk egyik forduló pontja, következőleg igazolható.

G-nek bármelyik b_{xk} szerinti differenciálhányadosa

$$\frac{\partial G}{\partial b_{xk}} = a_{1x} \frac{\partial G}{\partial c_{1k}} + a_{2x} \frac{\partial G}{\partial c_{2k}} + a_{3x} \frac{\partial G}{\partial c_{3k}} = \sum_{i=1}^{3} a_{ix} \frac{\partial G}{\partial c_{ik}}$$

s háromszoros differenciálás után

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_{xk} \partial b_{\lambda l} \partial b_{\mu m}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{h=1}^{3} a_{ix} a_{j\lambda} a_{h\mu} \frac{\partial^3 G}{\partial c_{ik} \partial c_{jl} \partial c_{hm}},$$

vagy szokott jelöléssel

$$\frac{\partial^3 G}{\partial b_{xk} \partial b_{\lambda l} \partial b_{\mu m}} = \left(a_{1x} \frac{\partial}{\partial c_{1k}} + a_{2x} \frac{\partial}{\partial c_{2k}} + a_{3x} \frac{\partial}{\partial c_{3k}} \right)$$

$$\left(a_{1\lambda} \frac{\partial}{\partial_{1l}} + a_{2\lambda} \frac{\partial}{\partial c_{2l}} + a_{3\lambda} \frac{\partial}{\partial c_{3l}} \right) \left(a_{1\mu} \frac{\partial}{\partial_{1m}} + a_{2\mu} \frac{\partial}{\partial c_{2m}} + a_{3\mu} \frac{\partial}{\partial c_{3m}} \right) G.$$

Itt a jobb oldalon álló szimbolikus szorzat úgy értendő, hogy a kijelölt szorzások elvégzendők, mintha $\frac{\partial}{\partial c_{1k}}$, stb. számok volnának s azután

$$\frac{\partial}{\partial c_{ik}} \frac{\partial}{\partial c_{jl}} \frac{\partial}{\partial c_{hm}} G$$

alatt a megfelelő differenciálhányados értendő.

E szimbolikus jelölés segitségével a determinánsok szorzástételének alapján az igazolandó képlet helyessége rögtön belátható. Valóban

$$\Omega_b G = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial b_{11}} & \frac{\partial}{\partial b_{12}} & \frac{\partial}{\partial b_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial b_{21}} & \frac{\partial}{\partial b_{22}} & \frac{\partial}{\partial b_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial b_{31}} & \frac{\partial}{\partial b_{32}} & \frac{\partial}{\partial b_{33}} \end{vmatrix} G =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \frac{\partial}{\partial c_{i1}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \frac{\partial}{\partial c_{i2}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \frac{\partial}{\partial c_{i3}} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i2} \frac{\partial}{\partial c_{i1}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i2} \frac{\partial}{\partial c_{i2}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i2} \frac{\partial}{\partial c_{i3}} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i3} \frac{\partial}{\partial c_{i1}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i3} \frac{\partial}{\partial c_{i2}} & \sum_{i=1}^{3} a_{i3} \frac{\partial}{\partial c_{i3}} \end{vmatrix} G =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial c_{11}} & \frac{\partial}{\partial c_{12}} & \frac{\partial}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{21}} & \frac{\partial}{\partial c_{22}} & \frac{\partial}{\partial c_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{31}} & \frac{\partial}{\partial c_{32}} & \frac{\partial}{\partial c_{33}} \end{vmatrix} G =$$

$$= a\Omega_c G,$$

m ként előbb állitottuk.

2. Alkalmazzuk a bebizonyitott tételt ama kiválóan egyszerű esetekre, mikor F az egységgel vagy egy invariánssal egyenlő.

Az első esetben

$$a^q F \equiv a^q$$

az $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$-nak $3q$-ad fokú függvénye s ennélfogva $p=q$. Ugyanis az Ω_a operáczió minden egyes alkalmazása a kifejezés

fokát 3 mal kisebbíti, ennélfogva Ω_a-t q-szor kell alkalmaznunk, hogy az $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ valamely $3q$-ad fokú függvényéből e mennyiségek épen kiessenek.

Az előbbi tétel segítségével nyert invariánsunk tehát a következő lesz

$$\Omega_a^p a^p$$

Itt a^p ily alakú tagoknak összege

$$E a_{11}^{p_{11}} a_{12}^{p_{12}} \ldots a_{33}^{p_{33}},$$

hol

$$E = \pm 1 \quad p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{33} = 3p.$$

Az Ω_a^p szimbolum ebből az összegből akként adódik, hogy benne

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$$

helyébe

$$\frac{\partial}{\partial a_{11}}, \frac{\partial}{\partial a_{12}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial a_{33}}$$

differencziálási jeleket irjuk.

$\Omega_a^p a^p$ most már úgy képezendő, hogy a^p minden egyes tagjára elvégezzük az Ω_a^p egyes tagjai által előírt differencziálásokat s az igy nyert részleteredményeket összeadjuk. Minden egyes összeadandó $+1$ vagy 0 lesz.

Ha ugyanis Ω_a^p valamely tagját az a^p-nek épen ama tagjára alkalmazzuk, melyből az imént mondott módon keletkezett, akkor a differencziálás eredménye a positiv egység; minden más esetben pedig zérust kapunk. E szerint

$$\Omega_a^p a^p$$

bizonyos N_p positiv egész számmal egyenlő.

Abban az esetben, mikor F az alakrendszernek valamely $I(f)$ invariánsával egyenlő, a transzformált rendszer együtthatóinak $I(f_a)$ függvénye $I(f)$-től csak egy oly tényezőben különbözik, mely a-nak valamely hatványa. Ennélfogva $a_q I(f_a)$ ily alakú

$$a^p I(f),$$

és

$$\Omega_a^p \{a^p I(f)\} = I(f)\, \Omega_p a^p = N_p I(f).$$

Ekkor tehát a nyert invariáns csak egy pozitiv állandó tényezőben különbözik attól, melyből nyertük.

E megjegyzésekből könnyen belátható, hogy az invariánsok képezésére adott eljárás már abban az esetben is, ha q-t állandóan *zérus*-nak veszszük, az adott alakrendszer összes invariánsait adja meg, azaz *bármely $I(f)$ invariánshoz tartozik oly $F(f)$ függvény, hogy*

$$\Omega_a^p F(f)$$

épen az illető $I(f)$-et adja.

Ha ugyanis az $I(f)$ invariánsnak *indexe* p, akkor

$$\Omega_a^p \left\{ \frac{1}{N_p} I(f_a) \right\} = \Omega_a^p \left\{ \frac{a^p}{N_p} I(f) \right\} = I(f),$$

tehát

$$F(f) = \frac{1}{N_p} I(f)$$

a céljainknak megfelelő függvény.

Kürschák József.

MEGJEGYZÉS DIRICHLET EGYIK TÉTELÉHEZ.

Dirichlet-nek szóban forgó tétele a következő:

Minden számtani haladvány, melynek kezdőtagja és különbsége relativ törzsszámok, végtelen sok törzsszámot tartalmaz.

A tételt legelőször Legendre mondotta ki s ugyancsak ő kijelölt olyan módszereket is, a melyek a tétel bebizonyítására a legelső útmutatást adták. Legendre maga, noha a tétel teljes bebizonyítása még hiányzott, már felhasználta számos más vizsgálatában, a mit Gauss azután a szigorúság szempontjából jogosan kifogásolt is.* A Legendre-tól kijelölt úton Dirichlet kisérlette meg a tovább haladást.

Ez úton azonban, saját kijelentése szerint, legyőzhetetlen nehézségekre bukkant és csak miután ezt az utat végkép elhagyta, sikerült neki a tételnek kifogásolhatatlan bebizonyítását adni.**

Dirichlet bebizonyítása azonban az analizis legösszetettebb segédeszközeit használja fel s igy természetes az arithmetikának az a törekvése, hogy a bebizonyítást tisztán arithmetikai alapokra fektesse, annyival is inkább, mert a legspeciálisabb esetnek, a $2x+1$ általános taggal biró haladvány esetének, ilyen tárgyalását már Euklides ismerte. Egyes más specziális esetek arithmetikai tárgyalása sem nyújt nagyobb nehézségeket s csak a számelmélet első elemeinek felhasználását igényli.*** Az első azonban, a ki

---

* Disquisitiones arithmeticæ auctore Gauss. Art. 151, 297.

** Abhandlungen der Kg. Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1837 S. 45—81. Bericht über die Verhandlungen der Kg. Preussischen Akademie Jahrg. 1837 S. 108—110.

*** Ilyen példákat dolgoztunk a kir. Józsefműegyetemen König tanár úr által vezetett math. gyakorlatokon. (1892/3).

nagyobb általánosság jellegével biró speciális esetet arithmetikailag tárgyalt, Lucas volt. Lucas ugyanis a következő tételt mutatta ki:

*Ha a tetszőleges pozitiv egész számot jelent, az $ax+1$ általános taggal biró számtani haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmaz.**

Lucas bizonyítása azonban, a tárgy egyszerűségéhez képest, nem a legrövidebb. Később Perott ugyanezt a tételt mutatta ki azzal a megszorítással, hogy a törzsszámhatvány legyen. Perott tárgyalása a körosztási egyenlet többtagújából indul ki. Dolgozatából** világosan kitetszik, hogy ő Lucas eredményéről tudomással nem bírt. Ugyancsak kikerülte az ő figyelmét az a körülmény, hogy abból az alakból kiindulva, melyet ő használt, a Lucas-féle eredményt is le lehet vezetni; pedig, a mint az alábbiakból ki fog tünni ez a legegyszerübb eljárás.

A jelen dolgozatban foglalt tárgyalás azt az eddig még fel nem használt szempontot érvényesiti, hogy a *végtelen számban levő törzsszám létezésének kimutatását visszavezeti egy egyetlen törzsszám létezésének kimutatására.* A részletes tárgyalás a következő két tétel alapján történik.

1. *Tétel. Az $ax+1$ kifejezésben a akármilyen egész számú értékénél x mint pozitiv egész szám meghatározható úgy, hogy $ax+1$ törzsszám legyen.*

Legyenek

$$p_1, p_2, \ldots, p_r$$

egymástól különböző, de tetszőleges törzsszámok (a 2 sincs kizárva) és legyen továbbá

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r};$$

ha továbbá

$$g_1(x),\ g_2(x), \ldots$$

---

* Lucas: Théorie des fonctions numériques simplement périodiques (American Journal of Mathematics Vol. I. 1878).

** Perott: Remarques sur le théorème d'Euclide etc. (American Journal of Mathematics Vol. XIII. 1891).

raczionális egész függvények, melyeknek együtthatói egész számok és x legmagasabb hatványának együtthatói 1-gyel egyenlők és e függvényeknek ama legkisebb közös többszörösét, melyben az x legmagasabb hatványának együtthatója szintén 1-gyel egyenlő, az

$$M[g_1(x),\ g_2(x), \ldots]$$

jellel jelöljük, azon felül az

$$a_k = \frac{a}{p^k} \qquad (k=1, 2, \ldots, r)$$

rövidített jelöléssel élünk, akkor tudjuk, hogy az

$$F(y) = \frac{y^a - 1}{M[(y^{a_1}-1), \ldots, (y^{a_r}-1)]}$$

függvény y egész függvénye egész számú együtthatókkal, és benne y legmagasabb hatványának együtthatója pedig az egység.

Ha n határozatlan egész számot jelent, akkor ez úgy választható, hogy az

$$F(n) = \frac{n^a - 1}{M[(n^{a_1}-1), \ldots, (n^{a_r}-1)]} \tag{I}$$

$$F_1(n) = \prod_{k=1}^{r}(n^{a_k}-1)$$

számok relativ törzsszámok legyenek. Először is az

$$\frac{n^a-1}{n^{a_k}-1},\ n^{a_k}-1 \qquad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{I*}$$

számok relativ törzsszámok, ha az

$$n^{a_k} \equiv 1 \pmod{p_k} \qquad (k=1, 2, \ldots, r) \tag{II}$$

kongruenczia nincsen kielégítve. Ugyanis

$$\frac{n^a-1}{n^{a_k}-1} = \frac{(n^{a_k})^{p_k}-1}{n^{a_k}-1} = (n^{a_k}-1)(n^{a_k(p_k-1)} + 2n^{a_k(p_k-2)} + \ldots + (p_k-1)) + p_k$$

és így az (I*) alatti számok minden közös osztója egyszersmind közös osztója $n^{a_k}-1$-nek és p_k-nak; minthogy azonban p_k törzsszám, e legnagyobb közös osztó vagy 1 vagy p_k és így a szóban forgó számok csakugyan relativ törzsszámok, ha az

$$n^{a_k}-1 \equiv 0 \pmod{p_k}$$

kongruenczia nincsen kielégítve. Ha már most n értékét úgy választjuk, hogy pl.

$$n \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \ldots p_r}$$

legyen, akkor a (II) alatti kongruenczia k-nak egyetlen egy értékénél sincsen kielégítve, és így az (I*) alatti számok relativ törzsszámok k minden értékénél.

Mivel $F(n)$ osztója $\frac{n^a-1}{n^{a_k}-1}$-nek, következik, hogy az

$$F(n) \text{ és } n^{a_k}-1 \quad (k=1,2,\ldots,r)$$

számok relativ törzsszámok és így relativ törzsszámok az

$$F(n) \text{ és } F_1(n) = \prod_{k=1}^{r} n^{a_k}-1$$

számok is; de ezt akartuk épen bebizonyitani.

Legyen most $F(n)$-nek egyik pozitiv törzstényezője q, akkor

$$n^a \equiv 1 \pmod{q}, \tag{III}$$

mert n^a-1 többszöröse $F(n)$-nek; minthogy azonban $F(n)$ és $F_1(n)$ relativ törzsszámok, az

$$n^{a_k} \equiv 1 \pmod{q} \quad (k=1,2,\ldots,r) \tag{III*}$$

kongruenczák egyike sincsen kielégitve. Innen következik, hogy $n \pmod{q}$ az a kitevőhöz tartozik. Ugyanis, ha a-nál kisebb kitevőhöz tartoznék, akkor ez, miuthogy a-nak osztója, az

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

számok valamelyikének is osztója lenne, a mi a (III*) alatti kongruenciák legalább egyikének kielégítését vonná maga után.

Minthogy $n \pmod{q}$ az a kitevőhöz tartozik

$$q-1 \equiv 0 \pmod{a} \qquad \text{(IV)}$$

Tehát tényleg találtunk egy $ax+1$ alakú törzsszámot, mert a (IV)-ből

$$q = ax+1$$

2. *Tétel. Az $ax+1$ általános taggal bíró számtani haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmaz, bármily pozitiv egész szám is a.*

Tegyük fel ugyanis, hogy a haladvány csak véges számú törzsszámot tartalmazna és legyen ezek között a legnagyobb Q, akkor van oly k egész szám, mely kielégíti az

$$a^k > Q$$

feltételt. Ha most az

$$a(a^k x)+1 = a^{k+1}x+1$$

általános taggal bíró számtani haladványt alkotjuk, akkor ez egyetlen egy törzsszámot sem tartalmazhat, mert különben kellene, hogy az eredeti haladvány Q-nál nagyobb törzsszámot tartalmazzon, tehát nem létezhetnék $a^{k+1}x+1$ alakú törzsszám. Ez azonban az előző tétellel ellenkezik s így kell, hogy a szóban forgó haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmazzon.

Fentartom magamnak, hogy a DIRICHLET-féle tétel más speciális eseteire alkalmilag még visszatérjek.

Bauer Mihály.

PHYSIKAI SZEMLE.

A kritikus pont meghatározásáról. Pellat, De la définition et de la détermination du point critique. *Journ. de Physique.* III-e Sér. T. 225. l.

Általánosan ismeretesek Andrews kisérletei, melyekben a széndioxyd térfogata és nyomása között állandó hőmérsékletek alatt fenálló kapcsolatot megállapította, s ismeretesek a görbék, melyekkel — Clapeyron eljárása szerint — vizsgálatainak eredményeit igen szemléltetőleg előállította. Görbéi a mellékelt rajzban láthatók. A 31° alatt levő hőmérsékletekhez tartozó isothermák mindegyikének a térfogatok tengelyével párhuzamos AB egyenes része van, mely a gáz folyósodását tünteti elő. Az A, A' A'',... pontok annak az állapotnak felelnek meg, a melyben az egész szénsav-tömeg telített gőzalakban van. Az egyes pontokhoz tartozó abscissák (pl. Oa), minthogy a rajz az anyag tömegegységére vonatkozik, a telített gőz fajlagos térfogatát jelenti, melyet u jelöljön. A $B, B', B'', \ldots$ pontok annak az állapotnak felelnek meg, melyben az egész tömeg a telített gőz nyomása alatt folyós halmazállapotu s abscissája: Ob, a folyadék u' fajlagos térfogatát adja. Az egyenesen fölvett bármely M pont azt az állapotot fejezi ki, melyben a tömegnek x része telített gőzalakú, x' része pedig folyós ($x+x'=1$); könnyű kimutatni, hogy

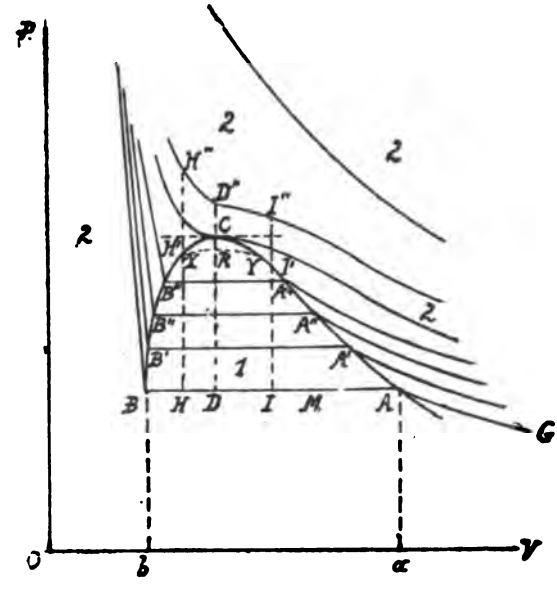
$$\frac{x}{x'} = \frac{MB}{MA}.$$

A hőmérséklet emelkedtével az isotherma egyenes része megrövidül, a mennyiben a folyadék u' fajlagos térfogata nagyobbodik, a telített gőz u fajl. térfogata pedig kisebbedik. 31°-nál valamivel magasabb hőfokra nézve az egyenes AB rész elenyészik; vagyis az izothermának C-ben inflexiós pontja van, melynek érintője a végtelen kicsinynyé vált AB-vel párhuzamos, tehát vízszintes. Ezen a hőfokon túl a görbék inflexiója kevésbbé szembeszökő s mindinkább elmosódik, míg végre a magasabb hőmérsékletek alatt teljesen eltünik.

Az összes A pontokat és B pontokat folytonos vonallal összekötvén, ezek C pontban találkoznak, mely az A és B pontok határa: a két vonal ebben a pontban egyetlenegy folytonos vonallá folyik össze, melynek C-ben

vízszintes az érintője. Látni való, hogy ez a vonal a síkot két részre osztja. Az egyikben (1) a cseppfolyós és gázállapot egyidejűleg fenállhat; a másikban (222) csakis folyékony állapot létezhetik egymagában és a hol a tökéletes gázállapot és tökéletes folyékony állapot között minden közbenső állapot is található.

Több fizikusnak, különösen pedig Ramsay-nak munkálatai kiderítették, hogy más gázokra nézve az isothermák menete ugyanaz, mint a széndioxid esetében és kétségtelen, hogy valamennyi folyadékra nézve ez az általános alak.



Szükséges volt ezen jól ismert dolgokat fölemlíteni, hogy a következők világosak legyenek.

Az isotherma C pontját, mely a vízszintes érintőre nézve inflexiós pont, *kritikus pontnak* nevezték el; a test megfelelő hőmérséklete, nyomása és térfogata a *kritikus hőmérséklet* (T_c), *kritikus nyomás* (P_c) és *kritikus térfogat* (V_c) nevét viselik.

A kritikus hőmérsékletről más meghatározás is létezik; az, mely Cagniard-Latour klasszikus kisérleteiből következik. T. i. több szerző kritikus hőmérsékletnek azt a hőmérsékletet (t_c) nevezi, a melyen eltünik a folyadékot és gőzét szétválasztó határfelület; sokáig ugyanis azt hitték, hogy $T_c = t_c$.

Cailletet és Colardeau igen érdekes kisérletei alapján ki lehet mutatni, hogy e két hőmérséklet nem egyenlő és hogy $t_c < T_c$. E szerzők tényleg azt találták, hogy a t_c hőmérsékleten, a melyen eltünik a meniscus, *a folyadék sürüsége nagyobb, mint a telitett gőz* sürüsége. Ámde a T_c meghatározása szerint ezen hőmérsékleten a folyadék és a gáz sürüsége egyenlő, mert a kritikus C pontnál az AB vonal, mely a folyadék és a telített gőz fajlagos térfogatainak (u—u') különbségét jelenti, zérussá lett.

Hátra van még annak eldöntése, vajjon a T_c és t_c hőmérsékek szomszédosak-e vagy távol esnek-e egymástól? A következő fejtegetés talán hozzájárul e kérdés eldöntéséhez.

Ha Cagniard-Latour kisérletét akarjuk ismételni s az elzárt csőbe igen kevés folyadékot teszünk, — tehát gőzéből sokat —, a rendszer ábrázoló pontja hidegben meg fog felelni az isotherma valamely I pontjának, mely közelebb van A-hoz mint B-hez.

A cső melegítése közben a rendszerben végbemenő változást valamely $II'I''$ egyenes vonal fogja jelképezni, mely a nyomások tengelyével párhuzamos, ha az üvegcső kitágulása elhanyagolható. Látható, hogy az $II'I''$ vonal a különböző isothermák egyenes vonalú részeit oly pontokban metszi, hogy az $\frac{MA}{MB}$-hez hasonló viszonyszámok folyton kisebbednek, míg a viszony az I' pontra nézve, melyben $II'I''$ az ACB vonalt metszi, zérussá lesz. Ez azt jelenti, hogy a folyadék mennyisége a hőmérséklet emelkedtével folyton kisebbedő, a míg az I pontnál zérussá lesz. Ez csakugyan az, a mit tényleg észlelni lehet. *(1. eset.)*

Ellenkezőleg, ha kezdetben a folyadék mennyisége sokkal felülmulja a gőzét, úgy, hogy az ábrázoló pont az AB isotherma H pontjába esik, állandó térfogat melletti hevítés esetében a $HH'H''$ egyenes vonal azt mutatja, hogy a folyadék mennyisége állandóan növekedőben van, mig végre a csövet egészen betölti, a mi akkor fog bekövetkezni, a mikor az ábrázoló pont az egyenes vonal és az ACB görbe H' metszési pontjába esik. *(2. eset.)*

Ha végre a csőbe épen oly arányban zárunk el folyadékot és gőzt, hogy az ábrázoló pont az AB isotherma azon D pontjába essék, melynek a kritikus ponttal, C-vel egyező abscissája van, az állandó térfogat melletti hevítést a DCD'' egyenes jelképezi; a folyadék és gőzének viszonya keveset fog változni és abban a pillanatban, midőn az ábrázoló pont eléri C-t, a cseppfolyós állapot egybeesik a gáznemüvel. *(3. eset.)*

Láthatni azonban, hogy a szerint, a mint az ábrázoló pont egy kissé jobbra vagy balra esik a D ponttól, az első vagy második esettel van dolgunk s vagy a folyadék tünik el egészen, vagy a gőz, de még mielőtt a kritikus hőmérséket elérték volna.

Már most a kisérlet azt igazolja, hogy a folyadék és gőz kezdetbeli viszonyát elég tág határok között lehet változtatni, és hogy a meniscus eltünése mindamellett bizonyos határozott t_c hőmérsék mellett következik be, mielőtt az állandó hevítést feltüntető egyenes vonal az ACB görbét metszi. Ebből azt kell következtetni, hogy az XRY vonal, mely azon állapotoknak felel meg, midőn a meniscus eltünik, az ACB görbe felső XCY része alatt van és hogy ezen görbét két, egymástól jelentékenyen távol eső X és Y pontban metszi. Igy tehát az Andrews-féle isothermák figyelmes szemlélése alapján előre látható azon eredmény, melyet Cailletet és Colardeau fönnebb említett kisérletei igazoltak, hogy t. i. a folyadék és az ő gőze megtartja egymástól eltérő sürüségét még azon hőmérsékleten túl is, a melyen a meniscus eltünik.

Ha az épen most tárgyalt XRY vonal vízszintes egyenes, teljesen meghatározott p_c nyomásnak és t_c hőmérsékletnek felel meg; ez az, a mit rendesen föltételeznek, de oly kisérleti adatok alapján, melyek talán nem egészen kielégítők. Ha az XRY vonal görbe, látható, hogy a p_c nyomás és a t_c hőmérséklet, melyek mellett a meniscus eltünik, a folyadék és a gőz kezdetleges viszonyától függ. E kérdést csak összehasonlító kisérletekkel lehetne megoldani, melyeket különböző csövekkel eszközölnének olyformán, hogy a folyadék és gőz különböző viszonyai mellett ugyanazon fürdő használtatnék a hevítésre.

Az állandó térfogat melletti hevítést föltüntető $II'I''$, DCD', $HH'H''$ vonalak szemlélése még a következő megjegyzésre vezet. Bármelyik legyen is a szemügyre vett vonal, azaz bármilyen is a folyadék és a gőz kezdetleges viszonya, míg a hőfok alacsonyabb annál, a melyen az ábrázoló pont a sík 1-el jelzett részéből kilép (I', C, v. H' pontok), ugyanazon hőmérséknél a nyomás is ugyanaz marad s ez nem egyéb, mint a telitett gőz nyomása. Midőn azonban ezen vonalak a 2, 2, 2-vel jelzett térbe behatolnak, ugyanazon isothermát I'', D'', H'' pontokban metszik, melyeknek nincs ugyanazon ordinátájuk, vagyis az ugyanazon hőmérsékletnek megfelelő nyomások már különbözőkké lesznek. Tehát az I', C, vagy H' pontokban, melyekben az egyenlő térfogatot jelző vonalak metszik az ACB görbét, a nyomás megszünik a hőmérséklet oly függvényének lenni, mely független a folyadék és gőzének eredeti viszonyától.

Ez csakugyan azon eredmény, melyet Cailletet és Colardeau a víz kritikus pontjának meghatározását czélzó, jelentőségteljes kisérleteikkel elértek. A vonalak, melyek a nyomást a folyadék és gőz különböző viszonyai mellett mint a hőmérsék függvényét tüntetik fel, eleinte összeesnek, majd egyenként széjjelválnak a közös nyalábtól, részint fölfelé (H' pont), részint lefelé (I' pont).

De a mi ezen kisérletezőknek a kritikus pont megtalálására alkalmazott

módszerét igazolja, ez azon körülmény, hogy az utóbbi görbék, melyek a közös nyalábtól szétválnak, ezt majdnem egy pontban teszik, mivel az *ACB* görbe ordinátái a *C* pontban maximumot érnek el; ez azon legmesszebb pont, melyet jogosan kritikus pontnak tekintettek.

Ha az *ACB* görbe felső része elég lapos és ha az *XRY* vonal vízszintes egyenes, vagy legalább majdnem közel az, megtörténhetik, hogy ezen vonal mindenütt szomszédos az *XCY* vonallal és következőleg t_c csak keveset tér el T_c-től, a mint azt általánosan föltételezik; ez azonban nem bizonyos és erre a kérdésre a kisérletnek kell majd megfelelnie. Cagniard-Latour kisérlete t_c-re vezet, ellenben a Cailletet és Colardeau által a víz kritikus pontjának meghatározására alkalmazott módszer T_c-re.

Mint láttuk, Cailletet és Colardeau kisérleti elrendezése az *ACB* görbe különböző pontjainak meghatározását engedi meg; az övékhez hasonló kisérletek ilyformán meg fogják ismertetni ezen görbét, melynek tetőpontján vízszintes érintőt húzván, meg fogják kapni a kritikus pontot.

Ez eljárásnak meg lesz azon előnye, hogy hozzá fog járulni a *megfigyelések kritikus pontjának* meghatározásához, midőn a cső megtelik gőzzel vagy folyadékkal, még oly hőmérséknél is, mely elég távol van a kritikus ponttól. Egyébiránt az *ACB* görbe magában véve is igen érdekes.

Mindezekből következik, hogy a t_c és T_c hőmérsékek számára lehetetlen ugyanazon nevet megtartani; mert a mint láttuk, a tudomány jelenlegi állásánál nem vagyunk biztosak abban, hogy t_c ugyanegy testre nézve ugyanegy hőmérséklet-e; azonkívül ezen hőmérséklet csak a meniscus eltünésének jelenségére bír fontossággal, mely a meghatározást adja. A «kritikus hőmérséklet» elnevezést fönn is kell tartani a T_c hőmérsékletre, mely teljesen meghatározott és általános érdekü.

A kritikus pont adatai tényleg lehetővé teszik Van der Waals vagy Clausius jellemző egyenletében az állandók meghatározását, következőleg meghatározott hőmérsékletre alkalmazva, megengedik Massieu jellemző függvényének alakítását, melyből aztán a tárgyalt folyadék összes mechanikai és hőtani sajátságai megállapíthatók.

Az egyedüli módszerek, melyek eddig szabatosan vezettek az igazi kritikus pontra, 1. az Andrews módszere; 2. az a módszer, melyet legújabban Cailletet és Colardeau alkalmaztak a víz esetében; 3. a folyadék és telített gőz térfogatának közvetlen mérése ugyanazon hőmérsékleten, melyet a kritikus pont közeléig fokoznak; ezt a módszert több fizikus alkalmazta, különösen Cailletet és Mathias, továbbá Amagat.

Daczára a szép dolgozatoknak, melyeket most fölemlítettünk, kisérleti szempontból még a sok tenni való ezen a téren.

Csemez.

*

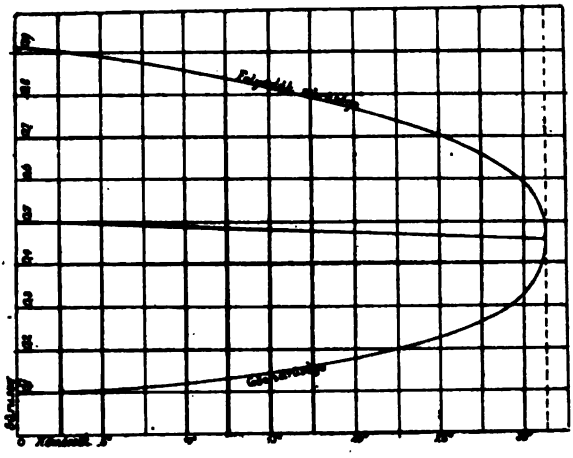
Folyadékok és telített gőzök sűrűségéről. E. H. Amagat: Sur la détermination de la densité des gaz liquéfiés et de leurs vapeurs saturées. *Journ. de Physique*, 1892. Sér. III. 1. köt. 288—298. l. — E. Mathias. Sur la densité critique et le théorème des états correspondants. *Journ. de Physique*, 1893. Sér. III. 2. köt. 1—22. l.

Amagat a gázok folyósítására vonatkozó vizsgálataiban az elzárt térben hevített folyadék és telített gőzének sűrűségére vonatkozólag néhány igen érdekes eredményre jutott. Ha ugyanis a hőmérsékletet mint abscissát, a hozzátartozó folyadék- és gőzsűrűséget pedig mint ordinatát rakjuk fel, akkor nyilván oly görbét nyerünk, melyet az ordináta tengelylyel párhuzamos egyenes két pontban metsz. A nagyobbodó abscissák felé a görbének két ága egymáshoz közeledik, mert hisz a hőmérséklet növekedtével a folyadék sűrűsége kisebbedik, a gőzé pedig nagyobbodik; végre a kritikus hőmérsékletnek megfelelő pontban egymással találkoznak: ott ugyanis a folyadék sűrűsége a gőz sűrűségével egyenlő. A szénsavra végzett kisérletekből kitűnt, hogy eme görbe igen nagy közelítéssel parabola: a parabola csúcspontja megfelel a kritikus hőmérsékletnek; ott tehát a folyadék és a gőz sűrűsége a hőmérséklettel gyorsan változik. Ugyane pontban a görbe görbülete a kelleténél valamivel kisebb. Az említett görbe parabolikus természetéből következik, hogy ha az egyes hőmérsékletekhez a hozzátartozó folyadék- és gőz-sűrűségek középértékeit felrakjuk, egyenes vonalat nyerünk, mely nem egyéb mint a parabola tengelye. Tehát ha d a folyadék sűrűsége, d' pedig a telített gőzé, ekkor $\frac{d+d'}{2}$ a hőmérséklettel pontosan arányosan változik. A kisérletekből kitűnt (l. az ábrát), hogy ezen egyenes hajlása az abscissa tengelyhez igen kicsiny, tehát a két sűrűség középértéke a hőmérséklettel keveset változik. Amagat csak széndioxiddal kisérletezett, 0° és 31° között. Mathias azután megvizsgálta, valjon eme törvény más anyagokra nézve is érvényben marad-e, s hogy nagy hőmérsékleti közökre is szigorú-e, avagy csak közelítő jelleggel bír. E czélra Young Sydney észleléseit használta fel s úgy járt el, hogy $\frac{d+d'}{2}$ két hőmérsékletnél észlelt értékéből meghatározta az előbb említett egyenest; a többi hőmérsékletre azután összehasonlította $\frac{d+d'}{2}$-nek az egyenesből folyó értékeit a közvetlen észlelés szolgáltatta értékekkel. Számításait a következő anyagokra végezte: benzol, fluórbenzol, eczetsav, ónchlorid, széntetrachlorid és etilalkohol.

2 perczentnél nagyobb eltérés a két érték között csak az alkoholoknál mutatkozott a kritikustól 180°-nál meszebbre fekvő hőmérsékleteknél. A többi anyagra az eltérés legfeljebb $^1/_{100}$, úgy hogy a megegyezés teljesnek nevezhető.

Nem kevésbbé érdekes azon módszer, melyet Amagat a folyadék és telített gőz sűrűségének meghatározására alkalmazott. Ugyanis ha m az elzárt folyadék és telített gőzének együttes tömege, v, d és v', d' pedig a folyadék ill. a telített gőz térfogata, ill. sűrűsége, akkor

$$vd+v'd'=m\,;$$



ha most az egészet ugyanazon hőmérsékletnél kisebb térfogatra szorítja, akkor a gőz egy része lecsapódik, tehát a gőz térfogata $\Delta v'$-tel kisebbedik, ugyanakkor több folyadék lesz az elzárt térben, a folyadék térfogata tehát Δv-vel nagyobbodik; nyilván való, hogy

$$d\Delta v=d'\Delta v'.$$

Ezen két egyenletből d és d' kiszámítható.

Tangl.

IRODALOM.

Oliver Heavisido, Electrical papers. In two volumes I. 560 pag. II. 587 pag. London. Macmillan 1892.

A szerző ezen két kötetben azokat az értekezéseket gyűjtötte össze, melyeket 1872 óta a «Philosophical Magazine», az «Electrician», «English Mechanic», «Telegraphic journal» és egyéb szakfolyóiratban és a «Philosophical Transactions»-ben közzétett. A mint művének előszavában mondja, az elektromagnetikai elméletnek rendszeres műben való kidolgozására szólíttatott fel. Ő azonban czélszerűbbnek találta, ha e helyett az egyes kérdésekről írt értekezéseit összegyűjtve kiadja. Serkentették ez elhatározásában Hughes 1886-ban és Hertz és Lodge 1887-ben tett kisérletei; különösen Hertz-nek nevezetes eredményei az elektromos erő sugarairól és az elektromagnetikai hullámokról. Mindezek az értekezések és vizsgálatok megerősítik azt az alapot, melyen Heaviside dolgozatai állanak, ú. m. a Faraday-Maxwell-féle felfogást. A szerző panaszképen említi, hogy ezt a felfogást, noha az elektromos háborgásoknak mérhető idő alatt és közegen keresztül történő terjedését épen a Hertz-féle kisérletek az igen valószinű hypothesisek sorából a megállapított tények közé emelték, még hazájában sem méltatják a kellő figyelemre. A continensen pedig, hol a régi felfogások még túlságosan erősek, az új eszmék és fogalmak mai napig sem bírtak gyökeret verni.

Midőn az energia megmaradása elvét megállapították, az elektromosság és mágnesség tekintetében nem állítottak fel mechanikai hypothesist, hanem megelégedtek azzal, hogy a távolbahatás alapján megállapított, az elektromosság és mágnesség fluidumelméletén alapuló vonatkozások ezen principiummal ellentétben ne legyenek. Sőt midőn egyes esetben, mint ez a Weber-féle törvényt illetőleg előfordult, ellenmondást gyanítottak ama általános természettörvénynyel, csakis az illető törvényt helytelennek nyilvánították, annak kiindulását alkotó alapját pedig nem bolygatták.

Az inductio jelenségeinek tüzetesebb tanulmányozása és különösen a már említett Hertz-féle vizsgálatok, melyeket az egész tudományos világban, a merre physikusok vannak, ismételtek és bővebben tanulmányoztak, mindinkább megmutatják, hogy az egész elektromosságtan épülete, me-

lyen több mint száz éven keresztül folyton csak foltozgattak, végre alapos átépítést igényel.

Faraday nem bírta az ő felfedezéseinek megfelelő elméletet megteremteni, Maxwell a Faraday-féle eszméket formulázta ugyan, de neki sem sikerült eltalálni azt az alakot, melyben a régi, még mindig uralkodó eszmékkel sikeresen síkra szállhatott volna. Mindjárt megmondhatjuk, hogy meggyőződésünk szerint az előttünk fekvő két kötet értekezés sem fog ez irányban lényeges változást létrehozni. Ennek oka részben a szerzőtől használt Hamilton-féle scalar- és vectorszorzatok alkalmazása, noha bevallja, hogy a Hamilton-féle quaterniokat ő maga sem tartja arra alkalmasaknak, hogy az elméleti physikában általánosan használtassanak.

Ebből azonban szerinte korántsem következik, hogy a vectoralgebrát nem lehetne czélszerűen használni, sőt ennek tulajdonképen nincs is semmi köze a quaterniokhoz, mely utóbbiak használata annyi nehézséggel jár, hogy ezek legyőzésére csak kevesen vállalkoznak.

A következőkben a két kötet tartalmát röviden jelezzük. Az első tizenhét értekezés technikai kérdésekre vonatkozik, különösen a duplex-telegraphiára és egyéb a telegraphiára vonatkozó dolgokra. Azután következik nehány értekezés, mely a mágnes-elektromos áram generatoraival, párhuzamos drótok inductiójával, az elektromosság terjedésével drótokban, az áram energiájával stb.-vel foglalkozik. A könyvnek jó részét az elektromágnesi inductiórói és terjedéséről írt terjedelmes értekezés foglalja el, melynek első része az első kötetben található. Czíme: «Electromagnetic induction and its propagation.» Az egész értekezés, melyet szerzője 1882 és 1887 között a «The Electrician» czímű folyóiratban közzétett egy általános elektromos elméletet foglal magában. Kezdődik az elektromos mennyiségek kapcsolatával, melyek a Maxwell-féle elektromagnetikai schema szerint a következők: Conductivity, azaz vezető képesség, elektrostatikai kapacitás és mágneses permeabilitás. A testben elektromos áram, elektromosság elhelyezése és mágnesi inductio forduljon elő, melyre nézve a következő három egyenletet kapja: $C=kE$ (Ohm-féle törvény), hol E az áramsűrűség, E az elektromotorikus erő és k a fajlagos vezetőképesség. Az «electric displacement» $D=\frac{cE}{4\pi}$, hol c a capacitást jelenti. A magnetikai inductio $B=\mu H$, hol μ a permeabilitás és H a mágnesi erő, csakhogy μ oly mennyiség, mely a hőmérséktől és a vas moleculáris szerkezetétől nagy mértékben függ.

E szerint tehát az elektrikus energia $U=\frac{cE^2}{8\pi}$, a mágneses energia pedig $T=\frac{\mu H^2}{8\pi}$. A használt mathematikai apparatus a vectoralgebra elemi formájában.

A második kötet tartalma a következő: Az elektromágnesi hullámfelületről, a nomenclaturára vonatkozó megjegyzések, az öninductióról drótokban, a WHEASTONE féle hínak inductiómérleg gyanánt való használatáról. Ez után következik az electromágnesi inductióról és terjedéséről szóló második rész. A kötet végén a telefon elméletéről és a hysteresisről, földfeletti drótokban a capacitásról van szó stb.

A szerző az elektromos és mágneses egységek dolgában változást javasol, minthogy a most használtakban, daczára annak, hogy a körrel vagy gömbbel semmi közük sincsen, mégis definitiójukban 4π mint tényező előfordul. HEAVISIDE oly «rationális» egységrendszert javasol, melyben p. o. az egységnyi mágnessarkból jelenleg számított 4π erővonal helyett csak egy indul ki. E szerint két sark (m, m_1) egymásra való hatása r távolságban a mostani $\frac{mm_1}{r^2}$ helyett volna $\frac{mm_1}{4\pi r^2}$. Ekként volna az *új ohm* $= 4\pi$ *régi ohm*, az *új ampère* $= \frac{\text{régi ampère}}{\sqrt{4\pi}}$, az *új volt* $= \sqrt{4\pi}$ *régi volt* s így tovább.

HEAVISIDE műve mindenesetre érdekes olvasmány, melyről kívánni lehet, hogy a szaktársak figyelemre méltassák, noha irásmodora, a használt mathematikai apparatus és a szerzőnek sok tekintetben a szokottól elütő gondolatmenete, az olvasást tetemesen nehezítik.

Heller Ágost.

MEGOLDOTT FELADATOK.

21. *Legyen*

$$F(u, v) = 0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyíttassék be, hogy az (u, v) *érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:*

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}} =$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(Kürschák).

*

Első megoldás Rados Ignácz főreáliskolai tanár úrtól Budapesten

Az (u, v) érintőnek érintéspontja mint annak a pontnak határfekvése fogható fel, melyben az

$$\begin{aligned} ux + \quad & vy + 1 = 0 \\ (u+\Delta u)\,x + (v+\Delta v)\,y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

egyenleteknek megfeleló egyenesek egymást metszik, ha

$$\lim \Delta u = 0.$$

E két egyenes metszéspontjának koordinátái a következők:

$$x = -\frac{\Delta v}{u\Delta v - v\Delta u},\quad y = \frac{\Delta u}{u\Delta v - v\Delta u},$$

mely kifejezések még így is írhatók:

$$x = -\frac{\left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)}{u\frac{\Delta v}{\Delta u} - v} \qquad y = \frac{1}{u\frac{\Delta v}{\Delta u} - v}.$$

Minthogy

$$\lim_{\Delta u = 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right) = \frac{dv}{du},$$

mint az (u, v) érintőnek megfelelő érintéspont koordinátáit a következőket nyerjük:

$$x = -\frac{\frac{dv}{du}}{u\frac{dv}{du} - v}, \quad y = \frac{1}{u\frac{dv}{du} - v} \qquad (A)$$

Ezzel a kitűzött feladat megoldását transzformációra vezettük visszsza, mert most már csak a $\frac{dy}{dx}$ és $\frac{d^2y}{dx^2}$ differenciálhányadosokat a v-nek u szerint vett differenciálhányadosai segítségével kell kifejeznünk és a nyert eredményeket a

$$G = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (B)$$

képletbe behelyettesítenünk.

E transzformációnak kivitelére kiindulópontul szolgálhat a

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{du}$$

képlet, a melyből $\frac{dy}{dx}$-et meghatározván, lesz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}. \qquad (C)$$

Ha már most az (A) képletekből $\frac{dy}{du}$-t és $\frac{dx}{du}$-t meghatározzuk, ezeket nyerjük:

$$\frac{dx}{du} = \frac{v\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^2}, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{u\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du} - 1\right)^2}, \qquad (D)$$

Így tehát a (C) képlet szerint lesz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}. \qquad (E)$$

Megjegyezzük, hogy erre az eredményre minden számítás mellőzésével az a meggondolás is vezet, hogy $\frac{dy}{dx}$ az

$$ux + vy + 1 = 0$$

érintőnek irányténvezője.

Hogy a $\frac{d^2y}{dx^2}$-et is meghatározhassuk az utoljára nyert eredményt differenciáljuk u szerint, akkor nyerjük, hogy

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{du} = \frac{u\frac{dv}{du} - v}{v^2}.$$

Ha most ebbe $\frac{dx}{du}$ értékét (D)-ből helyettesítjük és $\frac{d^2y}{dx^2}$-et kiszámítjuk, lesz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{v^3\frac{d^2v}{du^2}},$$

és így, hogy ha $\frac{d^2y}{dx^2}$-nek ezt az alakját és $\frac{dy}{dx}$-nek (E) alakját a (B) képletbe helyettesítjük, valóban azt nyerjük, hogy

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}.$$

A kérdésben megjelölt második alakot megkapjuk, ha $\frac{dv}{du}$-t és $\frac{d^2v}{du^2}$-et a

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\cdot\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{d^2v}{du^2} = 0$$

egyenletekből kiszámítjuk, a melyek az

$$F(u, v) = 0$$

egyenlet differenciálásából származnak.

*

E feladat megoldásához hozzácsatolom még annak az analog kérdésnek fejtegetését, hogy *miképen fejezhető ki valamely felület* Gauss*-féle görbülete az* (u, v, w) *érintősík érintéspontjában, ha e felület egyenlete sík-koordinátákra vonatkozólag van megadva.*

Az érintéspont koordinátáinak meghatározása végett ismét abból a felfogásból indulhatunk ki, hogy az (u, v, w) érintősík érintéspontja határpontja ama pontnak, melyben az

$$ux+vy+wz+1=0$$

$$(u+\Delta_1 u)\,x+(v+\Delta_1 v)\,y+(w+\Delta_1 w)\,z+1=0$$
$$(u+\Delta_2 u)\,x+(v+\Delta_2 v)\,y+(w+\Delta_2 w)\,z+1=0$$

egyenleteknek megfelelő síkok egymást metszik, hogy ha

$$\lim.\,\Delta_1 u=0,\quad \lim.\,\Delta_1 v+0,\quad \lim.\,\Delta_2 u=0,\quad \lim.\,\Delta_2 v=0.$$

E síkok metszéspontjának koordinátái a következő alakban írhatók:

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ \frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}},$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} \\ 1 & \frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & v & w \\ 1 & \frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u} & \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u} \\ 1 & \frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 u} & \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u} \end{vmatrix}}.$$

Noha az u és v egymástól függetlenül változnak, mégis feltehetjük, hogy míg az u változó az u értékből $u+\Delta_1 u$ illetőleg $u+\Delta_2 u$ értékekbe megy át, a v a

$$v = \varphi_1(u)$$

illetőleg

$$v = \varphi_2(u)$$

törvények szerint változik, hol $\varphi_1(u)$ és $\varphi_2(u)$ az u tetszés szerinti függvényeit jelentik, melyekről csak azt teszszük fel, hogy differenciálhatók. Ezt feltéve lesz:

$$\lim_{\Delta_1 u=0}\left(\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 u}\right)=\varphi_1'(u),\quad \lim_{\Delta_1 u=0}\left(\frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 u}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\varphi_1'(u)$$

$$\lim_{\Delta_2 u=0}\left(\frac{\Delta_2 v}{\Delta_1 u}\right)=\varphi_2'(u),\quad \lim_{\Delta_2 u=0}\left(\frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 u}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\varphi_2'(u).$$

Ezeket a kifejezéseket az x, y, z számára fentebb nyert kifejezésekbe behelyettesítvén, mint az (u, v, w) érintősík érintéspontjának koordinátáit a következőket nyerjük:

$$x=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}-w}$$

$$y=-\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}-w} \qquad \text{I.}$$

$$z=\frac{1}{u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial u}-w}.$$

Ha már most a felület Gauss-féle görbületét a (u, v, w) érintősík érintéspontjában síkkoordináták segítségével akarjuk kifejezni, a $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ differenciálhányadosokat a w-nek u és v szerint vett differenciálhányadosaiból ki kell számítanunk és a nyert értékeket a következő képletbe behelyettesítenünk:

$$G=\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial z^2}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^2}. \qquad \text{II.}$$

A $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ differenciálhányadosok meghatározására a következő egyenletek szolgálnak

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}. \qquad \text{III.}$$

Ha a $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ differenciálhányadosokat az I. egyenletekből meghatározzuk, a következőket nyerjük:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{\left(v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - v\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\left(v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - v\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}\\
\frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - u\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}\\
\frac{\partial y}{\partial v} &= -\frac{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} - w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - u\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}\\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{u\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}\\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{u\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^2}
\end{aligned} \qquad \text{IV.}$$

Ezeknek tekintetbe vételével a III. egyenletekből $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ számára a következő értékek származnak:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{u}{w}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{v}{w} \qquad \text{V.}$$

Mint könnyen belátható, ezekre az eredményekre itt is más meggondolások segítségével számítás nélkül is juthattunk volna.

Ha az utoljára nyert egyenleteket ismét u és v szerint differenciáljuk, a következő egyenletek származnak:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}-w}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial v}}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{v\dfrac{\partial w}{\partial u}}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^2}$$

a melyekből IV. alapján a második differenciálhányadosok következő kifejezései adódnak ki:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{u^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2u\dfrac{\partial w}{\partial v}\left(u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\left(u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)^2}\left\{u\frac{\partial w}{\partial v}\left(v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\left[uv\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(u\frac{\partial w}{\partial u}-w\right)\left(v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+v\frac{\partial w}{\partial u}\left(u\frac{\partial w}{\partial u}-w\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w}{w^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(v\dfrac{\partial w}{\partial v}-w\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2v\dfrac{\partial w}{\partial u}\left(v\dfrac{\partial w}{\partial u}-w\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+v^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)^2}\cdot$$

Ezeket és a $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ értékeit V.-ből a II. képletbe behelyettesítvén, az (u, v, w) érintősík érintéspontjában a GAUSS-féle görbület kiszámítására a következő képletet nyerjük:

$$G = \frac{\left(u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v} - w\right)^4}{(u^2+v^2+w^2)^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\right)^2\right]}.$$

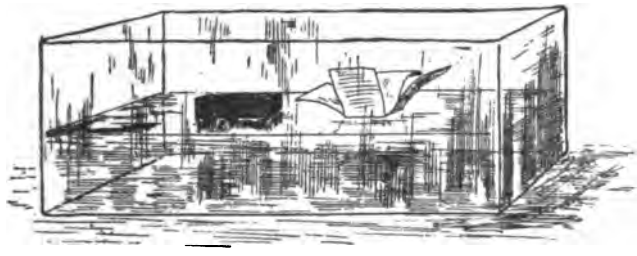
* A többi beérkezett megoldások Lapunk legközelebbi füzetében jelennek meg. *Szerk.*

PHYSIKAI LABORATORIUM.

1. **Kisérlet a folyadékok felületi feszültségére.** A folyadékok felületi feszültségét rendesen a szappanhártyákon szokás bemutatni; de épen olyan egyszerű kisérletek tehetők nagy folyadéktömegek szabad felületein is.

Azt, hogy a folyadékban működő erők a folyadék szabad válaszfelületét kisebbíteni törekednek s hogy a folyadék felülete olyanféle hatásokat fejt ki, mint egy kifeszített hártya, szemléltetik a következő kisérletek, melyek jó részt Boys «Soap-Bubbles» című könyvecskéjében * is le vannak irva.

Sárgaréz dróthálóból egy darabot, vagy hálós fenekü skatulyát a víz felületére fektethetünk a nélkül, hogy elmerülne; sőt még sréttel meg is



terhelhetjük tetemesen, s nem merül el, mert a háló nyilásai között nagy folyadékfelület keletkezik, melynek feszültsége fentartja. Az uszás feltétele akként módosul, hogy a test súlya egyenlő a felhajtó erő és a feszültség hatásával. Szükséges, hogy ne nedvesítse könnyen a víz a hálót, azért vashálóval csak úgy sikerül a kisérlet, ha előbb forró parafinban áztatjuk.

Ugyanez a kisérlet úgy is módosítható, hogy egy aræometer felső részére egy köralakú dróthálót erősítünk, úgy hogy ez ne merüljön el a vízben.

---

* Az eredeti művecske teljes czime: «*Soap-Bubbles and the Forces which mould them. Being a course of three lectures delivered in the theatre of the Lemoon Institution on the afternoons of Dec. 30 1889, Jan. 1, and 3. 1890, before a juvenile audience.* By C. V. Boys. Németül Dr. G. Mayer átdolgozásában jelent meg, A. Barth (Leipzig 1893) kiadásában. — Ára 3 márka.

Ha azután belemerítjük a hálót is a vízbe s szép lassan emelkedni engedjük, látjuk, hogy a háló a víz felületén fennakad.

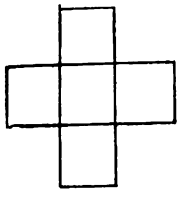
Aræometer helyett egy kis üveg lombikot vehetünk, melyet egyfúratú dugóval elzárunk s ebbe egy üvegcsövet teszünk: a dróthálót erre erősítjük. A lombikba annyi srét vagy higany teendő, hogy az nyakáig a vízbe merüljön.

Ha vízre olyan papirdarabot teszünk, melynek szélei fel vannak hajtogatva (legczélszerűbb e czélra négyszögletü skatulyavázat készíteni), a felhajtott részek rövid idő mulva a víz felületén elterülnek, mutatván ezzel, hogy a víz szabad felülete lehetőleg összehúzodni törekedik.

Minthogy az æthernek sokkal kisebb a felületi feszültsége (1,8) mint a vízé (7,5), a legcsekélyebb æther a víz felületi feszültségét tetemesen leszállítja, a miről szintén sok egyszerű kisérlet győz meg.

Ha a vizen uszó drótháló vagy papir egyik szélére kevés æthert cseppentünk, vagy csak ætherbe mártott vattával közelítünk hozzá, a lemez gyorsan az ellentett oldalra szalad; az elmerített aræometer pedig azonnal kiemelkedik, ha a hálóra egy csepp æthert öntünk.

Ismeretes, hogy ha lapos edénybe vizet öntünk s azon két parafagolyót usztatunk, azok egymást vonzzák; de ha a két golyó közé æthert cseppentünk, azonnal szétszaladnak, mert két oldalt a tiszta víz nagyobb felületi feszültsége széthúzza a közben levő ætheres víz kisebb feszültsége ellenében.



Ugyanezt mutathatjuk be más formában, ha egy vékonyra kihuzott cső végén függő vízcsepphez alulról ætheres edénynyel közeledünk: a vízcsepp azonnal leesik, jeléül annak, hogy az æthergőzök a vízcsepp felületi feszültségét annyira csökkentik, hogy az akkora víztömeget többé megtartani nem képes.

A pecséttisztítás theoriáját (Maxwell) * is igazolhatjuk egyszerű kisérlettel, melyet vetítve mutathatunk be. Üveglemezen olajcsepp képviseli a pecsétet, ha egy vékony üvegcső vagy fapálczika végére csavart vatta-pamacsot ætherbe mártunk s azután ezt az olajcsepp közepéhez érintjük, az szétszalad, — a pecsét nagyobb lesz, — mert az olaj felületi feszültsége nagyobb (2,5), mint az æthere.

Fordítva, ha az ætherrel a pecsét széléhez közelítünk, a folt összehuzódik — kisebb lesz — s a pecsét közepébe helyezett itatós papirba huzódik fel, úgy hogy teljesen eltávolíthatjuk.

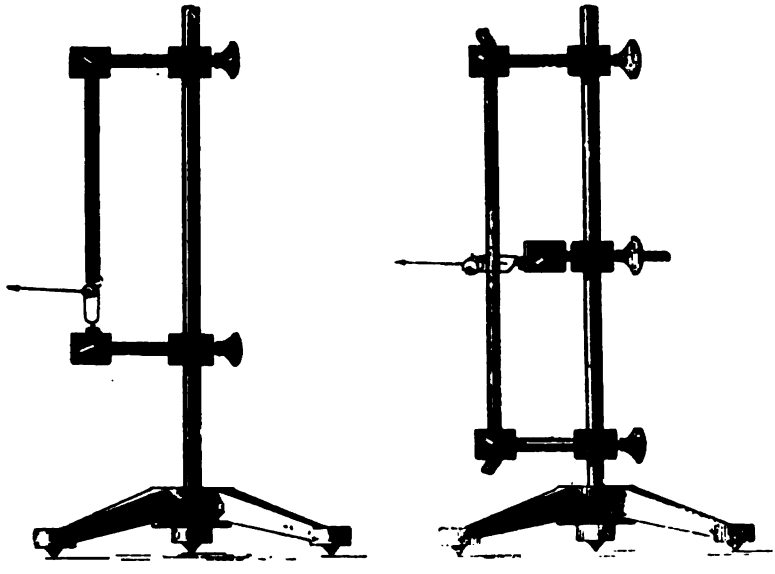
Ugyanezt ismételhetjük melegített vassal is, æther helyett, a mi ismét azt mutatja, hogy a felületi feszültség a hőmérséklet emelkedésével csökken.

* L. Maxwell *Theorie d. Wärme* ford. Neesen 333. l.

A fémek különböző kiterjedése. A kettős fémlemezek meggörbülését a melegítésnél s annak a fémhőmérők szerkesztésére való felhasználását egyszerűen mutathatjuk, ha az ilyen sárgaréz és vasból összeerősített lemez egyik végét megfogjuk, a másikat pedig az ábrán látható egyszerű emelős áttétellel látjuk el.

Égő gyujtóval közeledvén a vaslemezhez, a lemez kiterjed s abban az egy irányban meghajlítja, a mutató előre megy, de azután a réz is fölmelegszik s mert nagyobb a kiterjedési együtthatója, a lemezt visszahajlítja, a mutató megfordul s ellentett irányban tér ki.

A kifeszített kaucsuk összehuzódását a melegítésnél ugyancsak ilyen emelős mutatóval láthatóvá tehetjük, ha egy, két végén megerősített



és jól kifeszített kaucsuk cső közepén alkalmazzuk a rajzon látható érzékeny mutatót; és pedig oly módon, hogy a kaucsukon átszúrunk egy gombostűt, mely gombjával egy tengelyen forgó parafadugót érint. A dugó még egy könnyű mutatót — pl. gyujtószálat — tart. Kézzel való húzás által előbb meggyőződünk, hogy az egyik fél megrövidülésével a mutató mily irányú kitérése felel meg s ha azután azt a részt lánggal csak kissé is melegítjük, látjuk a mutatót ugyanabban az irányban mozogni, jeléül, hogy a melegítésnél a kaucsuk valóban összehuzódik. Minél jobban ki van feszítve a kaucsukcső, annál érzékenyebb a mutató. *K. J.*

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1894. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Április 5-én. Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről.

Április 19-én. TŐTÖSSY BÉLA: A szimbolikus számítások a projektiv geometriában.

TAXGL VÁROLY: Az árnyékról.

Október 25-én. Az elnök üdvözlése. — A tanulók versenyén megitélt díjak kiosztása.

Dr. KLUPÁTHY JENŐ: Kisérletek az elektromos oscillatiókkal.

November 15-én. Dr. KŐNIG GYULA: Az egy- és többméretü sokaságok kölcsönösen egyértelmü vonatkoztatása.

FUCHS KÁROLY: A capillaritás elméletének kiinduló pontjairól.

Deczember 6-án. SZILY KÁLMÁN: A körvonal üldöző görbéje, állandó távolság mellett.

Dr. HOÓR MÓR: Az elektromótorokról.

Deczember 20-án. Dr. KLUG LIPÓT: A lineáris complexusról.

Dr. KLUPÁTHY JENŐ: Előadási kisérletek.

*

Kisérletek elektromos oscillatiókkal.

Az elektromos oscillatiókkal tett újabb kisérletek általános érdeklődést keltettek úgy a fizikusoknál, mint a gyakorlat embereinél. A fizikusoknál, mert az oscillatiók térbeli elterjedésének ismerete az elektromos jelenségek elméletére, nevezetesen a FARADAY-MAXWELL-féle felfogásra nézve bír döntő jelentőséggel, amennyiben felvilágosítást nyújthat arra nézve, hogy az elektromos állapot megváltozása a tér dielektrikus polarisátiója utján véges sebességgel terjed-e el, vagy sem?

De mert az elmélet szerint ennek a terjedési sebességnek a levegőben igen nagynak, a fényével megegyezőnek, tehát 300,000 km. sec^{-1} kellene lennie, világos hogy igen gyorsan egymásra következő villamos állapotváltozásokat kell előállítani, hogy azok kis térben való elterjedésénél az egyidejűség, vagy az időbeli elterjedés között dönteni lehessen.

Ez indította a kisérletezőket arra, hogy módokat keressenek igen gyors villamos állapotváltozások létesítésére.

A villamos kisülés oscilláló természetét annak hatásaiból már rég ismerték.

Így SAVARY azt tapasztalta, hogy a szikrával mágnesezett vasdarabok sarkai váltakozók; a voltameteren átvezetett szikraáram hatása alatt mind a két elektródon mind a két gáz *(H, O)* kiválását vették észre. Hasonlóan a Geissler-csövek fényjelenségei forgó tükörben a szikrák oscilláló természetét bizonyították. HELMHOLTZ a battériák kisülésénél RIESS-től talált törvényszerűség magyarázatát az oscilláló kisülésre vezette vissza s THOMSON elméletileg megállapította az ily oscilláló kisülések periodusát is, kimutatva azt, hogy ha C a vezető kapacitása és L öninductiójának együtthatója, az oscillatió rezgésideje

$$T=2\pi\sqrt{CL}.$$

FEDDERSEN volt az, ki a periodust először kisérletileg határozta meg forgó tükörrel, és sikerült neki THOMSON képletét igazolnia oly kisüléseknél, melyeknek periodusa egy milliomod másodpercz.

HERTZ kis kapacitású vezetők kisütésével $1—2.10^{-8}$ s. oscillatiókat állított elő, s ezzel mutatta ki ismert kisérleteivel a villamos hatás terjedésének véges sebességét.

E kisérletek közben az elektromos oscillatiók néhány érdekes sajátságát tapasztalták; így pl. a légritkított cső világítását az oscilláló térben, a vezetők ellenállásának látszólagos változását stb.

E kisérletekkel lépést tartva, az electrotechnika a villamosság gyakorlati alkalmazásában igyekezett azok eredményeit értékesíteni. S itt a kilátás, melyet e vizsgálatok nyújtottak, e szempontból nem kevésbbé kecsegtető, mint az előbbi. Először módot látszik nyújtani az elektromos energia átvitelére vezető sodronyok nélkül, csupán a tér közvetítésével, mint a fénynél; azután meg az elektromos energia közvetlen átalakítására fénynyé, a melegítés kikerülésével.

Ez a törekvés indította az elektrotechnikusokat arra, hogy a gyors elektromos oscillatiókkal nagy méretekben kisérletezzenek.

E tekintetben különösen TESLA MIKLÓS tett igen sok s jórészt érdekes kisérletet, melyek czélja az elektromos oscillatiók gyakorlati értékesítése s a melyek lényegben nem egyebek, mint FEDDERSEN, BEZOLD, HERTZ s mások kisérleteinek nagy arányokban való kivitele.

Ennek a czélnak megfelelőleg természetesen arra törekedett TESLA, hogy oly oscillatiókat állítson elő, amelyek szaporaságukon kívül nagy munkaképességgel is bírnak és állandóan fenntarthatók, hogy a hatásaik folytonosak legyenek.

Az elektromos kiegyenlítődések munkaképessége általában arányos a potentiál különbséggel és az elektromosság mennyiségével: ezért oly oscillatiók a leghatásosabbak, melyeknek nagy feszültségök és intensitásuk van.

Ez utóbbi, és az oscillatiók állandóságának szempontjából indulva ki, TESLA az oscillatiók előállítására legelőször igen gyors váltakozású áramgépeket szerkesztett, mint a melyek a legegyszerűbb mechanikai szerkezetek folytonosan és egyenletesen oscilláló intensiv áram előállítására. De a technikai nehézségek miatt az ily gépekkel másodperczenkint 30,000-nél szaporább váltakozású áramot nem tudott előállítani, ez pedig igen kevés a százmillióhoz képest, úgy, hogy kénytelen volt az elektromos szikra oscillatióit használni fel.

Gyors váltakozás, nagy feszültség és állandóság a hármas feladat, melyet a kisérletezőnek meg kell oldania. A gyors váltakozást adja egy kondenzator (pl. a leydeni batteria) kisülési szikrája: nagy feszültség előállítására pedig ismert eszközeink vannak a transformatorokban (pl. az általános használatban levő Ruhmkorff-félében), melyeknek ha vastagabb tekercsén átültetjük a kis feszültségű szikrát, a vékonyabb sokmenetű tekercsben nagy feszültségű váltakozó áramot, vagyis oscillatiókat nyerünk. Csakhogy igen nagy feszültségnél a közönséges Ruhmkorffok szigetelése nem elegendő; de tudvalevő, hogy a folyékony szigetelők, különösen pedig az olajok sokkal jobban szigetelnek; azért TESLA erre a czélra olyan Ruhmkorff-féle transformatort készített, melynek két tekercse* olajjal telt edénybe merül s ez által kitünően el vannak egymástól szigetelve. Ez az úgynevezett «olajtransformator».

Már most csak az oscillatiók állandóságáról kell gondoskodni. Ha az ilyen transformatoron át egy szikrát üttetünk át, akkor a vékony tekercsben az oscillatiók rövid ideig tartanak, gyorsan csillapodnak, olyanformán, mintha egy ingát vagy hangvillát meglökünk, ill. megütünk, annak a lengései is rövid időn megszünnek. Ha azt akarjuk, hogy azok állandóan mozogjanak, gondoskodni kell, hogy mindig újabb lendítést adjunk, mielőtt még az első lengések véget érnek. Épen így itt is gondoskodni kell, hogy az első szikra által keltett oscillatiók meg ne szünjenek, mielőtt a második szikra a tekercsen át üt, mert különben az oscillatiók olyan egyenlőtlen lefolyásuak lesznek, mint azt az 1. ábra graphikusan ábrázolja. Természetes, hogy minél lassabban csillapodnak a transformatorban az oscillatiók, annál könnyebb elérni az állandóságot, már pedig az oscillatiók csillapodása, mint az elmélet és a kisérletek mutatják, annál kisebb, minél kisebb a ka-

* Az egyik 3 mm.-es nem szigetelt drótból készült mintegy 20 menetes solenoid, míg a másik ebonit vagy üveg csőre csavart egy réteg (2—300 menet) jól szigetelt $^1/_2$—$^3/_4$ mm.-es drótból áll.

pacitás és minél nagyobb a vezető öninductiója — azért arra kell törekedni, hogy lehetőleg kis kapacitása és nagy öninductiója legyen a transformator secundär vezetékének. Másrészt arról kell gondoskodni, hogy a vastag tekercsen átütő szikrák minél gyorsabban kövessék egymást. Ez természetesen olyan elektromosság-forrásra utal, mely lehetőleg nagy elektromosság-mennyiséget szolgáltat. Ezért is nagy hatások bemutatására legalkalmasabb a váltóáramú gép; de a Ruhmkorff által adott váltakozó áram, vagy pedig egy több lemezes megosztó gép is megfelel a czélnak.

1. ábra.

Ezeknek az általános elveknek megfelelő az az összeállítás, mellyel itt a Tesla kisérleteinek egy részét fogom bemutatni s a melynek rövid áttekintése a következő. (2. ábra.)

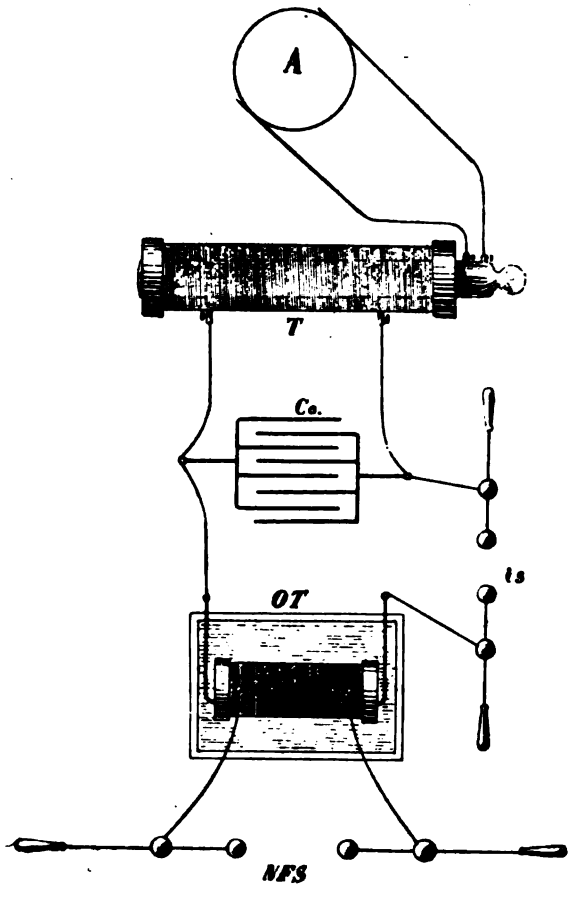
Az *(A)* áramforrásból jövő kis feszültségű (100 voltos) váltakozó áram a *T* transformator primär tekercsén halad át; a secundär tekercs két vége egy 4 palaczkból álló leydeni batteria *(Co)* töltése végett annak külső és belső fegyverzetével van összekötve. A battéria az olajtransformator *(OT)* primär tekercsén sül ki — e czélra egy szikraköz *(is)* van közbeiktatva — s ez által keletkeznek a még kis feszültségű, de szapora váltakozású oscillatiók. Az olajtransformator secundär tekercsében azután keletkeznek az indukált nagy feszültségű és gyors váltakozású oscillatiók *(NFS)*.

Az *is* szikraköz kellő szabályozása által elérhetjük, hogy ezek az oscillatiók állandóak legyenek. (Erre a czélra Tesla ajánlja az indukáló szikra lángját egy fujtató légáramával, vagy elektromágnessel eltávolítani; jónak találtam Hinstedt szerint a czink elektródokat: ezek alkalmazásánál egész felesleges a fujtató.)

Ezzel a kisérleti berendezéssel kivánok a t. értekezletnek néhány, az oscillatiókat jellemző kisérletet bemutatni.

A gyors váltakozású áramoknál természetesen az öninductió jelenségei nagy mértékben érvényesülnek; így, ha egy vezetőn vezetjük át ezen áramokat, akkor a vezető két pontja közötti potentiálkülömbség nagyobb lesz, mint állandó áram esetén. Ez a vezető ellenállásának látszólagos növekedése s a vele kapcsolatos impedantia.

Ha például egy vastag dróton át vezetem a *(Co)* battéria kisülési szikráját (a nélkül, hogy az olajtransformator be volna csatolva), akkor e drót két pontja között az ily szapora váltakozású kis feszültségű oscillatióknál egész száz voltig terjedő potentiál külömbség lép fel, úgy hogy a drót két pontjával összekötött 30 voltos izzólámpák erősen világítanak és pedig minél távolabbi pontokat kötnek össze, annál erősebben. Hogy ez nem az izzólámpák vacuumának befolyása, mint Tesla gondolja, arról meggyőződhe-



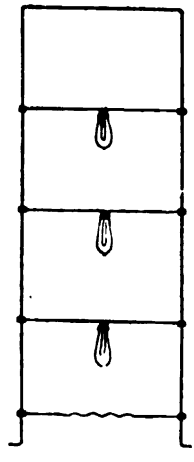
2. ábra.

tünk, ha platinadrótot kötünk a rézdrót két pontjához: ez is izzásba jö a levegőn s eközben, ha lazán lógott, megfeszül és zeg-zugos alakot vesz fel. (3. ábra.)

A leydeni batteria szikrájának oscillatióit könnyen letransformálhatjuk olyan kis feszültségre, hogy egyszerű 20 voltos izzólámpát világítanak. Erre a czélra két drótkeresetet készítünk, mind a kettőt 3 -4 mm.-es nem szigetelt rézdrótból. Az egyik 15- 20 menetű, a másik 2 3 menetű; ha az elsőn átütnek a szikrák, akkor a másiknak végei közé erősített lámpa izzásba jö.

Eddig az oscillatiók aránylag kis feszültségűek voltak, amit onnan lát-

hatunk, hogy a szikraköz, melyet át birnak ütni, alig 2 cm. hosszú; transformáljuk most át nagy feszültségűekre az olajtransformator segélyével. Ezt becsatolva látjuk, hogy az *(NFS)* kisütőnél hatalmas nagy szikrák egész serege keletkezik. Erős, csattogó, fényes szikrapamatok, mindenütt rendkívül nagy kisugárzás, jellemzői a nagy feszültségű gyors oscillatióknak. Feltűnően ugyanazok a jelenségek, melyeket a nagy influentia-gépeken tapasztalunk s az ezekkel végzett kisérleteket itt nagyobb mértékben s szebben ismételhetjük. Különösen a két elektródon a kisugárzás rendkivül nagy, s ezt szépen bemutathatjuk külömböző formákban, aszerint, amint az elektródok alakját változtatjuk. Így származik két körgyűrű szembeállításával az a szép jelenség, melyet Tesla «sugárzó nap»nak nevez. Szigetelő, pl. kaucsuk lemezt helyezve a két elektród közé, a szikrák eleinte a széle körül ütnek át; később a lemez egészen átmelegszik, lágy lesz mint a vaj, s akkor a szikrák rajta törnek át.



3. ábra.

Megfordítva azt látjuk, amit először Hertz mutatott ki, hogy az ily oscillatiók a vezetők belsejébe nem hatolnak be és pedig annál kevésbbé, minél szaporábbak. Ha Geissler-csövet szigetelő állványra helyezve, az egyik elektróddal összekötjük, míg a másikat a földdel kötjük össze, a cső szépen világít. De ha most a csövet fémhálóval borítjuk le, úgy amint azt a megfelelő elektrostatikai kisérletnél szokás, a cső megszűnik világítani, de újra világít, mihelyt a hálót leemeljük.

Ez adja egyúttal magyarázatát annak a tapasztalatnak, hogy az ily szapora oscillatiókat minden veszély nélkül átvezethetjük testünkön. Megfogom az egyik kezemmel az elektródot, a másikban Geissler-csövet tartok s a cső fényesen világít, anélkül hogy a legkisebb kellemetlen érzésem lenne. A Geissler-csöveknek elég egy elektródját összekötni a kisülő egyik végével, hogy világítsanak; sőt távolból minden vezető összeköttetés nélkül is világítanak. Sőt oly kiszivattyúzott gömbök és hosszú csövek, melyekben nincs is elektród, szépen világítanak, ha kezembe veszem s közelítem a kisütőhöz.

Itt az az érdekes dolog tűnik fel, hogy az ilyen elektród nélküli csövet először igen közel kell vinni a kisütőhöz — gyakran érinteni is kell — míg világítani kezd, vagy amint mondani szokták az akusztikai analogon folytán, míg megszólal. Az egyszer megszólalt csövet azután nagy távolságra vihetjük s még mindig világít. Különböző csövek nem egyformán világítanak, általában hosszabb csövek jobban világítanak; minél kisebb a cső,

annál gyorsabb oscillatiók kellenek — úgy látszik — a megszólaltatásra. Ezek az elektródnélküli világító csövek képezik TESLA szerint a «jövő világosságának» csiráit. Mozgatva e csöveket, igen szépen látjuk e jelenség oscilláló természetét, mert a csőnek sok képét látjuk egymás mellett s a «lángoló kard» vagy a «pompás legyező» valóban meglepően szép látványos kisérletek. S valóban meglepő s reményeket keltő ez a jelenség, különösen ha abban a formában állítjuk elő, mint azt TESLA párisi előadásában tette. Az előadási asztal fölé vékony czinklemezt függesztünk fel, mintegy 2 m. magasban (50—60 cm. széles, 2—3 m. hosszú) s azt összekötjük az oscilláló kisütő egyik elektródjával, míg a másikat a földbe vezetjük (vagy esetleg a földre helyezett másik fémlemezbe). Ha mos az asztalra helyezett csöveket kezünkbe vesszük, azok világítanak, sőt a lemeztől 2—3 méternyire is távozhatunk s még mindig fényesek. Természetes, hogy kis fantáziával magunk elé képzelhetjük azt az ideális világítást, a mikor a szoba mennyezete és padlója van összekötve az oscillatiók forrásával s a szobában bárhol elhelyezett ilyen lámpák világítanak, a zsebünkből kivett kis cső adja a gyujtó helyett a világosságot.

Egyelőre azonban még baj, hogy az oscillatiókat nagy távolságra nem lehet vezetni, mert az öninductió folytán rendkivül nagy lesz az ellenállás s azután mint láthatjuk ez a «jövő világossága» még csak dereng!

Klupathy Jenő.

International Journals from Hungary

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

Sectio: MATHEMATICA
Vols. 1-9 1958-1966 mostly reprinted
unbound per Vol US $ 8,-

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

O. S. Vols. 1-3. 1952-1954 all publ. Partly reprinted
N. S. Vols. 1-9. 1956-1965 all publ.

Unbound set US $ 110,-
Cloth bound set US $ 134,-

Continued as „STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA"

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

Vols. 1-2, 1966-1967

Unbound, per vol. US $ 12,-

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS ACTA PHYSICA ET CHIMICA

Series I.
„Acta Chimica, Mineralogica et Physica"
Vols. 1-7, 1929-1940 all publ.

Series II.
„Acta Chimica et Physica"
Vols. 1-3 1942-1950 all publ.

Nova Series:
„ACTA PHYSICA et Chimica"
Vols. 1-13, 1955-1967

Price of the three series together unbound US $ 170,-

ACTA PHYSICA et CHIMICA DEBRECINA

Vols. VIII-XII. (N. S. 1-5) 1962-1966
unbound per vol. US $ 6,-

Mathematical and Physical Journals in Hungarian

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Mostly reprinted

Vols. 1–50, Budapest, 1892–1943, all published, with General Index clothbound — US $ 850,–

paperbound, resp. in original issues — US $ 750,–

Ample summaries in German since 1920

MATEMATIKAI LAPOK

Vols. 1–18, Budapest, 1950–1957 partly reprinted

clothbound — US $ 196,–

paperbound, resp. in original issues — US $ 160,–

Continues and develops the traditions of the former valuable periodical MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK. Published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages, bringing regularly the bibliography of Hungarian mathematical literature. Editor: Professor P. Turán.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

Vols. 1–17, Budapest, 1950–1967 clothbound — US $ 170,–

in original issues — US $ 136,–

Publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

Vols. 1–15, 1953–1967 clothbound — US $ 136,–

in original issues — US $ 102,–

Physical publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

Prices are valid until December 31, 1969

Single volumes of periodicals quoted are available.
Subscription to forthcoming volumes may be entered.

„KULTURA"

Hungarian Trading Company for Books and Newpapers
Back Issues Department

BUDAPEST 62, P. O. B. 149, Hungary

Sets, runs and back volumes of periodicals published in Hungary

REPRINTS

Searching Service for out of stock journals
Xerox copies or microfilms of out of print issues

Please ask for our catalogues „PERIODICA HUNGARICA"

Orders and inquiries should be sent to above address, directly, or through any international scientific bookseller.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

4. KÖTET
1895

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARIES
MATHEMATICAL-SCIENCES LIBRARY
OCT 12 1976

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST 1968

„KULTURA" Budapest, Offers Mathematical and Physical Sets

International ACTA Journals from Hungary

publish original scientific treatises in English, German, French or Russian.

ACTA MATHEMATICA Academiae Scientiarum Hungaricae

Vols 1-18, 1950-1967 with „Hungarica Acta Mathematica"
Vol. 1. (1949) and Suppl. to Vol. 5., mostly reprinted

Unbound set	US $	285,-
Cloth bound set	US $	323,-

ACTA PHYSICA Academiae Scientiarum Hungaricae

Vols. 1-23, 1952-1967 with „Hungarica Acta Physica"
Vol. 1. (1949) mostly reprinted

Unbound set	US $	264,-
Cloth bound set	US $	312,-

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

Vols. 1-28, 1922-1967 mostly reprinted

Unbound set	US $	406,-
Cloth bound set	US $	464,-

Published by the University of SZEGED

PUBLICATIONES MATHEMATICAE

Vols. 1-14. 1949-1967 partly reprinted

Unbound set	US $	182,-
Cloth bound set	US $	210,-

Published by the University of DEBRECEN

Soviet Mathematical Reprint

TRUDY SEMINARA PO VEKTORNOMU I TENZORNOMU ANALIZU

Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis
Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle

Vols. 1-13, Moscow-Leningrad, 1933-1966 cloth bound	US $	240,-

Vols. 1-4 are published chiefly in Western languages.
Vol. 4 contains the proceedings of the 1st International Conference for Tensor Differential Geometry, held in Moscow, 1934. Editors: Professor V. F. Kagan and P. K. Razhevskij.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

NEGYEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

BARTONIEK GÉZA ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1895

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A kiadásért felelős: Császár Ákos,
a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára

Eredeti kiadásról készült változatlan utánnyomás
Minden jog fenntartva
Külföldi terjesztés:
KULTURA KÖNYV- ÉS HÍRLAP
KÜLKERESKEDELMI VÁLLALAT
BUDAPEST 62,
P. O. B. 149

This book is a reproduction of the original, published
in Budapest

All rights reserved

General Distributors:
KULTURA Hungarian Trading Company
for Books and Newspapers
BUDAPEST 62, P. O. B. 149,
Hungary
Printed in Hungary, 1968

68-503 Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

NEGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Hunyady Jenő egyik determináns tételéről 1; FARKAS GYULA: A Carnot-Clausius-féle tétel levezetése 7; SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban 12; KLUG LIPÓT: Észrevételek az «Egy helyzetgeometriai tétel a tetraéder éleiről» című czikkhez 21; *Physikai Szemle.* (A katód-sugarakról) 26; *Irodalom.* (Oswald's Klassiker. 40. LAVOISIER und LAPLACE, Zwei Abhandl. üb. die Wärme 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandl. von GAY-LUSSAC, DALTON, DULONG u. PETIT, MAGNUS, REGNAULT. BLAGDEN, Die Gesetze der Ueberkaltung. — FAHRENHEIT, REAUMUR, CELSIUS, Abhandl. über Thermometrie. — GAUSS, Intensität der erdmagn. Kraft. — LAMBERT, Entwerfung der Land- und Himmelskarten. Ism. KÖVESLIGETHY) 31; *Feladatok.* (A 21. feladat megoldása FREIKIND IGNACZ, CSILLAG VILMOS és BEKE MANÓ uraktól) 33; *Physikai laboratorium.* (A nedvesség méréséről. — A kristályosodás vetítése. — A mágnesi állapot rögzítése. — Dielektrin.) 47.

Második füzet.

SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (I. közl.) 49; SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Elliptikus áram hatása a gyúpontjaiban levő mágnesi pólusra 56; SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Egy sor, mely π értékéhez vezet 67; *Physikai Szemle.* (A Hertz-féle kisérletekről) 71; *Irodalom.* (CHRISTIANSEN, Elemente der theor. Physik. Ism. FARKAS GY.) 79; *Feladatok.* (A 21. feladat megoldásai MAKSAY ZSIGMOND, GRÜNWALD MIKSA, LÓKY BÉLA és SUTÁK JÓZSEF uraktól) 82; *Előadások.* (FRÖHLICH J. «Miért esik mindig a talpára a macska?») 89; *Társulati ügyek.* Határozat a M. Ph. T. harmadik közgyülése tárgyában 95.

Harmadik füzet.

KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez 97; ifj. SZILY KÁLMÁN: A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága 102; KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az invariánsok elméletének alaptételéről. (II. közl.) 107; *Irodalom.* (VOIGT,

Kompendium d. theor. Physik., ism. FARKAS GYULA) 121; *Feladatok.* (KLUG, KÜRSCHÁK, VÁLYI és SZÉPRÉTHY uraktól) 126; *Megoldott feladatok.* (A 22. feladat megoldása SZÉPRÉTHY BÉLA és KÜRSCHÁK JÓZSEF uraktól) 126; *Physikai laboratorium.* (A benzin-szaturátor. — A légkör felhajtó ereje. — Az elektroskop használatához.) 131; *Értesítő a Math. Phys. Társ. előadásairól.* (KÖVESLIGETHY R.: Az ephemeridék számításáról.) 134.

Negyedik füzet.

SZILY KÁLMÁN: A primitiv gyökök szakaszossága 145; RADOS GUSZTÁV: A ciklikus determinánsok elméletéhez 153; *Physikai Szemle.* (Az argonról.) 155; *Irodalom.* (A kinematikai geometria történeti fejlődése, HORNISCHER HENRIKtől) 161; *Értesítő a Math. Phys. Társ. előadásairól.* (DISCHKA GYŐZŐ: Az ajaksípok hangtüneményei. BARTONIEK GÉZA: A víz és gázvezeték elektromos áramáról.) 169; *Társulati ügyek. Vegyesek.* (Arthur Cayley, KOPP LAJOStól) 192.

Ötödik füzet.

PRIVORSZKY ALAJOS: A térbeli görbék elméletéhez 193; SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról 197; BEKE MANÓ: Egy tétel a homogén lineár differenciálegyenletek algebrai integráljairól 203; BREUER MÓR: Adalék a több változós függvények elméletéhez 207; *Physikai Szemle.* (A dörzsölési elektromosság eredete.) 212; *Irodalom.* (A M. T. Akadémia Lukács Krisztina-pályadíjáról. — WINKELMANN, Handb. d. Physik, ism. HELLER. — KAYSER, Physik, ism. K. J.) 221; *Megoldott föladatok.* (A 22. feladat megoldása BLAU ÁRMIN, CSILLAG VILMOS, SUTÁK JÓZSEF és STEINER LAJOS uraktól) 229; *Feladatok.* (31. feladat TÖTÖSSY BÉLA úrtól) 234; *Vegyesek.* (Bolygó rendszerünk határairól, KÖVESLIGETHY RADÓ.) 235.

Hatodik és hetedik füzet.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: Az analitikai függvények elméletéhez (I. közl.) 241; SZIJÁRTÓ MIKLÓS: A Wheatstone-féle híd ellenállása 256; SZÉPRÉTHY BÉLA: A ferde és egyenes körkúp sík metszeteinek gyújtópontjairól 264; KLUG LIPÓT: A harmonikus polusról 273; FUCHS KÁROLY: Adalék a Mars felületének elméletéhez 283; SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról 288; *Physikai Szemle.* (A szinek fotografálásáról. — A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normális forrpontjának meghatározása. — A folyósított levegő tudományos alkalmazásai) 296; *Irodalom.* (KLEIN, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ism. KÜRSCHÁK.) 303; *Megoldott feladatok.* (A 23. feladat megoldása SZÉPRÉTHY BÉLA, CSILLAG VILMOS, DOROGHY IGNÁCZ, FREIKIND IGNÁCZ, LÓKY BÉLA, KLUG LIPÓT, BREUER MÓR és MAKSAY ZSIGMOND uraktól. — A 24. feladat megoldása SZEPRÉTHY BÉLA és DOROGHY IGNÁCZ uraktól) 306; *Physikai la-*

boratorium. (Világító testek sötét képei. — Elektromos védőernyő átlátszó vezető anyagból. — Ezüstözés. — Az aluminium forrasztása.) 319.

Nyolczadik füzet.

Suták József: Alaprendszerek egy változós algebrai függvényeknél (I. közl.) 321; Bauer Mihály: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez 331; *A Mathematikai és Physikai Társulat II. versenye* 337; *A Mathematikai és Physikai Társulat II. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok* 339; L. Koenigsberger: Helmholtznak a mathematika és a mechanikai alapelveire vonatkozó vizsgálatai 345.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Lap

BAUER MIHÁLY: Megjegyzés Dirichlet egyik tételéhez 331
BEKE MANÓ: Egy tétel a homogén lineár differenciálegyenletek algebrai integráljairól 203
BREUER MÓR: Adalék a több változós függvények elméletéhez 207
FARKAS GYULA: A Carnot-Clasius-féle tétel levezetése 7
FUCHS KÁROLY: Adalék a Mars felületének elméletéhez 283
KLIMKÓ MIHÁLY: Adalék a primitiv gyökök elméletéhez 97
KLUG LIPÓT: Észrevételek az «Egy helyzetgeometriai tétel a tetraéder éleiről» czímű czikkhez 21
— A harmonikus polusról 273
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Hunyady Jenő egyik determináns tételéről 1
— Az invariánsok elméletének alaptételéről (Második közl.) 107
— Az analitikai függvények elméletéhez (Első közl.) 241
PRIVORSZKY ALAJOS: A térbeli görbék elméletéhez 193
RADOS GUSZTÁV: A ciklikus determinánsok elméletéhez 153
SUTÁK JÓZSEF: Algebrai vizsgálatok a függvénytanban 12
— Alaprendszerek egy változós függvényeknél 321
SZÉPRÉTHY BÉLA: A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (Első közl.) 49
— A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (Második közl.) 197
— A ferde és egyenes körkúp sík metszeteinek gyujtópontjairól 264
— A csavart oszlop saját árnyékhatárvonalának meghatározásáról (Harmadik és befejező közl.) 288
SZIJÁRTÓ MIKLÓS: Elliptikus áram hatása a gyújtópontjaiban levő mágnesi polusra 56
— Egy sor, mely a π értékéhez vezet 67
— A WHEATSTONE-féle híd ellenállása 256

Lap
Szily Kálmán: A primitiv gyökök szakaszossága... 145
Ifj. Szily Kálmán: A binomiális együtthatók néhány tulajdonsága... ... 102

Physikai Szemle.

Bartoniek Géza: A Hertz-féle kisérletekről (Righi után) 71
— A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normalis forrpontjának meghatározása (Mathias után) 298
Csemez József: A katódsugarakról (Lénárd után) 26
— A dörzsölési elektromosság eredete (Christiansen után) 212
Mikola Sandor: Az argonról (Raveau után)... 155
Tangl Károy: A színek fotografálásáról (Wiener után)... 296
— A folyósított levegő tudományos alkalmazásai (Dewar után) ... 301

Irodalom.

Bartoniek Géza: Helmholtznak a mathematika és a mechanika alapelveire vonatkozó vizsgálatai (ford.) 345
Farkas Gyula: Christiansen, Elemente der theor. Physik 79
— Voigt, Kompendium d. theor. Physik 121
Heller Ágost: Winkelmann, Handbuch d. Physik II. és III. köt. ... 224
Hornischek Henrik: A kinematikai geometria történeti fejlődése... ... 161
Klupathy Jenő: Kayser, Lehrb. d. Physik 228
Kövesligethy Radó: Ostvald's Klassiker 40, 44, 53, 54, 56 és 57 füz. 31
Kürschák József: Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie 303

Ismertetett művek.

Blagden: Die Gesetze der Ueberkaltung (ism. Kövesligethy) 31
Celsius l. Fahrenheit stb.
Christiansen: Elemente der theoretischen Physik (ism. Farkas)... ... 79
Dalton l. Gay Lussac stb.
Dulong l. Gay Lussac stb.
Fahrenheit, Réaumur, Celsius: Abhandlungen über die Thermometrie (ism. Kövesligethy) 31
Gay Lussac, Dalton, Dulong u. Petit, Rudberg, Magnus, Regnault (1802—1842): Das Ausdehnungsgesetz der Gase (ism. Kövesligethy) 31
Gauss: Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt (ism. Kövesligethy) 31

Lap

KAYSER: Lehrbuch der Physik (ism. KLUPATHY) 228
KLEIN: Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie (ism. KÜRSCHÁK) 303
KOENIGSBERGER: Herm. v. HELMHOLTZ' Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik u. Mechanik (ford. BARTONIEK) 345
LAMBERT: Entwerfung der Land u. Himmels Karten (ism. KÖVESLIGETHY) 32
LAPLACE l. LAVOISIER.
LAVOISIER u. LAPLACE: Zwei Abhandlungen über die Wärme (ism. KÖVESLIGETHY) 31
MAGNUS l. GAY LUSSAC stb.
RÉAUMUR l. FAHRENHEIT stb.
REGNAULT l. GAY LUSSAC.
RUDBERG l. GAY LUSSAC.
SUTÁK: A fény elektromágnességi elmélete (pályamunka, bírálják FRÖHLICH, KÖNIG és RADOS) 291
WINKELMANN: Handbuch der Physik II. és III. köt. (ism. HELLER Á.) 224

Kitűzött feladatok.

KLUG LIPÓT kitűzi a 27-dik feladatot 125
KÜRSCHÁK JÓZSEF « a 28-dik « 125
SZÉPRÉTHY BÉLA « a 30-dik « 125
TÖRÖSSY BÉLA « a 31-dik « 234
VÁLYI GYULA « a 29-dik « 125

Megoldott feladatok.

BEKE MANÓ megoldja a 21-dik feladatot 38
BLAU ÁRMIN « a 22-dik « 229
BREUER MÓR « a 22-dik « 313
CSILLAG VILMOS « a 21-dik « 36
— « a 22-dik « 230
— « a 23-dik « 307
DOROGHI IGNÁCZ « a 23-dik « 309
— « a 24-dik « 318
FREIKIND IGNÁCZ « a 21-dik « 33
— « a 23-dik « 313
GRÜNWALD MIKSA « a 21-dik « 84

			Lap
Klug Lipót	megoldja	a 23-dik feladatot	313
Kürschák József	«	a 22-dik «	127
Lóky Béla	«	a 21-dik «	86
—	«	a 23-dik «	312
Maksay Zsigmond	«	a 21-dik «	82
—	«	a 23-dik «	314
—	«	a 23-dik «	316
Pilczer Ignácz	«	a II. tanulóverseny tételeit	342
Riesz Emil	«	a « « «	339
Steiner Lajos	«	a 22-dik feladatot	231
Sutak József	«	a 21-dik «	88
—	«	a 22-dik «	230
Szépréthy Béla	«	a 22-dik «	126
—	«	a 23-dik «	306
—	«	a 24-dik «	317

Physikai Laboratorium.

Bartoniek Géza: A nedvesség méréséről ... 44
— A dielektrin ... 48
— A lépkör felhajtó ereje ... 132
— Az elektroszkop használatához ... 133
— Világító testek sötét képei ... 319
— Aluminium forrasztás ... 320
Fényes Dezső: A mágnesállapot rögzítése a vasban ... 47
Grúber Nándor: A kristályosodás vetítése ... 47
— Benzin-szaturátor ... 131
Tangl Károly: Elektromos védőernyő átlátszó anyagból ... 319
— Ezüstözés ... 320

Előadások.

Bartoniek Géza: A víz- és gázvezeték elektromos áramáról (közölve a 183. l.) ... 169
Beke Manó: A casus irreducibilis a harmadfokú egyenleteknél ... 92
Dischka Győző: Az ajaksípok hangjelenségei (közölve a 168. l.) ... 134
Fröhlich Izidor: «Miért esik mindig talpára a macska?» ... 91
Fuchs Károly: Megjegyzések a felületi feszültségre vonatkozó elterjedtebb kisérletekre ... 90

Lap

GRÚBER NÁNDOR: A benzin-szaturátor mint a vetítő-készülék fényforrása (közölve a 131. l.) ... 90
HORNISCHEK HENRIK: A kinematikai geometria egyik alaptételéről . . 91
KONKOLY MIKLÓS: A távcsövek optikai és mechanikai szerkezetéről ... 132
KÖVESLIGETHY RADÓ: Az efemeridák számításáról (közölve a 134. l.) ... 90
KÜRSCHÁK JÓZSEF: Maximum-minimum problemák elemi tárgyalása ... 90
RADOS IGNÁCZ: Az ívhosszak méréséről ... 90
SUTÁK JÓZSEF: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokról 169

HUNYADY JENŐ

EGYIK DETERMINÁNS-TÉTELÉRŐL.

Jelentsék ξ_{ab}, η_{ab}, ζ_{ab} az

$$(abc) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

determinánsnak következő aldeterminánsait:

$$\xi_{ab} = y_a z_b - z_a y_b \quad \eta_{ab} = z_a x_b - x_a z_b \quad \zeta_{ab} = x_a y_b - y_a x_b .$$

A szóban forgó tétel szerint, mely HUNYADY-nak: «*A másodfokú görbék és felületek meghatározásáról*» szóló értekezésének *), 12-ik lapján foglaltatik:

$$p = \begin{vmatrix} \xi_{bc}^2 & \eta_{bc}^2 & \zeta_{bc}^2 & \eta_{bc}\zeta_{bc} & \zeta_{bc}\xi_{bc} & \xi_{bc}\eta_{bc} \\ \xi_{ca}^2 & \eta_{ca}^2 & \zeta_{ca}^2 & \eta_{ca}\zeta_{ca} & \zeta_{ca}\xi_{ca} & \xi_{ca}\eta_{ca} \\ \xi_{ab}^2 & \eta_{ab}^2 & \zeta_{ab}^2 & \eta_{ab}\zeta_{ab} & \zeta_{ab}\xi_{ab} & \xi_{ab}\eta_{ab} \\ \xi_{ad}^2 & \eta_{ad}^2 & \zeta_{ad}^2 & \eta_{ad}\zeta_{ad} & \zeta_{ad}\xi_{ad} & \xi_{ad}\eta_{ad} \\ \xi_{bd}^2 & \eta_{bd}^2 & \zeta_{bd}^2 & \eta_{bd}\zeta_{bd} & \zeta_{bd}\xi_{bd} & \xi_{bd}\eta_{bd} \\ \xi_{cd}^2 & \eta_{cd}^2 & \zeta_{cd}^2 & \eta_{cd}\zeta_{cd} & \zeta_{cd}\xi_{cd} & \xi_{cd}\eta_{cd} \end{vmatrix}$$

determinánsnak értéke:

$$-(bcd)^2 (cda)^2 (dab)^2 (abc)^2.$$

Célom e tételnek új levezetését és egy egyszerű alkalmazását bemutatni.

---

* Értekezések a math. tudományok köréből. Kiadja a M. Tud. Akadémia, VII. köt., 18. szám, 1880.

1. Hogy p értékét kipuhatoljuk, képezzük a

$$q = \begin{vmatrix} x_a & 0 & 0 & 0 & z_a & y_a \\ 0 & y_b & 0 & z_b & 0 & x_b \\ 0 & 0 & z_c & y_c & x_c & 0 \\ x_d & 0 & 0 & 0 & z_d & y_d \\ 0 & y_d & 0 & z_d & 0 & x_d \\ 0 & 0 & z_d & y_d & x_d & 0 \end{vmatrix}$$

determinánssal való szorzatát. Ez:

$$\begin{vmatrix} . & . & . & \xi_{bc}(bcd) & \eta_{bc}(bcd) & \zeta_{bc}(bcd) \\ . & . & . & -\xi_{ca}(cda) & -\eta_{ca}(cda) & -\zeta_{ca}(cda) \\ . & . & . & \xi_{ab}(dab) & \eta_{ab}(dab) & \zeta_{ab}(dab) \\ 0 & -\eta_{ad}(dab) & -\zeta_{ad}(cda) & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{bd}(dab) & 0 & -\zeta_{cd}(bcd) & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{cd}(cda) & \eta_{cd}(bcd) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

vagyis

$$(bcd)(cda)(dab) \begin{vmatrix} \xi_{bc} & \eta_{bc} & \zeta_{bc} \\ \xi_{ca} & \eta_{ca} & \zeta_{ca} \\ \xi_{ab} & \eta_{ab} & \zeta_{ab} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\eta_{ad}(dab) & -\zeta_{ad}(cda) \\ \xi_{bd}(dab) & 0 & -\zeta_{cd}(bcd) \\ \xi_{cd}(cda) & \eta_{cd}(bcd) & 0 \end{vmatrix}$$

Itt egy ismeretes tétel szerint:

$$\begin{vmatrix} \xi_{bc} & \eta_{bc} & \zeta_{bc} \\ \xi_{ca} & \eta_{ca} & \zeta_{ca} \\ \xi_{ab} & \eta_{ab} & \zeta_{ab} \end{vmatrix} = (abc)^2$$

Az utolsó tényezőként szerepelő

$$\begin{vmatrix} 0 & -\eta_{ad}(dab) & -\zeta_{ad}(cda) \\ \xi_{bd}(dab) & 0 & -\zeta_{cd}(bcd) \\ \xi_{cd}(cda) & \eta_{cd}(bcd) & 0 \end{vmatrix}$$

determináns pedig azzal egyszerűsíthető, hogy sorait rendre megszorozzuk

$$-(bcd), \quad -(cda), \quad -(dab)\cdot$$

vel, oszlopaiból pedig kiemeljük

$(cda)\,(dab)$, $(dab)\,(bcd)$, $(bcd)\,(cda)$-t.

Akkor végre:

$$pq = -(bcd)^2(cda)^2(dab)^2(abc)^2 \begin{vmatrix} 0 & \eta_{ad} & \zeta_{ad} \\ -\xi_{bd} & 0 & \zeta_{bd} \\ -\xi_{cd} & -\eta_{cd} & 0 \end{vmatrix}.$$

HUNYADY tételének igazolására tehát elég kimutatnunk, hogy

$$q = \begin{vmatrix} 0 & \eta_{ad} & \zeta_{ad} \\ -\xi_{bd} & 0 & \zeta_{bd} \\ -\xi_{cd} & -\eta_{cd} & 0 \end{vmatrix}$$

Eme célból szorozzuk meg q eredeti alakjában a sorokat rendre

$$x_d,\quad -y_d,\quad z_d,\quad x_a,\quad -y_b.\quad z_c\text{-}$$

vel és oszszuk el az oszlopokat rendre

$$x_a x_d,\quad -y_b y_d,\quad z_c z_d,\quad 1,\quad -1,\quad 1\text{-}$$

gyel. Akkor

$$q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_a x_d & y_a x_d \\ 0 & 1 & 0 & -z_b y_d & 0 & -x_b y_d \\ 0 & 0 & 1 & y_c z_d & -x_c z_d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x_a z_d & x_a y_d \\ 0 & 1 & 0 & -y_b z_d & 0 & -y_b x_d \\ 0 & 0 & 1 & z_c y_d & -z_c x_d & 0 \end{vmatrix}.$$

Ha továbbá az első három sort rendre kivonjuk az utolsó háromból, akkor a következő hatodfokú determinánst nyerjük:

$$q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{ad} & \zeta_{ad} \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{bd} & 0 & \zeta_{bd} \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_{cd} & -\eta_{cd} & 0 \end{vmatrix},$$

mely közvetlenül a kivánt harmadfokú determinánsra redukálható.

2. A p determináns számos más determinánsnak átalakitására használható. Legyen pl.

$$r=\begin{vmatrix} x_ax_{a'} & y_ay_{a'} & z_az_{a'} & y_az_{a'}+z_ay_{a'} & z_ax_{a'}+x_az_{a'} & x_ay_{a'}+y_ax_{a'} \\ x_bx_{b'} & y_by_{b'} & z_bz_{b'} & y_bz_{b'}+z_by_{b'} & z_bx_{b'}+x_bz_{b'} & x_by_{b'}+y_bx_{b'} \\ x_cx_{c'} & y_cy_{c'} & z_cz_{c'} & y_cz_{c'}+z_cy_{c'} & z_cx_{c'}+x_cz_{c'} & x_cy_{c'}+y_cx_{c'} \\ x_dx_{d'} & y_dy_{d'} & z_dz_{d'} & y_dz_{d'}+z_dy_{d'} & z_dx_{d'}+x_dz_{d'} & x_dy_{d'}+y_dx_{d'} \\ x_ax_a & y_ay_a & z_az_a & y_az_a+z_ay_a & z_ax_a+x_az_a & x_ay_a+y_ax_a \\ x_bx_d & y_by_d & z_bz_d & y_bz_d+z_by_d & z_bx_d+x_bz_d & x_by_d+y_bx_d \end{vmatrix}$$

mint (abc) és hasonló alakú determinánsok egész függvénye előállítandó.

A p és r determinánsok szorzata:

$$\begin{vmatrix} (abc)(a'bc) & 0 & 0 & (bcd)(bcd') & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & -(abc)(cda) \\ 0 & 0 & (abc)(abc') & (dab)(d'ab) & 0 & 0 \\ 0 & (dab)(dab') & (cda)(c'da) & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & & -(bcd)(dab) & 0 \\ (cda)(cda') & (bcd)(b'cd) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

vagyis

$$-(bcd)(cda)(dab)(abc)\begin{vmatrix} (abc)(a'bc) & 0 & 0 & (bcd)(bcd') \\ 0 & 0 & (abc)(abc') & (dab)(d'ab) \\ 0 & (dab)(dab') & (cda)(c'da) & 0 \\ (cda)(cda') & (bcd)(b'cd) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ha itt az utolsó tényező gyanánt szereplő negyedfokú determinánsnak oszlopait rendre megszorozzuk

$$(bcd),\quad (cda),\quad (dab),\quad (abc)\text{-}$$

vel, annak soraiból pedig rendre kiemeljük

$$(bcd)(abc),\quad (abc)(dab),\quad (dab)(cda),\quad (cda)(bcd)\text{-t},$$

akkor továbbá

$$pr=-(bcd)^3(cda)^3(dab)^3(abc)^3\begin{vmatrix} (a'bc) & 0 & 0 & (bcd') \\ 0 & 0 & (abc') & (d'ab) \\ 0 & (dab') & (c'da) & 0 \\ (cda') & (b'cd) & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ámde

$$p=-(bcd)^3\,(cda)^3\,(dab)^3\,(abc)^3.$$

tehát

$$r=\begin{vmatrix} (a'bc) & 0 & 0 & (bcd') \\ 0 & 0 & (abc') & (d'ab) \\ 0 & (dab') & (c'da) & 0 \\ (cda') & (b'cd) & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

vagy kifejtve:

$$r=(cda')\,(dab')\,(abc')\,(bcd')-(a'bc)\,(b'cd)\,(c'da)\,(d'ab).$$

Az r determináns érték e szerint két igen egyszerű szerkezetű szorzatnak különbségével egyenlő.

3. Az r determinánsra vonatkozólag imént bebizonyított tétel számos ismeretes azonosságot, mint különös eseteket foglal magában.

Ha r-ben

$$a=3, \quad b=2, \quad c=3, \quad d=1$$
$$a'=2, \quad b'=2, \quad c'=1, \quad d'=1$$

és r első sorát felcseréljük a negyedikkel, harmadik sorát pedig az ötödikkel, úgy az

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & 2y_1z_1 & 2z_1x_1 & 2x_1y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & 2y_2z_2 & 2z_2x_2 & 2x_2y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & 2y_3z_3 & 2z_3x_3 & 2x_3y_3 \\ x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & z_2x_3+x_2z_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+z_3y_1 & z_3x_1+x_3z_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & z_1x_2+x_1z_2 & x_1y_2+y_1x_2 \end{vmatrix} = (123)^4$$

azonosságot * nyerjük.

Legyen másrészt r-ben

$$a=4, \quad b=3, \quad c=2, \quad d=1$$
$$a'=3, \quad b'=2, \quad c'=1, \quad d'=4$$

---

* V. ö. SCHOLTZ. A kúpszeleten fekvő hat pont és a hexagrammum mysticum tétele. Műegyetemi Lapok. II. köt. L. főleg a 67. lapot.

és cseréljük fel r-nek első, második és hatodik sorát, úgy hogy a második az elsőnek helyére jusson, a hatodik a második helyére, végre az utolsónak helyére az első. Akkor:

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & z_2x_3+x_2z_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+z_3y_1 & z_3x_1+x_3z_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & z_1x_2+x_1z_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & y_1z_4+z_1y_4 & z_1x_4+x_1z_4 & x_1y_4+y_1x_4 \\ x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & y_2z_4+z_2y_4 & z_2x_4+x_2z_4 & x_2y_4+y_2x_4 \\ x_3x_4 & y_3y_4 & z_3z_4 & y_3z_4+z_3y_4 & z_3x_4+x_3z_4 & x_3y_4+y_3x_4 \end{vmatrix} =$$
$$= (234)(341)(412)(123).$$

Ezen azonosság bebizonyitását Hunyady a *Műegyetemi Lapok* II. kötetében feladatul tűzte ki. Scholtz Ágoston úr megoldása ugyanott a 310. lapon foglaltatik.

Legyen végre

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = 1, \quad d = 5$$
$$a' = 3, \quad b' = 6, \quad c' = 3, \quad d' = 6$$

úgy a sorok alkalmas felcserélése után a következő azonosságot nyerjük:

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & z_2x_3+x_2z_3 & x_2y_3+y_2x_3 \\ x_3x_1 & y_3y_1 & z_3z_1 & y_3z_1+z_3y_1 & z_3x_1+x_3z_1 & x_3y_1+y_3x_1 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & y_1z_2+z_1y_2 & z_1x_2+x_1z_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ x_5x_6 & y_5y_6 & z_5z_6 & y_5z_6+z_5y_6 & z_5x_6+x_5z_6 & x_5y_6+y_5x_6 \\ x_6x_4 & y_5y_4 & z_6z_4 & y_6z_4+z_6y_4 & z_6x_4+x_6z_4 & x_6y_4+y_6x_4 \\ x_4x_5 & y_4y_5 & z_4z_5 & y_4z_5+z_4y_5 & z_4x_5+x_4z_5 & x_4y_5+y_4x_5 \end{vmatrix} =$$
$$= (135)(146)(234)(256) - (134)(156)(235)(246).$$

Ezt Hunyady a *Műegyetemi Lapok* idézett kötetében megjelent *«A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének egy különös alakjáról»* cz. értekezésében bizonyitotta be.

Kürschák József.

A CARNOT-CLAUSIUS-FÉLE TÉTEL EGYSZERŰSÍTETT LEVEZETÉSE.

Ma már szinte egészen általánossá vált a CLAUSIUS-félc tapasztalati postulatumra alapítani a CARNOT-CLAUSIUS-félc thermodynamikai tétel levezetését s a különböző szerzőktől használt levezetési módok úgyszólván csak mathematikai stylusban különböznek egymástól. Mindannyinak az eljárásában a következő művelet-csoport rejlik:

1. Kimutatják, hogy a CARNOT-féle körfolyamatban az egyik hőforrásról a rendszerbe bejutó s a másikon a rendszerből kijutó hőquantum hányadosa a két hőforrás hőfokának a rendszertől független functiója.

2. Kimutatják, hogy ez a functió az egyik hőfok functiójának és a másik hőfok ugyanazon alakú functiójának a hányadosa. Ezt vagy úgy eszközlik, hogy egy bizonyos testfajhoz, a gázokhoz folyamodnak (BERTRAND, CHRISTIANSEN stbk.), vagy ezen különleges segedelem nélkül állapítják meg (LIPPMANN, KIRCHHOFF stbk.).

3. Tetszőleges más körfolyamatot adiabatikus és isothermikus elemi componensekre bontva, kimutatják, hogy a rendszerbe jutó hő-elemeknek a hozzájuk tartozó hőfokok iménti functióival való osztatai eltűnő összeget alkotnak, a miből aztán következik, hogy ezen osztatok függvény-elemek.

Már a levezetés tervének e csupán öregéből vázolt képe is nagyon változatos; teljesen kitöltve, a részletek oly halmazatát mutatja, hogy a reductiójáról való gondoskodás megérdemelni látszik a fáradságot.

Egységesebb levezetést közöl W. VOIGT göttingai professzor,

épen most megjelent igen tartalmas munkájában.* De nem egészen szabatos a levezetése. Nevezetesen, mint magától értődő dolgot, előre felteszi, hogy egy test adiabatikus változásának a differentialis egyenlete csak egy integrálissal bír (502. és 503. l.) Azonban tudvalevőleg, mihelyt a változók száma kettőnél nagyobb, már arra, hogy csak egy integrális létezzék s a differentialis polynomium egytagúra legyen redukálható; mihelyt a változók száma négynél nagyobb, már arra is, hogy csak két integrális létezzék s a differentialis polynomium két tagúra legyen redukálható stb.; a polynomium coëfficiensei bizonyos megszorításoknak kötelesek eleget tenni, a melyeket már PFAFF meghatározott. Így a jelzett előzetes feltevés nem lévén analytikai szükségesség, tapasztalati alappal kell bírnia.

Tényleg a CLAUSIUS-féle postulatumra alapítható és pedig épen úgy egy egész testrendszerre nézve, mint egyetlen egyszerű testre nézve. Miután pedig már egyszer helyesnek elfogadtuk, belőle puszta analysis rendjén következik a CARNOT-CLAUSIUS-féle tétel. Ezeknek a megmutatásával foglalkozik az itt következő közlemény.

1. Definitiók

Valamely folyamat-rendszerben határozzák meg egy test állapotát a test hőfoka ϑ, még a, b, c, stb. paraméterek s legyenek a folyamatok megfordíthatók, minélfogva a testbe jutó hő elemi kifejezésének

$$dQ = \Theta d\vartheta + A da + B db + \ldots$$

a coëfficiensei Θ, A, B, ... csupán az állapot-határozók ϑ, a, b, stb. functiói és ezek változási módjától teljesen függetlenek.

Az a, b, ... paraméterek bizonyosan megválaszthatók úgy, még pedig végtelen sokféleképpen, hogy a Θ coëfficiens mindig positiv legyen. Pl. egy tengely körül forgható mágnes állapot-határozói gyanánt a hőfok, nyomás és forgató momentum használtatván, a

* W. VOIGT: Kompendium der theoretischen Physik. I. Band. Leipzig. Verlag von Veit & Comp. 1895.

megfelelő θ negativ is lehet; ha azonban a forgató momentum helyett az elfordulás szögét vezetjük be, akkor a megfelelő θ legalább a rendelkezésünkre álló viszonyok közt mindig pozitiv. *Úgy legyenek megválasztva minden testhez az a, b, stb. paraméterek, hogy a θ mindig pozitiv legyen.*

2. Lemma.

Adiabatikusan, azaz puszta mechanikai műveletekkel egy test vagy testrendszer sem juttatható oly állapotba, a melybe puszta hőközlésscl, azaz hőnek be- vagy kivezetése által pusztán a hőfok megváltozásával juthat.

Tegyük fel ugyanis az ellenkezőt. Akkor az állapot-határozók úgy volnának adiabatikusan változtathatók, hogy végül, csak a hőfok legyen más, mint a mi eleinte volt, a többi állapot-határozók pedig kezdeti értékeikbe tértek legyen vissza. Most az új állapotból hőközléssel, pusztán a hőfokot változtatva terelvén vissza a test-rendszert a maga kezdeti állapotába, minthogy a θ értékek pozitivek, a folyamat irányulása szerint csupán kiadott volna, vagy csupán felvett volna pozitiv hőt a test-rendszer, a mely az első esetben egészen mechanikai erélyből keletkezett, a másodikban egészen mechanikai erélylyé alakult volna. Ez minden tapasztalással ellenkezik.

Ellenkezik a CLAUSIUS-féle postulatummal is: Oly módon eszközöljük a hő-közlést, hogy ennek a tartamára egy eddig külön tartott testet pl. gázt is csatolunk a rendszerhez s addig változtatjuk e gáz nyomását, míg a test-rendszerünk az ő régi fokához vissza nem tér. Ezután a gázt is visszatereljük kezdeti állapotába, még pedig egy adiabatikus és egy isothermás vonalon s most még egy CARNOT-féle körfolyamatot is végeztetünk vele, olyant, hogy a mindössze létrejött mechanikai erély $= 0$ legyen. A folyamatok összesegének a végeredménye abból áll, hogy a járat irányulása szerint magasabb hőforrásról alacsonyabbra, vagy alacsonyabbról magasabbra jutott hő . . .

3. Corollarium.

Adiabatikus változásban a hőfok minden pillanatban teljesen meg van határozva a többi állapot-határozók időleges értékeivel és ezek változásának a módjától folyvást független.

Mert másként a többi állapot-határozók minden olyan adiabatikus változásában, melyben ezek kezdeti értékeikhez térnek vissza, a hőfok nem térne vissza az ő kezdeti értékéhez, a mi a lemmánkkal ellenkezik.

Ugyanez a corollarium így is fogalmazható: Egy test vagy testrendszer adiabatikus változásának a differentiális egyenletéhez u. m.

$$\theta d\vartheta + Ada + Bdb + \cdots = 0,$$

illetőleg

$$\Sigma\theta \,.\, d\vartheta + \Sigma(Ada + Bdb + \cdots) = 0$$

egyetlen integrális egyenlet tartozik, s=const., illetőleg S=const. (másként a hőfok a többi állapot-határozóknak nem csupán az értékeitől függene, hanem egymáshoz való functionális viszonyától is) és ekként mindig

$$\theta d\vartheta + Ada + Bdb + \cdots = \varphi ds, \qquad 1)$$

illetőleg

$$\Sigma\theta \,.\, d\vartheta + \Sigma(Ada + Bdb + \cdots) = \Sigma\varphi ds = \Phi dS, \qquad 2)$$

a hol a φ és s-féle mennyiségek csupán az illető test állapot-határozóinak az értékeitől függő functiók. Φ és S csupán a rendszerbéli testek állapot-határozóinak az értékeitől függő functiók.

4. Theorema.

Megfordítható folyamatokban a testektől befogadott hő elemeinek mindig vannak integrátiós osztóik és ezek egyike a hőfoknak minden testre nézve ugyanazon alakú functiója.

A tantétel első része 1)-ből közvetlenül kiolvasható. A mi a második részét illeti, ennek a symbolikus kifejezése, azzal a hozzáadással, hogy az f functió miuden testre nézve ugyanaz lehet:

$$\varphi = f(\vartheta)\,\psi(s).$$

Ez a 2)-ből következik. Ugyanis:

Két test változásában

$$\varphi_1 ds_1 + \varphi_2 ds_2 = \Phi dS. \qquad 3)$$

Ha az a_1 paraméter helyett s_1, az a_2 helyett s_2 vezettetnek be, úgy

$$dS = \frac{\partial S}{\partial s_1} ds_1 + \frac{\partial S}{\partial s_2} ds_2 + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial S}{\partial b_1} \partial b_1 + \frac{\partial S}{\partial b_2} \partial b_2 + \cdots$$

Összehasonlítva azt 3)-mal és megfontolva, hogy s_1, s_2, ϑ, b_1, b_2, stb. független változók, látjuk, hogy

$$\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_2} = 0, \ldots$$

tehát, hogy S csupán s_1 és s_2 functiója. Másfelől

$$\varphi_1 = \Phi \frac{\partial S}{\partial s_1}, \qquad \varphi_2 = \Phi \frac{\partial S}{\partial s_2}$$

tehát φ_1 és φ_2 hányadosa is csak s_1 és s_2 functiója. Így, minthogy

$$\varphi_1 = \varphi_1(s_1, \vartheta, b_1, c_1, \ldots),$$
$$\varphi_2 = \varphi_2(s_2, \vartheta, b_2, c_2, \ldots),$$

kell, hogy tehető legyen

$$\varphi_1 = f(\vartheta)\psi_1(s_1), \quad \varphi_2 = f(\vartheta)\psi_2(s_2).$$

Farkas Gyula.

ALGEBRAI VIZSGÁLATOK A FÜGGVÉNYTANBAN.

(Második közlemény.)

II. Eisenstein tételének általánosítása.

Ha a

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

racionális együtthatókkal biró hatványsor nem tesz eleget az EISENSTEIN tételében kifejezett feltételnek, akkor az nem is lehet egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek gyöke. Ennek felismerése önkéntelenül feltámasztja bennünk azt a kérdést: vajjon nem határozhatók-e meg oly feltételek, a melyeknek nem teljesülése esetében kimondhatjuk, hogy racionális együtthatókkal biró sorunk még egész számú együtthatókkal biró algebrai differenciálegyenletnek sem képezheti megoldását? Erre a kérdésre válaszképen kimutatom a következő tételt:

A

$$\mathfrak{P}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

racionális együtthatókkal biró hatványsor csakis akkor tehet eleget az

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)})=0$$

egész számú együtthatókkal biró i-edrendű algebrai differenciálegyenletnek, ha x-nek van oly i-ed, vagy i-nél alacsonyabb fokú pl. (i—r)-edfokú egész függvénye, g(x), a melynek együtthatói $c_0, c_1, \ldots, c_{i-r}$-nek egész számú együtthatókkal biró függvényei, és a

$$g(n) \cdot c_n$$

racziondlis szám nevezőjében csak oly törzstényezők fordulhatnak elő, a melyek

$$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$$

nevezőiben is előfordulnak.

Heine egyik értekezése alapján* megjegyzem, hogy ha a racziondlis együtthatókkal biró hatványsorunk semmiféle egész számú együtthatókkal biró algebrai egyenletnek, vagy algebrai differenciál-egyenletnek nem tesz eleget, akkor irracziondlis együtthatókkal biró egyenletnek sem tehet eleget. Ha ugyanis eleget tenne oly i-edrendü differenciálegyenletnek, a melyben

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

a természetes racziondlitási tartományban egymástól lineárisan független irracziondlis számok fordulnak elő, akkor eleget kellene tennie egész számú együtthatókkal biró egyenletnek is. Rendezzük ugyanis azt az egyenletet, a melynek sorunk eleget tesz az irracziondlis számok szerint, akkor annak általános alakja:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n = 0, \qquad \alpha)$$

hol az f-ek

$$x, y, y', \ldots, y^{(i)}$$

különböző egész számú együtthatókkal biró függvényei.

Ha most racziondlis együtthatókkal biró hatványsorunkat a fentebbi egyenletbe behelyettesítjük, mindegyik f számára egy-egy végtelen sort nyerünk, a melynek együtthatói racziondlis számok; e végtelen sorok legyenek:

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1 + B_1 x + C_1 x^2 + \cdots, \\ f_2 &= A_2 + B_2 x + C_2 x^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= A_n + B_n x + C_n x^2 + \cdots; \end{aligned}$$

úgy, hogy az α) alatti relációra való tekintettel, ehhez a relációhoz jutunk

---

* Crelle Journal 48. köt. 1854.

$$\begin{aligned}&(A_1a_1+A_2a_2+\cdots+A_na_n)+\\&+(B_1a_1+B_2a_2+\cdots+B_na_n)x+\\&+(C_1a_1+C_2a_2+\cdots+C_na_n)x^2+\\&+\ \ldots\ldots\ldots\ldots=0,\end{aligned}$$

a mely x minden értékénél ki van elégítve; de minthogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ irracionális számok a természetes raczionálitási tartományban lineárisan függetlenek az

$$\begin{aligned}&A_1a_1+A_2a_2+\cdots+A_na_n=0\\&B_1a_1+B_2a_2+\cdots+B_na_n=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

egyenlőségek maguk után vonják az

$$\begin{aligned}&A_1=0,\ B_1=0,\ C_1=0,\ \ldots\\&A_2=0,\ B_2=0,\ C_2=0,\ \ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

egyenlőségeket, a miből következik, hogy sorunk az

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \ldots,\ f_n=0$$

egész számú együtthatókkal biró egyenleteknek is eleget tesz, ennélfogva:

ha valamely raczionális együtthatókkal biró hatványsor nem tehet eleget egész számú együtthatókkal biró algebrai differenciálegyenletnek, akkor irraczionális együtthatókkal biró egyenletnek sem tehet eleget.

E megjegyzés után lássuk kimondott tételünk bebizonyitását.

i-edrendü differenciálegyenletünk ama tagjainak összegét, a melyek az

$$x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(i-s)}\qquad (s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i)$$

változóktól függnek, jelöljük röviden Φ_{i-s}-el; mig azokét, a melyek csak x-től függnek, $\psi(x)$-el, akkor differenciálegyenletünk:

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(i)})\equiv\sum_{s=0}^{i}\Phi_{i-s}+\psi(x)=0. \qquad 12)$$

Rendezzük Φ_{i-s}-t x hatványai szerint és legyen:

$$\Phi_{i-s} \equiv x^{m_s}\varphi_{i-s,0} + x^{m_s+1}\varphi_{i-s,1} + \cdots + x^{m_s+n_s}\varphi_{i-s,n_s}, \qquad 13)$$

hol m_s x legalacsonyabb, $m_s + n_s$ pedig legmagasabb hatványkitevője; a φ_{i-s}-ek pedig az értelmezés szerint

$$y, y', \ldots, y^{(i-s)}$$

függvényei. Az adott differenciálegyenlet részletes alakja tehát

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(i)}) \equiv \sum_{s=0}^{i}(x^{m_s}\varphi_{i-s,0} + x^{m_s+1}\varphi_{i-s,1} + \cdots + x^{m_s+n_s}\varphi_{i-s,n_s}) + \psi(x) = 0. \qquad 14)$$

Ha ebbe az egyenletbe azt a racionális együtthatókkal biró hatványsort, mely neki eleget tesz, behelyettesitem, azonosan zérust nyerek; tehát annak bármilyrendű differenciálhányadosa szintén zérus. Megvizsgálom egyenletünk többtagúj ának n-edrendű differenciálhányadosát az $x=0$ helyen.

Az I. közlemény kifejtései szerint Φ_{i-s}-nek $n!$-sal osztott n-edrendű differenciálhányadosa az $x=0$ helyen:

$$\left[\frac{d^n\Phi_{i-s}}{dx^n}\right]_{x=0} = \sum_{j=0}^{n-m_s}\frac{1}{(n-m_s-j)!}\cdot\left[\frac{d^{n-m_s-j}\varphi_{i-sj}}{dx^{n-m_s-j}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{(n-m_s)!}\left[\frac{d^{n-m_s}\varphi_{i-s,0}}{dx^{n-m_s}}\right]_{x=0} + \sum_{j=1}^{n-m_s}\frac{1}{(n-m_r-j)!}\cdot\left[\frac{d^{n-m_s-j}\varphi_{i-sj}}{dx^{n-m_s-j}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{(n-m_s)!}\left[y^{(i-s+n-m_s)}\cdot\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0} + [b_s(y, y', \ldots, y^{(i-s+n-m_s-1)})]_{x=0}$$

$$= \frac{(i-s+n-m_s)!}{(n-m_s)!}C_{i-s+n-m_s}\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0} + B_s(C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{i-s+n-m_s-1}), \qquad 5)$$

hol

$$\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0}$$

$C_0, C_1, \ldots, C_{i-s}$-nek, B_s pedig $C_0, C_1, \ldots, C_{i-s+n-m_s-1}$-nek egész számú együtthatókkal biró racionális egész függvényei.

Jelöljük $\psi(x)$-ben x^n egész számú együtthatóját d_n-nel, akkor

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0}=d_n.$$

Tehát az i-edrendű differenciálegyenlet többtagújának $n!$-sal osztott n-edrendű differenciálhányadosa az $x=0$ helyen:

$$\sum_{s=0}^{i}\frac{(i-s+n-m_s)!}{(n-m_s)!}C_{i-s+n-m_s}\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0}+$$

$$\sum_{s=0}^{i}B_s(c_0, c_1, \ldots, c_{i-s+n-m_s-1})+d_n=0. \qquad 16)$$

Ha a következő jelöléseket hozzuk be:

$$\left[\frac{\partial\varphi_{i-s,0}}{\partial y^{(i-s)}}\right]_{x=0}=a_{i-s},$$

$$B_s(c_0, c_1, \ldots, c_{i-s+n-m_s-1})=\beta_{i-s+n-m_s-1},$$

$$\frac{(i-s+n-m_s)!}{(n-m_s)!}=(n-m_s+1)(n-m_s+2)\ldots(n-m_s+i-s)=\omega_{i-s}, \qquad 17)$$

egyenletünket a következő egyszerűbb alakban írhatjuk:

$$\sum_{s=0}^{i}\omega_{i-s}a_{i-s}c_{i-s+n-m_s}+\sum_{s=0}^{i}\beta_{i-s+n-m_s-1}+d_n=0. \qquad 18)$$

Az első összegből válaszszuk ki azokat a tagokat, a melyekben c indexe a legnagyobb.

Midőn $(i-s+n-m_s)$-ben s helyébe sorban

$$0, 1, 2, \ldots. i$$

helyettesítünk, a számoknak oly sorát nyerjük, a melyben pl. az $(r+1)$-ik legyen az első legnagyobb szám, az utána következők részint vele egyenlők, részint kisebbek, azaz

$$i-s+n-m_s<i-r+n-m_r,$$

ha

$$s<r;$$

továbbá

$$i-s+n-m_s\leqq i-r+n-m_r,$$

ha

$$s>r.$$

Miután az első summából azokat a tagokat, melyekben c indexe kisebb $(n-m_r+i-r)$-nél kiválasztottuk, jelöljük a

$$\sum_{s=0}^{i}\beta_{i-s+n-m_s-1}+d_n$$

kifejezéssel való összegüket röviden $a_{i-r+n-m_r-1}$-el, mely

$$c_0, c_1, \ldots, c_{i-r+n-m_r-1}$$

egész számú együtthatókkal biró függvénye. Ezek után:

$$\sum_{s=r}^{i}\omega_{i-s}a_{i-s}c_{i-s+n-m_s}+a_{i-r+n-m_r-1}=0,$$

hol annak az a-nak helyébe, a melyben c szorzójának indexe kisebb $(i-r+n-m_r)$-nél, zérus képzelendő, minthogy az ilyen tagokat már $a_{i-r+n-m_r-1}$-be foglaltuk össze. Emeljük most ki az összegből mint közös tényezőt $c_{i-r+n-m_r}$-t, akkor lesz:

$$c_{i-r+n-m_r}\sum_{s=r}^{i}\omega_{i-s}a_{i-s}+a_{i-r+n-m_r-1}=0.$$

Rövidség kedvéért legyen:

$$i-r+n-m_r=k,$$

akkor

$$\omega_{i-s}=k(k-1)\ldots[k-(i-s-1)]$$

tehát

$$\sum_{s=r}^{i}\omega_{i-s}a_{i-s}=\omega_{i-r}a_{i-r}+\omega_{i-r-1}a_{i-r-1}+\cdots+\omega_0a_0$$

k-nak $(i-r)$-edfokú egész függvénye, a melynek együtthatói

$$c_0, c_1, \ldots, c_{i-r}$$

egész számú együtthatókkal biró függvényei, tehát:

$$\sum_{s=r}^{i}\omega_{i-s}a_{i-s}=a_0k^{i-r}+a_1k^{i-r-1}+\cdots+a_{i-r-1}k+a_{i-r}=g(k), \quad 19)$$

hol

$$a_0, a_1, \ldots, a_{i-s}$$

$c_0, c_1, \ldots, c_{i-s}$*-nek egész számú együtthatókkal biró függvényei.*

Az i-edrendű differenciálegyenlet többtagújának $n!$-sal osztott n-edrendű differenciálhányadosának végleges alakja az $x=0$ helyen:

$$c_k g(k)+a_{k-1}=0 \qquad 20)$$

kimondja, hogy

$$c_k g(k)$$

nevezőjében csak oly törzsténye zők fordulhatnak elő, a melyek

$$c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$$

nevezőiben is előfordulnak; s ezzel fejezetünk elején kimondott tételünk igazolást nyert.

Ha

$$g(k)=0,$$

akkor a 20) alatti egyenletünket következőképen rendezem:

$$c_k g(k)+c_{k-1}g_1(k-1)+\cdots+c_{k-j}g_j(k-j)+\varphi(c_0,\ldots,c_{k-j-1})=0, \qquad 21)$$

hol általánosan g_j $k-j$-nek i-nel alacsonyabb fokú raczionális függvénye, minthegy azokban a tagokban, melyekben c_{k-j} előfordul, az együttható általános alakja egy állandó faktortól eltekintve:

$$\frac{(i-s+n-m_s-j)!}{(n-m_s-j)!}$$
$$=(n-m_s-j+1)(n-m_s-j+2)\ldots(n-m_s-j+i-s)$$
$$=(k-j)(k-j-1)\ldots[k-j-(i-s-1)].$$
$$\left(\begin{matrix}k=i-s+n-m_s\\ i>s>0\end{matrix}\right)$$

Mindegyik c együtthatója nem lehet zérus, mert ekkor a differenciálegyenlet maga is azonosan zérus lenne; legyen tehát c_{k-j} együtthatója az első, a mely zérustól különböző, ennélfogva

$$c_{k-j}\, g_j(k-j)$$

oly raczionális szám, a melynek nevezőjében nem fordulhatnak elő más törzsténye zők, mint a melyek a $(k-j)$-nél alacsonyabb indexű c-k nevezőjében is előfordulnak.

A jelen közlemény bevezetésében kimondott tételünk tehát minden esetben érvényes.

III. Példák.

1. *Példa.* Az

$$y=1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{(n+1)!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1}+\cdots$$

hatványsor eleget tehet már egy másodrendű algebrai differenciálegyenletnek, mert a jelen esetben a

$$g(k)=k(\gamma+k-1)=k^2+(\gamma-1)k$$

függvény másodfokú.

Miként ismeretes sorunk segitségével definiált függvényhez tartozó algebrai differenciál-egyenlet:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0.$$

2. *Példa.* Az

$$y=1+\frac{\alpha\beta\gamma}{\vartheta\varepsilon}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\vartheta(\vartheta+1)}\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2+\cdots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{(n+1)!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\vartheta(\vartheta+1)\ldots(\vartheta+n)}\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}{\varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+n)}x^{n+1}+\cdots$$

hatványsor harmadrendűnél alacsonyabb rendű differenciálegyenletnek nem tehet eleget; mert a jelen esetben a

$$g(k)=k(k+\vartheta-1)(k+\varepsilon-1)=k^3+k^2(\vartheta+\varepsilon-2)+k(\vartheta-\ )(\varepsilon-1)$$

függvény harmadfokú.

Könnyű meggyőződni arról, hogy sorunk eleget tesz a következő harmadrendű differenciálegyenletnek:

$$(1-x)x^2\frac{d^3y}{dx^3}+[\vartheta+\varepsilon+1-(\alpha+\beta+\gamma+3)x]x\frac{d^2y}{dx^2}\cdot$$
$$+[\vartheta\varepsilon-x(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1)]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0.$$

3. *Példa. Az*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(a+n)^n}$$

hatványsor semmiféle algebrai differenciálegyenletnek tehet eleget.

Megjegyzések. GOMES TEXEIRA* és HURWITZ** szintén foglalkoztak EISENSTEIN tételének általánosításával, csakhogy míg az előbbi levezetésébe akaratlanul speczializálást csusztat be, addig az utóbbi eljut ugyan egy bizonyos $g(x)$ függvényhez, de annak sem fokáról nem számol be, sem alakjának változatlanságáról, mely abban áll, hogy $g(x)$ alakja x minden értéke mellett ugyanaz marad.

Sutáк József

---

* Annales de l'école normale T. IV.

** Annales de l'école normale. T. VI.

ÉSZREVÉTELEK AZ «EGY HELYZETGEOMETRIAI TÉTEL A TETRAÉDER ÉLEIRŐL» CZÍMŰ CZIKKHEZ.

E lapok 1894. évfolyamának 263. lapján SKOPÁL úr a következő tételt közölte:

«*Ha valamely e egyenes az LMNP tetraéder egyik élét sem metszi, a tetraéder három kitérő élpárjára nézve az e egyenessel konjugált negyedik harmonikus egyenesek f, g, h az e egyenessel együtt egy ugyanazon hiperboloidnak ugyanazon rendszerbeli alkotói*».

Legyen szabad e tételnek következő igen egyszerű bebizonyítását bemutatnom.

Ha az $f, \quad g, \quad h$

egyenesek az $LMNP$ tetraédernek

$$LM, NP; \qquad LN, MP; \qquad LP, MN$$

átellenes élpárjait az egyenestől harmonikusan választják el, akkor az e, f, g egyeneseken keresztül menő (efg) hiperboloidra vonatkozólag az

$$LM, NP; \qquad LN, MP$$

egyenespárok poláris vonatkozásban vannak. Ebből tüstént következik, hogy az $LMNP$ tetraéder mindegyik szögpontjának polársikja, a tetraéder átellenes sikja, tehát az $LMNP$ tetraéder az (efg) hiperboloidnak egyik polártetráédere és az

$$LP, MN$$

tetraéderélek szintén (efg)-nek polárisai. De ha az LP, MN egyenesek az (efg) hiperboloidnak polárisai, akkor az a h egyenes,

mely a hiperboloidon fekvő e egyenest LP, MN-től harmonikusan elválasztja, a hiperboloidnak oly alkotója, mely ugyanahhoz a rendszerhez tartozik, mint az e alkotó. Ezzel az idézett tétel be van bizonyitva, valamint következő kiegészitése is, hogy: az *$LMNP$ tetraéder a hiperboloidra nézve polártetraéder.*

Az $LMNP$ tetraéder egyik lapja, pl. az LMN lap, az e, f, g, h egyeneseket négy pontban E, F, G, H-ban metszi, melyek oly helyzetüek, hogy az

$$E, F; \quad E, G; \quad E, H$$

pontpárok az LMN háromszög

$$L, \quad M, \quad N$$

szögpontjait az átellenes

$$MN, \quad NL, \quad LM$$

oldalaktól harmonikusan elválasztják. Ennélfogva az $EFGH$ négyszögnek átlós háromszöge LMN, tehát:

a tetraéder lapjai az e, f, g, h egyeneseket négy-négy pontban metszik, a mely négy négyszögnek szögpontjai; e négyszögek átlós-háromszögei, a tetraédert határoló háromszögek.

Ebből látható, hogy az F, G pontok az L szögpontot és MN oldalt is egymástól harmonikusan választják el.

Ha az $LMNP$ tetraéder MNP lapja az e, f, g, h egyeneseket az E', F', G', H' pontokban metszi, akkor $E'F'G'H'$ négyszögnek az MNP átlóshárom szöge és az F', G' pontok a P szögpont és az MN oldaltól szintén harmonikusan vannak elválasztva.

Minthogy az FG és $F'G'$ egyenesek az

$$f, \quad g, \quad LP, \quad MN$$

egyeneseknek metszői és az FG, $F'G'$-ön fekvő metszéspontok harmonikus négyes csoportot alkotnak, azért az f, g egyenesek a tetraéder LP, MN éleitől harmonikusan vannak elválasztva.

Ugyanezen az uton kimutatható, hogy az f, h egyenesek a tetraéder LN, MP éleitől harmonikusan vannak elválasztva.

E szerint az

$$e, \quad g, \quad h$$

egyenesek az *LMNP* tetraéder

$$LM, NP; \quad LP, MN; \quad LN, MP$$

átellenes éleit *f*-től harmonikusan választják el, vagyis: az *e*, *g*, *h* egyenesek az *LMNP* tetraéder és az *f* egyenes által ugyan oly módon vannak meghatározva, mint az *f*, *g*, *h* egyenesek az *LMNP* tetraéder és az *e* egyenes által.

Az idézett tétel e szerint még következőkkel egészíthető ki:

1. *Az e, f, g, h egyenesek bármelyike a másik hármat ugyanazon a módon határozza meg az LMNP tetraéderrel, mint az e egyenes az f, g, h-t.*

2. *Az LMNP tetraéder az e, f, g, h egyeneseken keresztül menő hiperboloid polártetraédere.*

Nem kevésbbé érdekes, sőt ilynemű geometriai vizsgálatoknál el sem hagyható, azokat az *elfajulásokat* tekintetbe venni, a melyek akkor következnek be, ha az *e* egyenes a tetraéder éleket metszi. Az erre vonatkozó esetek a következők lehetnek:

Az *e* egyenes az *LMNP* tetraédernek

1. *egyik élét metszi;*

2. *két átellenes élét metszi;*

3. *a tetraédernek egyik szögpontján megy keresztül;*

4. *a tetraéder egyik lapjában fekszik;*

5. *a tetraéder egyik szögpontján megy keresztül és annak egyik lapjában fekszik;*

6. *a tetraéder egyik élével egyesül.*

1. Ha az *e* egyenes a tetraédernek *LP* élét metszi egy *U* pontban és *V* az a pont, mely *U*-t az *L* és *P* pontoktól harmonikusan elválasztja, akkor az *f*, *g* egyenesek egymást *V*-ben az *e*, *h* egyenesek pedig *U*-ban metszik. Az *e*, *f*, *g*, *h* egyeneseknek *E*, *F*, *G*, *H* metszéspontjai az *LMN* síkkal szintén oly négyszögnek szögpontjai, a melynek átlós háromszöge *LMN*. E négyszög *FG*, *EH* oldalai az *L* ponton mennek keresztül és ezért az

$$f \equiv FV. \quad g \equiv GV, \quad e \equiv EU, \quad h \equiv HU$$

egyenesekben áthelyezett [*fg*], [*eh*] síkok egymást az $LP \equiv UV$ egyenesben metszik.

A hiperboloid ez esetben síkpárrá [fg], [eh] fajul el, a melyre vonatkozólag az LMNP tetraéder szintén polártetraéder, mert [*fg*], [*eh*], *LMP, NMP* síkok harmonikus négyescsoportot alkotnak.

2. Ha az *e* egyenes az *LMNP* tetraéder *LP* élét az *U* pontban, *MN* élét az U_1 pontban metszi és a *V*, V_1 pontokat

$$(LPUV) = (MMU_1V_1) = -1$$

relációkból határozzuk meg, akkor

$$f \equiv g \equiv VV_1, \qquad e \equiv h \equiv UU_1.$$

Az *e, f, g, h* egyeneseken átmenő hiperboloidok száma ez esetben ∞^3, melyek egy háromdimenziós lineáris rendszert alkotnak. Az *LMNP* tetraéder nem lesz mindezekre a hiperboloidokra vonatkozólag polártetraéder.

Ha az *LMNP* egy ily hiperboloidra vonatkozólag polártetraéder, tehát *LP, MN* egy poláris pár, mely a hiperboloidot az *U, V* és U_1, V_1 pontokban metszi, akkor a hiperboloid az UU_1VV_1 térbeli négyszög oldalain megy keresztül. S viszont az UU_1VV_1 térbeli négyszög oldalain keresztül menő ∞^1 hiperboloidra vonatkozólag — mely lineáris sort alkot, — az *LMNP* polártetraéder. Az UU_1VV_1 négy oldalai az *e, f, g, h* egyeneseknek is tekinthetők, mert az UV_1 és VU_1 egyenesek oly *h* egyenesek, a melyek az *e*-t a tetraéder *LP, MN* átellenes éleitől harmonikusan elválasztják.

E szerint: *ha az e egyenes az LMNP tetraéder egy átellenes élpárját metszi, akkor az e, f, g, h egyeneseken keresztül menő hiperboloidok, melyekre vonatkozólag a tetraéder polártetraéder felületsort alkotnak.*

3. Ha *e* az *LMNP* tetraédernek egyik szögpontján, pl. a *P*-n megy keresztül a nélkül, hogy az *e* egy tetraéder lapban feküdnék, akkor az *e, f, g, h* egyenesek *E, F, G, H* metszéspontjai az *LMN* tetraéderlappal oly négyszög szögpontjai, melynek átlóshárom-szöge *LMN.*

Az e, f, g, h egyeneseken átmenő hiperboloidok ekkor másodrendű kúppá fajulnak; e másodrendű kúpok oly sort alkotnak, a melynek LMNP polártetraédere.

4. A midőn az *e* egyenes az *LMN* síkban fekszik, a nélkül, hogy

az L, M, N pontok egyikén keresztül menne, az f, g, h egyenesek is abban a síkban maradnak és e-vel együtt egy oly négyoldalnak oldalait képezik, melynek átlóháromszöge LMN.

Az e, f, g, h egyeneseken keresztül menő hiperboloidok ekkor ∞^1 számú másodrendű sugársorrá fajulnak el, melyeknek polártetraédere $LMNP$.

5. Ha az e egyenes a P ponton megy át és az MNP síkban fekszik, és MN egyenest egy U_1 pontban metszi, akkor az e, f, g, h egyenesek a PU_1, PV_1 egyenesbe kerülnek, hol $(MNU_1V_1)=-1$.

A hiperboloidok ekkor elfajult másodrendű kúpokat, valamint elfajult másodrendű sugársorokat alkotnak, melyekre vonatkozólag $LMNP$ polártetraéder. A kúpok érintő síkjai a PU_1, PV_1 alkotók szerint LP egyenesen mennek keresztül; ellenben a másodrendű sugársorok érintéspontjai a PU_1, PV_1 sugarakon az U_1, V_1 pontok.

6. Ha végre e-t a tetraéder PN élében veszszük fel, akkor mindazon hiperboloidok, melyek az e-n átmennek és a melyekre nézve az $LMNP$ polártetraéder, ∞^1 síkpárrá fajulnak el. E síkpárok egy involuciós sort alkotnak, a melynek kettős síkjai a PN-en átmenő tetraéder síkok.

A talált eredményeket egybefoglalva ekkép fejezhetjük ki:

Egy tetraéder és egy egyenes vagy másodrendű felületet, vagy másodrendű felületsort határoznak meg, a melyre vonatkozólag az adott tetraéder polártetraéder és a mely az egyenesen keresztül megy.

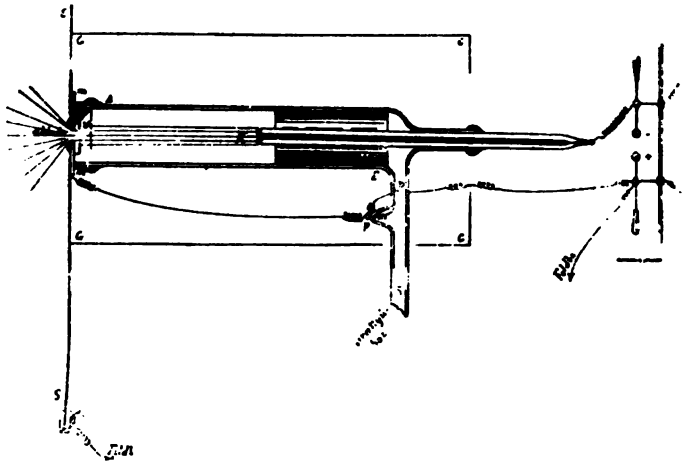
Ha az egyenes a tetraédernek egy élét sem metszi, vagy csak egy élét metszi, akkor felület származik, mely az első esetben hiperboloid, a másodikban pedig síkpár.

De ha az egyenes egynél több tetraéderélt átmetsz, akkor másodrendű felületsor származik, mely következő lehet: Ha az egyenes két átellenes tetraéderélt metsz át, akkor a felületsor hiperboloidokból áll; ha pedig három vagy négy tetraéderélt metsz át, kúpok vagy másodosztályú sugársorok sora származik, s végre ha az egyenes egy tetraéderéllel egyesül, akkor a másodrendű felületsor csupa síkpárból áll. *Klug Lipót.*

PHYSIKAI SZEMLE.

Katódsugarak. Ph. Lenard: Über Kathodenstrahlen in Gasen von atmosphärischem Druck und im äussersten Vacuum. *Ann. d. Phys.* LI. k. 225—268. l.

A Geissler-féle csöveken, melyek 1—2 *mm.* nyomású, ritkított gázt tartalmaznak, a Holtz-gépnek vagy Ruhmkorff-féle induktornak szikraáramá-



tól gerjesztett fénytünemények lényege tudvalevőleg abban áll, hogy a pozitiv elektródtól a negativig réteges fénynyalábok látszanak, melyek színe és világító képessége a ritkított gáz anyagától, a ritkítás fokától, a cső keresztmetszetétől és a szikraáram erejétől függ, míg a negativ elektródból sötétkék vagy ibolyaszinű fénypamat áramlik ki, melyet a réteges fénytől sötét köz választ el. A ritkítást folytatván, a pozitiv sarktól kiinduló réteges fény mindinkább hátrahuzódik, míg bizonyos nagyfokú ritkitásnál eltünik és a csövet a negativ sarktól kiinduló ú. n. katódsugarak töltik be, melyek egyenes irányban haladva, a cső végét foszforeszkálásra bírják,

közbetett fémlemezektől föltartóztatva árnyékot vetnek; szóval a Crookes-féle csövekben észlelhető jelenségeket idézik elő. Maga Crookes a katódsugarak keletkezését abból magarázza, hogy a rendkívül ritkított gáz — szerinte «sugárzó anyag» — a katódtól eltaszítva nem talál már olyan akadályokra, a milyeneket a kevésbbé ritkított gáz molekulái gördítenek a tovaszáguldó gázmolekulák útjába és ezeknek közepes úthossza a katódtól legalább is az anódig terjed. Ha a katódsugarak szilárd lemezre (fémre, üvegre) találnak, mechanikai mozgást, hőt, fényt idéznek elő, de a lemezeken át nem hatolhatnak.

Mióta Hertz kimutatta, hogy a rendkívül vékony lemezekké sajtolható fémek, melyek persze számtalan apró nyilással bírnak, katódsugarak átbocsátására alkalmasak, remélhető volt, hogy a katódsugarakra nézve valóban átbocsátó képességű lemezeket lehet majd találni, t. i. olyanokat, melyek nem nyílásaikon, hanem szilárd anyagukon bocsátják őket keresztül.

Ez irányban legújabban Lénárd Fülöp végzett Bonnban nagy gonddal keresztülvitt kisérleti kutatásokat; lényegöket és igen érdekes eredményeiket a következőkben ismertetjük.

Katód gyanánt 12 *mm.* átmérőjű *K* aluminium-körlap szolgált, mely hosszú nyélre volt erősttve. Ezt vastagfalú, szűk üvegcső vette körül, mely a végén (*e*) be volt forrasztva.

Anód gyanánt *A* sárgarézcső szerepelt, mely tágabb üvegcsőbe szorult és a katódlemeztől 12 *mm.*-nyire volt hátrább (jobbra). Az anódot tartó tágabb cső a jobb oldal felé szűkül és fölveszi a katódcsövet. Balra tág marad; végére kerek nyilású fémdoboz van légzáróan rá ragasztva.

A kicsi nyilást légzáróan felragasztott vékony aluminium lemezke zárja el. A tág csőhöz forrasztott *R* cső a higanylégszivattyúhoz vezet. A tágabb csövet Lénárd *kisülési csőnek* nevezi, az aluminiumlapot pedig, mely ezt a katóddal szemben zárja, *ablaknak*. Ez úgy van megválasztva, hogy a mikroskóppal lehetetlen benne apró nyilásokat találni; tehát levegőre és fényre teljesen áthatatlannak vehető.

A kisülési csövet tágas bádogcső veszi körül, melyhez elül nagy bádogernyő csatlakozik; ez csupán az «ablakot» hagyja szabadon és az észlelési hely felé, tehát az ablaktól balra, feketére van festve. Az ablakot tartó fémdoboz és az anód a földdel van van vezetőleg összekötve, azonkívül az anód és katód egy szikrainduktorral van platinadrót révén összekötve.

A kisérletek főképen három irányban történtek.

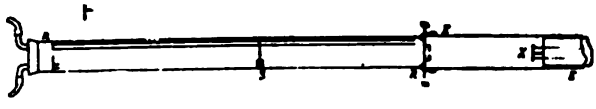
1. *Katódsugarak a szabad levegőben.* Ha az «ablak»-tól balra eső tér: az *észlelési hely*, szabad levegőt tartalmaz, akkor az ablakot kb. 5 cm. távolságnyira gyenge kékes fény környékezi, mely az ablaktól minden irányban terjed. Az ablak eleinte sötét, de hosszabb használat közben egyes helyein szintén gyenge fényt mutat. Az ablak közelébe tartott fosz-

foreszkáló tárgyak az őket jellemző szinű fénynyel világítanak. Az erősebb foszforeszkáló fény mellett a levegő világítása teljesen észrevehetetlen. A világító képesség azonban az ablaktól csak 6—8 *cm.*-nyire terjed; azon túl a tárgyak nem világítanak. Aluminiumoxid, mely katódokon képződött, gyenge kékes-zöldes fényt mutatott; a katódsugarak és az ozon által képezett oxidrétegnek tulajdonítható magának az ablaknak világítása is. Folyadékok a katódsugarak behatása alatt vagy éppen nem, vagy csak gyengén világítottak. Csupán a petróleum világított gyenge kék fénynyel; a kénsavas chinin élénk kék színben tünt fel. A foszforeszkálás jelenségei megszüntek, ha a kisülési csőhöz mágnes közeledik; ekkor az ablak és a levegő is sötét maradt, jeléül annak, hogy a mágnes a katódsugarakat eltérítette. Jellemző a katódsugarakra nézve, hogy 0,5 *mm.* vastag, átlátszó kvarczlemez megszünteti a fénytüneményeket: útját állja a sugaraknak. Átlátszatlan fémlemezek azonban (arany, ezüst, aluminium), ha vastagságuk 0,5 *mm.*-nél kisebb, átbocsátják őket, a mit a mögöttük észrevehető fény tanusít. 0,5 *mm.*-nyi vastagságú fémlemezek szintén föltartóztatják őket. További kisérletek aztán kimutatták, hogy nemfémek is átbocsátják a katódsugarakat, ha csak elég vékonyak. Ilyenek pl. csillámpala, kollódium, bármily szinű selyempapir, üveglemezek, melyeken a Newton-féle színgyürük észlelhetők. Igy tehát a fémek és a dielektrikus testek között lényeges különbség nem mutatkozik. Hengerelt aluminium még átbocsátó, ha 0,027 *mm.* vastag. A fényre nézve valamely test átlátszatlan lehet, ha vastagsága a *mm* századrészét teszi is, más pedig méternyi vastagság mellett is átlátszó. Ily nagy különbségek nem léteznek a katódsugarak átbocsátását illetőleg. Magában a levegőben a sugarak szerte szóródnak. Érzékeny fotografiai lemezekre a katódsugarak vegyileg hatnak. Hogy e sugarak oly térbe hatolhatnak, mely fémileg teljesen el van zárva, azt éppen abból lehetett kétséget kizárólag megállapítani, hogy teljesen zárt bádogszekrénybe helyezett fotografiai papir az ablakkal szemben épp úgy megérezte a katódsugarak hatását, mintha közvetlenül érték volna. Kitünik tehát, hogy a katódsugarakat a szorosan vett elektromos erőktől teljesen külön lehet választani.

2. *Katódsugarak légüres térben.* Ha a kisülési cső a lehetőség határáig van kiszivattyúzva, az elektromos kisülés nem megy többé át: a teljes vacuumban tehát nem lehet katódsugarakat létrehozni. Ennélfogva azt sem lehet eldönteni, vajjon a sugarak továbbítására szükségesek-e anyagi részecskék, vagy sem. Ha azonban vacuum gyanánt a kisülési cső helyett az észlelési teret választjuk, a kérdés megoldható. Erre a czélra Lénárd leírt készülékét kissé átalakította. Az *E* kisülési csőre, az *mm* ablak helyén *hh* fémfoglalvány segélyével *B* üvegcső van erősitve, mely majdnem teljesen légüressé tehető. E csőbe két elektród van forrasztva; az egyik a cső

végén van, az ablakkal szemben (kis aluminiumlemez), a másik az ablak közelében van; ez a csövet majdnem teljesen kitöltő aluminiumlap, közepén nyilással a katódsugarak átbocsátására. A míg a csőben oly ritkítás van, a milyen a CROOKES-féle csövekben szokásos, a cső falának az ablak s a nyilásos *a* elektróda közé eső része igen élénk zöldes fényben foszforeszkál, de a cső belsejében semmiféle fény nem mutatkozik. Az üveg zöld foszforeszkálása az elektródán túl is átterjed egy kissé, valamint a szivattyúhoz vezető csőbe is. A cső legvégén zöld fényló folt van, a két elektród közötti levegő pedig kékes fényű. A zöld folt mágnessel eltolható.

A szivattyúzást tovább folytatván, az elérhető ritkítás legvégső határán az észlelési csőben csak annyi változott, hogy a levegő kékes világossága megszünt, míg a cső végén levő zöld folt annál élesebben határolt és világító. A legvégső határig ritkított tér tehát nem akadályozza a katódsugarak tovaterjedését, ha létrejöttüket nem is engedi meg. A kisérletet $1^1/_2$ méternyi hosszaságú csővel ismételvén, a napokon át folytatott szivattyúzás



után ismét ugyanazon tünemények állottak elő. E kisérletek azon következtetésre jogosítanak, hogy a katódsugarak az éterben végbemenő folyamatok.

3. *Katódsugarak különféle gázakban.* Különféle gázak a katódsugarakat nagyon különböző mértékben engedik át; az átbocsátási képesség lényegesen összefügg a gázak sürüségével.

E kisérletekhez az észlelési csövet úgy kellett átalakítani, hogy különböző anyagú, tiszta gázakkal legyen megtölthető. A csőben mágnessel ideoda vezethető foszforeszkáló ernyő van, mely a gáz átbocsátási képessége szerint az ablaktól kisebb-nagyobb távolságban érte el azt a határt, a hol megszünt világítani. Az ablaktól mért ezen távolságok egyenlő körülmények között a gázak átbocsátási képességének mértékeül szolgálhattak. Ily módon kitünt, hogy oly gázak, melyek sürüségei között csak csekély különbségek vannak, majdnem egyformán bocsátják át a katódsugarakat, hogy csekély sürüségü gáz sokkal jobban bocsatja őket át, mint a nagyobb sürüségü. Csekély különbségek azonban a megegyező sürüségü gázoknál is vannak. A gázak épen úgy világítókká lesznek, mint a levegő. Ritkítás közben az átbocsátási képességek közötti különbségek mindjobban elenyésznek; a gázak annál jobban és annál egyformábban engedik át a katód-

sugarakat, mennél erősebben vannak ritkítva, s egyúttal annál csekélyebb saját világító képességük.

Különböző gázak nagyon különböző mértékben mutatkoznak homályos közegeknek (trübe Medien); mennél jobb átbocsátó képességű a gáz, annál tisztább közeg. E körülmények tanulmányozása végett Lénárd a diafragmán keresztülbocsátott sugarakat foszforeszkáló ernyőn figyelte meg, mely a különböző anyagú és sűrűségű gázakban különböző távolságokra volt tolható. A homályos közegre jellemző, hogy a foszforeszkáló fényes folt erősebben világító magból és gyengébb fényű aureolából áll. Mennél távolabb van az ernyő, annál inkább gyengül a mag fénye, míg az aureoláé erősödik, míg végre az egész folt egyformának tünik fel. A hosszabb úton a homályos közeg mindig több és több sugarat terel ki az egyenes irányból, és mindig nagyobb mértékben. Ezen szétszóródás miatt aztán az ernyő világítása egyformává lesz. A gáz nyomásának csökkenésével a foltok keskenyebbekké, élesebben határoltakká és világosabbakká lesznek, jeléül annak, hogy a közeg tisztul. Hidrogéngázban a foltot környező aureola már 88 mm. nyomásnál eltünt; más gázakban később. A hidrogéngáz általában a legtisztább közegnek bizonyult; a különböző gázak azonban anyagi minőségük szerint nem mutattak jellemző sajátságokat. Minden gáz egyformán viselkedik, ha ugyanazon fokig ritkított.

A különböző nyomású gázakban keletkezett katódsugarak nem egyformán szóródnak el a tovaterjedésnél. Kisebb mérvű ritkulásnak nagyobb szétszóródás felel meg.

Kisérleteiből Lénárd azt a következtetést vonja le, hogy a katódsugarak lényegökben éterbeli folyamatok, melyeknek olyan rendkivüli finomságuaknak kell lenniök, hogy az anyagi molekuláknak megfelelő dimenziók már tekintetbe jönnek. Az anyag még a legkisebb hullámhosszaságú fénynyel szemben is úgy viselkedik, mintha a tért hézag nélkül töltené be. A katódsugarakkal szemben még az elemi gázak molekulái is külön akadályokként viselkednek, melyek az étert mint közeget homályossá teszik és e tekintetben nem a gázak anyagi minősége, hanem csupán csak tömege, vagyis a térfogategységben foglalt molekulák összesége határoz.

Csomez.

IRODALOM.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften.

40. A. L. Lavoisier u. P. S. de Laplace, Zwei Abhandlungen über die Wärme. (Aus den Jahren 1780 und 1784.) Herausg. v. J. Rosenthal. — 74 l. Ára 1.40 márka.

44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von Gay-Lussac, Dalton, Dulong u. Petit, Rudberg, Magnus, Regnault (1802—1842). Herausg. v. W. Ostwald. — 213. l. Ára 3 márka.

56. Ch. Blagden, Die Gesetze d. Überkaltung und Gefrierpunktserniedrigung. 2 Abhandlungen (1788). Herausg. von A. J. v. Oettingen. — 49 l. Ára 0.80 márka.

57. Fahrenheit, Réaumur, Celsius. Abhandlungen üb. Thermometrie (1724, 1730—1733, 1742.) Herausg. von A. J. v. Oettingen. — 140 l. Ára 2.40 márka.

A hány név, annyi tapasztalati törvény, vagy physikai állandók halmaza, melyekből az értekezésekben átkarolt mintegy másfél évszázad alatt a hőtan kialakult. A ki a hőtannak csak elemi cursusát végezte el, már a nevekből és czímekből tájékoztatva van a felsorolt munkák tartalmára nézve. A bennök foglalt értekezések igen különböző időkben, egymástól nagyon eltérő elméletek korában keletkeztek s tanulmányozásuk különösen érdekes ma, a mikor a hőjelenségekkel oly szoros kapcsolatban levő halmazállapotok kérdése igen sok kutatót foglalkoztat és mindgyakrabban új adatokkal bővíti ismereteinket.

53. C. F. Gauss, *Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt* 1832). — 62 lap. Ára 1 márka.

A földmágnesség vízszíntes összetevőjének intenzitása Gauss ez értekezése előtt is meg volt mérhető ugyanazon, vízszintes síkban forgó, mágnestűnek két különböző helyen észlelt lengésideje összehasonlítása által. Egység gyanánt természetesen valamely helyen működő erő szolgált; s a mérés szükséges feltevése, hogy a két megfigyelés között sem a mágnes momentuma, sem pedig a horizontális összetevő nem változott. Világos

továbbá, hogy az erő időbeli változása, mely már a mágneses declinatió saecularis és periodikus változásából várható, ez összehasonlításokban teljesen elvész. Gauss ennélfogva az analytikai mechanikában rég használt három alapegységet a Coulomb-féle törvény kapcsán a mágnességre is kijerjesztette, egységül választván ama mágneses fluidum tömegét, mely a vele egyenlő tömegre a távolság egységében az erő egységével hat. Ily módon meghatározza lengésekből a mágnespálcza mágneses momentumának *(M)* és a földmágnesség horizontalis összetevőjének *(T)* szorzatát és ugyanezen pálcza okozta kitérések megfigyeléséből az $\frac{M}{T}$ osztatot. A kettő összefoglalva megadja a T és M mennyiségeket. A kitérítéseknél lényeges szerepet játszik a Coulomb-féle törvény, melyet Gauss az általánosabb $P=\frac{\mu\mu'}{r^n}$ alakban írva, külön meghatározza kisérleti úton az n értékét, melyet 2-nek talál. Számba veszi a szükséges javításokat: a mágneses momentumnak a hőmérséklettől való függését, a fonal csavarodásának befolyását a lengésekre és eltérésekre, a földmágnesség megváltozását a megfigyelési idő alatt. Kitűnő experimentális módszert ad a pálcza tehetetlenségi momentumának meghatározására, és az értekezésben ugyan erre ki nem terjeszkedve — a tükör-távcső leolvasás behozatalával e nemű megfigyeléseknek csillagászati pontosságot ad. Végül összeállít egynehány megfigyelt intenzitásértéket Göttinga számára, hangsúlyozza, hogy a meghatározás módja teljesen független a mágneses állapot felfogásától és levezeti a megmért mennyiségek méretszámait, melyek segítségével az egységek egyik rendszeréből a másik egységrendszerre mehetünk át.

54. J. H. Lambert, *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (1772). — 95 lap. Ára 1.40 márka.

A legnagyobb élvezettel és haszonnal olvasható értekezés, mely a conformis leképezés első kezdeteit adja elő és a mai nap is legsűrűbben használt térképvetítések törvényeit adja. Noha Lambert a leképezés általános elméletéig nem emelkedik, mégis tud kapcsolatot teremteni az egyes vetítések között, és levezeti nevezetesen a Lagrange-féle körös és a Gauss nevéhez fűződő conformis képvetületet. Az æquivalens (területtartó) vetítésekkel is foglalkozik, melyek közül különösen a Lambert-féte azimuthális és képvetület fontosak. Végül a sphæroidikus föld leképezésében szükséges módosításokat is vezeti le. Különösen igen vonzó a mód, melylyel Lambert a mathematika segédeszközeit kezeli. *Kövesligethy.*

MEGOLDOTT FELADATOK.

21. *Legyen*

$$F(u, v) = 0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyíttassék be, hogy az (u, v) *érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:*

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}} =$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(KÜRSCHÁK.)

Második megoldás Freikind Ignácz műegyetemi hallgató úrtól.

Legyen a görbe egyenlete pontkoordinátákban

$$y = f(x); \qquad a)$$

akkor az áttérés a görbe vonalkoordinátákban való egyenletére a következőképen történik. Az érintő egyenlete az (x, y) pontban

$$\eta - y = y'(\xi - x);$$

vagy rendezve

$$\xi\frac{y'}{y - y'x} - \eta\frac{1}{y - y'x} + 1 = 0$$

és innen az érintő koordinátái:

$$u = \frac{y'}{y - y'x}, \quad v = -\frac{1}{y - y'x}. \qquad b)$$

A *b*) alattiakból x-et és y-t kifejezvén u- és v-ben és behelyettesítvén az *a*) egyenletbe az $y'=f'(x)$ egyenletek tekintetbe vételével az

$$F(u, v) = 0$$

egyenlethez jutunk.

A görbület kifejezése az (x, y) pontban

$$G = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad c)$$

A *b*) alattiakból

$$y' = -\frac{u}{v}$$

és

$$1 + y'^2 = \frac{u^2+v^2}{v^2};$$

azután

$$y'' = \frac{dy'}{dz} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2} = \frac{\frac{du}{dx}\left(u\frac{dv}{du} - v\right)}{v^3}.$$

Ezeket az értékeket *c*)-ben helyettesítvén, lesz:

$$G = \frac{\frac{du}{dx}\left(u\frac{dv}{du} - v\right)}{v^3\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{v^3}}$$

vagy összevonás után

$$G = \frac{v\frac{du}{dx}\left(u\frac{dv}{du} - v\right)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad d)$$

Még a $v\frac{du}{dz}$-et kell másképen kifejeznünk; e czélból képezzük a $\frac{du}{dy}$ differenciálhányadost. Minthogy e számításnál

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -y'^3\frac{d^2x}{dy^2},$$

azért a keresett differenciálhányados így irható:

$$\frac{du}{dy}=-\frac{yy'^2}{(y-y'x)^3}\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{yy'^2}{(y-y'x)^3}\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{du}{dy}.$$

Innen

$$1=-\frac{yy'^2}{(y-y'x)^3}\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

vagy tekintetbe véve a *b*) alatti első egyenlőséget

$$1=-yu^2\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

és ebből

$$y=-\frac{1}{u^2\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}.$$

De

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{v}{u}$$

továbbá

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dx}{dg}\right)=-\frac{u\dfrac{dv}{du}-v}{u^2},$$

úgy hogy

$$y=\frac{1}{u\dfrac{dv}{du}-v}.$$

Végül a legutolsó egyenlőség mindkét oldalán differenciálván és $\frac{dy}{dz}$ helyett $-\frac{u}{v}$-t helyettesítvén, lesz:

$$-\frac{u}{v}=-\frac{1}{\left(u\dfrac{dv}{du}-v\right)^2}\cdot u\frac{d^2v}{du^2}\frac{du}{dx},$$

a miből

$$v\frac{du}{dx}=\frac{\left(u\dfrac{dv}{du}-v\right)^2}{\dfrac{d^2v}{du^2}}$$

ha ezt a *d*)-be helyettesítjük, a feladatot megoldottuk.

A görbület kifejezésének második alakja most már az $F(u, v)=0$ egyenletből kétszeri differenciálás segítségével minden nehézség nélkül nyerhető.

*

Harmadik megoldás Csillag Vilmos, műegyetemi tanársegéd úrtól.

Ismeretes, hogy az

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

parameteres egyenletek meghatározta görbe görbületi mértéke

$$G = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 1)$$

hol

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad y' = \frac{dy}{dt}$$
$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

és

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}. \qquad 2)$$

Jelentsenek (u, v) vonalkoordinátákat és legyenek a görbe érintőinek koordinátái az

$$u = u(t)$$
$$v = v(t)$$

egyenletek segítségével megadva és használjuk ismét a következő jelölést:

$$\frac{du}{dt} = u' \quad \frac{dv}{dt} = v'$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = u'' \quad \frac{d^2v}{dt^2} = v''.$$

Az érintő egyenlete

$$ux + vy + 1 = 0; \qquad 3)$$

ebből az érintő irányhatározója

$$\text{tg. } \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}$$

ezt 2)-vel egybevetve a

$$ux' + vy' = 0 \qquad 4)$$

egyenlőséget nyerjük.

Hogy most már a görbületi mértéket vonalkoordinátákban kifejezhessük, a 3) és 4) egyenletek alapján meg kell határoznunk az

$$x',\ y',\ x'y'' - y'x'$$

mennyiségeket mint

$$u,\ v,\ u',\ v',\ u'',\ v''$$

függvényeit és be kell helyettesítenünk őket a görbület fönt írt képletébe.

E czélból képezzük a 3)-ból differenciálással az

$$u'x+v'y+ux'+vy'=0$$

egyenletet; tekintettel 4)-re

$$u'x+v'y=0 \qquad 3')$$

adódik úgy, hogy a — 3), 3') — egyenletpárból

$$x=-\frac{v'}{uv'-vu'} \qquad y=\frac{u'}{uv'-vu'}$$

és ezek differenciálhányadosai

$$y'=v\cdot\frac{u'v''-v'u''}{(uv'-vu')^2} \qquad y'=-u\cdot\frac{u'v''-v'u''}{(uv'-vu')^2}.$$

Írjuk rövidség kedveért

$$x'=vW \qquad y'=-uW,$$

akkor újból differenciálván a

$$x''=v'W+vW' \qquad y''=-u'W-uW',$$

kifejezéseket nyerjük.

Ha most már tekintettel a görbület 1) alatti képletére az

$$x'y''-y'x''=(uv'-vu')\,W^2=\frac{(u'v''-v'u'')^2}{(uv'-vu')^2},$$

és

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}W^3}=\frac{(uv'-vu')^6}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}(u'v''-v'u'')^3}$$

kifejezéseket képezzük, akkor a görbületi mérték számára a

$$G=\frac{(uv'-vu')^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}(u'v''-v'u'')}$$

kifejezést nyerjük, a mely a feladatban adottat mint specziális esetet magában foglalja.

Ha ugyanis

$$t=u \qquad v=v(u)$$

akkor

$$G=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{d^2v}{du^2}}$$

a feladatban közölt első alak. Ebből a másik alak úgy vezethető le, hogy

v-t mint u implicite megadott függvényét ismételten differenciáljuk és a nyerendő értéket a szóban forgó képletbe behelyettesítjük.

*

Negyedik megoldás dr. Beke Manó főreáliskolai tanár úrtól Budapesten.

Legyen az adott görbe vonal egyenlete pontkoordinátákban:

$$y = y(x) \qquad 1)$$

akkor egy tetszés szerinti $(x_0 y_0)$ pontjában az érintőnek egyenlete:

$$y - y'x - (y_0 - y'x_0) = 0, \qquad 2)$$

a hol y' a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados értékét jelöli a felvett $(x_0 y_0)$ pontban.

Írjuk ez egyenletet röviden a következő alakban:

$$y - Xx - Y = 0, \qquad 3)$$

a hol

$$X = y', \quad Y = y - y'x \qquad 4)$$

és rövidség kedveért elhagytuk a 0 indexet.

A 3) egyenletben az X és Y tekinthetők az érintő vonalkoordinátáinak addig, míg át nem térünk a közönségesen használatos u, v koordinátákra, a melyekkel X, Y a következő összefüggésben vannak:

$$X = -\frac{u}{v}, \quad Y = -\frac{1}{v}. \qquad 5)$$

A 4) alatti egyenletek megállapítják az átmenetet a pontkoordinátákban megadott egyenlettől a vonalkoordinátákban felírható egyenlethez. Ezek a *transzformáczió* egyenletei. Épen ilyen módon állapíthatjuk meg az átmenetet a vonalkoordinátákban (X és Y-ban) adott egyenlettől a pontkoordinátákban felírhatóhoz. Ha ugyanis vonalkoordinátákban valamely görbe egyenlete:

$$Y = Y(X),$$

akkor a transzformáczió egyenletei:

$$x = -Y', \quad y = Y - Y'X. \qquad 6)$$

Mellékesen megjegyezzük, hogy a 4) és 6) egyenletekből következik ez a differenciálreláczió:

$$Y - Y'dX = y - y'dx,$$

a mely azt mutatja, hogy itt egy igen egyszerű *érintkezési transzformáczióval* van dolgunk: egy oly transzformáczióval, a mely érintkező görbé-

ket ismét érintkező görbékbe visz át. Ha a görbületet vonalkoordinátákban (egyelőre X és Y-ban) ki akarjuk fejezni, akkor nem kell egyebet tennünk, mint ez érintkezési transzformációt ki kell bővítenünk az első és második differenciálhányadosokra is, vagyis ki kell fejeznünk y' és y'' differenciálhányadosokat az új változókban és ez értékeket a

$$\sigma = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad 7)$$

kifejezésbe kell behelyettesítenünk.

Ha a

$$dy' = y''dx, \quad dY' = Y''dX$$

egyenletek közül a másodikba az 5) és 6) egyenletekből Y' és X értékeit behelyettesítjük és az így nyert egyenletet az elsővel egybevetjük, a következő egyszerű összefüggésre jutunk:

$$y'' = -\frac{1}{y''}. \qquad 8)$$

Ha tehát y' és y'' értéke a 4) és 8) egyenletekből a σ kifejezésébe helyettesítjük, ered:

$$\sigma = \frac{-1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}y''}. \qquad 9)$$

Most már nincs más hátra, mint hogy X és Y'' helyett u, v-ben és v differenciálhányadosaiban való kifejezéseit helyettesítsük.

Az 5) egyenletből ered; ha előbb dY, aztán dX és ebből $\frac{dY}{dX} = Y'$ kifejezését alkotjuk:

$$Y' = -\frac{v'}{-v+uv'},$$

a hol $v' = \frac{dv}{du}$ tettük.

Ebből ismét dY' és innen $\frac{dY'}{dX} = Y''$ képezhető:

$$Y'' = \frac{v^2v''}{(-v+uv')^3}. \qquad 10)$$

Ha már most σ kifejezésébe X helyett az 5) egyenlet alapján $-\frac{u}{v}$ és Y'' helyett a 10) egyenletből vett értékét teszszük, akkor megkapjuk a görbületre a feladatban jelzett:

$$\frac{(uv'-v)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}v''}$$

kifejezést.

A görbület kifejezését még egy másik, a dolog lényegéből eredő analitikai módon is megalkothatjuk. Ez eljárásra a következő *csoportelméleti* meggondolások vezetnek:

A síkbeli idomok minden a saját síkjukban történő mozgása haladásból és a kezdőpont körüli forgásból állítható elő. A haladást 2 paraméter határozza meg: az X és Y tengelyek irányában való eltolódások, míg a forgás meghatározásához egy parameter: a forgás szöge szükséges. E szerint a síkbeli mozgásnak, az úgynevezett *euklidesi mozgásnak*, 3 parametere van. Ha valamely pont koordinátái a mozgás előtt: x, y akkor, ha az X irányában a és Y irányában b az eltolódás nagysága, továbbá a kezdőpont körüli forgás szöge α, akkor az új helyzetbe jutott pont koordinátái: x_1, y_1 a következők lesznek:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos. \alpha - y \sin. \alpha + a \\ y_1 &= x \sin. \alpha + y \cos. \alpha + b, \end{aligned} \qquad 1)$$

a melyek az ismeretes koordináta-transzformáczió képletek. Ezek a képletek nemcsak a görbe minden egyes pontját transzformálják egy meghatározott pontba, hanem transzformálják egyúttal a görbe minden egyes érintőjét is, vagyis az y' meghatározta irányt és éppen így az y'', y''', stb. differenciálhányadosokat is. Már most azt a kérdést vethetjük fel, hogy *az x, y, y', y''-nek minő függvényei azok, a melyek semmiféle euklidesi mozgásnál sem változnak meg, vagyis, melyek ez euklidesi mozgáscsoport invariáns függvényei?**

A csoportelméletben egyik alapvető fontosságú tétel, a mely különben a közönséges invariáns-elméletből is ismeretes, hogy az invariáns függvény annyi linearis parcziális differenczialegyenletből álló teljes rendszernek tartozik eleget tenni, a hány paramétere van a csoportnak. A jelen esetben a csoportnak 3 paramétere van (α, a, b), tehát az invariáns függvény 3 lineáris parcziális differenczialegyenletből álló teljes rendszernek tartozik eleget tenni. Másrészt a teljes rendszerek elméletéből ismeretes, hogy ha n változót tartalmazó m egyenletből álló teljes rendszerünk van, akkor található $n - m$ független megoldás és minden más megoldás ez $n - m$ megoldásnak tetszés szerinti függvénye. A jelen esetben a változók száma 4 (x, y, y', y'') a differenczialegyenletek száma 3, tehát általánosságban *egyetlen egy függvény létezik*, a mely az euklidesi csoportnál invariáns; minden más invariáns függvény ennek az egynek függvénye. A priori tudjuk, hogy a görbe görbülete semmiféle euklidesi mozgásnál sem változhatik meg; tehát a *görbület a csoport invariánsa*. A feladatot tehát úgy fogalmazzuk, hogy:

---

* Lie—Scheffer's Vorl. über contin. Gruppen, p. 111.

Határozzuk meg az x, y, y', y'' olyan függvényét, mely a sík önmagában haladó és forgó mozgásánál invariáns jellegű.

Ezzel egyúttal jelezve van a probléma, a mint azt a KÜRSCHÁK úr által adott feladatnak megfelelőleg felállítható:

Határozzuk meg az u, v, v', v'' olyan függvényét, mely a vonalkoordináták közönséges transzformációjánál invariáns.

Első dolgunk, hogy felállítsuk a vonalkoordináták transzformáczió-képleteit. Ezek igen egyszerűen adódnak ki az

$$ux+vy+1=0$$

relácziából, ha az x, y helyett az 1) alatti értékeket helyettesítjük. E szerint az uv, transzformáczió képletei lesznek:

$$u_1=\frac{u\cos.\alpha+v\sin.\alpha}{ua+vb+1};$$

$$v_1=\frac{u\sin.\alpha+v\cos.\alpha}{ua+vb+1}.$$

Most meg kell állapítanunk e csoport infinitezimális transzformáczióit. Ezek megalkotása végett tekintetbe veszszük, hogy az identikus transzformáczió akkor áll elő, ha

$$\alpha=0,\quad a=0,\quad b=0,$$

mert ekkor

$$u_1=u,\quad v_1=v,$$

tehát az identikus transzformációtól végtelen kevéssel különböző transzformációt — az infinitezimális transzformációt — megkapjuk, ha

$$\alpha=\delta\alpha,\quad a=\delta a,\quad b=\delta b$$

teszszük. Így nyerjük; ha a nyert kifejezést hatványsorba fejtjük és a másodrendű végtelen kicsinyeket elhanyagoljuk:

$$\begin{aligned}\delta u&=\ v\delta\alpha-u^2\delta a-uv\delta b\\ \delta v&=-u\delta\alpha-uv\delta a-v^2\delta b;\end{aligned}$$

vagy ha

$$\delta a=A\delta t,\quad \delta\alpha=B\delta t,\quad \delta b=C\delta t$$

teszszük, akkor az infinitezimális transzformáczió a következő schematikus módon írható:

$$(Av-Bu^2-Cuv)\,p+\,(-Au-Buv-Cv^2)\,q$$

a hol

$$p=\frac{\partial f}{\partial u},\qquad q=\frac{\partial f}{\partial v},$$

vagyis, minden infinitezimális transzformáczió e háromból alakítható lineárisan:

$$X_1 = vp - uq, \quad X_2 = u^2p + uvq, \quad X_3 = uvp + v^2q, \qquad 3)$$

a melyek, mint a csoportelmélet elemeiből ismeretes, specziális esetei a projektiv transzformációnak.

Most ez infinitezimális transzformációkat *bővítenünk* kell arra az esetre, midőn az f függvényben nemcsak az u, v változók, hanem egyúttal $v' = \frac{dv}{du}$ és $v'' = \frac{d^2v}{du^2}$ is előfordulnak.

A bővítésre szolgáló képletet egyszerűen nyerhetjük oly módon, a mint a variáczió számításban a differenczialhányadosok variácziót szoktuk előállítani:

$$\partial v' = \partial \frac{dv}{du} = \frac{\partial dv \,.\, du - dv \,.\, \partial du}{du^2} = \frac{d\partial v}{du} - v' \frac{d\partial u}{du} \qquad 4)$$

és éppen így

$$\partial v'' = \frac{d\partial v'}{du} - v'' \frac{d\partial u}{du}.$$

Tekintetbe véve a 2) alatti variácziókat, e képletek szerint nyerjük a 3) alatti infinitezimális transzformácziók bővítéseül rendre:

X_1 bővítéseül: $\partial v' = -(1+v'^2)\,\partial t$,
X_2 « $\partial v' = (v - uv')\,\partial t$,
X_3 « $\partial v' = v'(v - uv)\,\partial t$

és ismételten bővítve, rendre $\partial v''$ értékeül a következőket kapjuk:

1) $v'v''\partial t$, 2) $-3uv''\partial t$, 3) $-3uv'v''\partial t$.

A lineáris parcziális differenczialegyenletek, melyeknek az invariáns függvények eleget tartoznak tenni, most már a következőként nyerhetők: Hogy valamely f függvény, mely u, v, v', v''-t tartalmazza, valamely transzformácziónál változatlan legyen, ahhoz szükséges — és elégséges is — hogy ha a változókra az infinitezimális transzformácziót alkalmazzuk, a változás 0 legyen. E szerint a jelen esetben az f függvény a következő 3 lineáris parcziális differenczialegyenletnek tartozik eleget tenni:

$$\begin{aligned} v\frac{\partial f}{\partial u} - u\frac{\partial f}{\partial v} - (1+v'^2)\frac{\partial f}{\partial v'} + v'v''\frac{\partial f}{\partial v''} &= 0, \\ u^2\frac{\partial f}{\partial u} + uv\frac{\partial f}{\partial v} + (v - uv')\frac{\partial f}{\partial v'} - 3uv''\frac{\partial f}{\partial v''} &= 0, \\ uv\frac{\partial f}{\partial u} + v^2\frac{\partial f}{\partial v} + v'(v - uv')\frac{\partial f}{\partial v'} - 3uv'v''\frac{\partial f}{\partial v''} &= 0. \end{aligned} \qquad 5)$$

A számítás meggyőz arról, hogy e három egyenlet teljes rendszert alkot, a mint különben a csoportelmélet általános tételeiből is következik.

Hogy ezt a rendszert megoldjuk, átalakítjuk előbb úgy, hogy a második egyenletet v-vel, s a harmadikat u-val szorozzuk és egymásból kivonjuk. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$(v-uv')\frac{\partial f}{\partial v'}-3uv''\frac{\partial f}{\partial v'}=0,$$

mely a következő közönséges differenciálegyenletnek felel meg:

$$\frac{dv'}{1}=-\frac{dv''}{\frac{3uv''}{v-uv'}}$$

és integrálja:

$$f=\frac{Cv''}{(v-uv')^3}, \qquad 6)$$

a hol C az u, v függvénye. Hogy minő függvénye az u, v nek, annak meghatározására az 5) alatti második és harmadik egyenletekből még egyet alkotunk olyként, hogy a második egyenletet v', a harmadikat 1-gyel szorozzuk és az így nyert egyenleteket egymásból kivonjuk. Akkor megint — a $v-uv'=0$ megoldástól, mely egyenes vonalat jelent, eltekintve — nyerjük a következő egyenletet:

$$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=0$$

és ebbe a 6) alatti kifejezést helyettesítvén, a C-re, megint az $uv'-v=0$-tól eltekintve, a következő parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$u\frac{\partial C}{\partial u}+v\frac{\partial C}{\partial v}-3C=0,$$

melynek megoldása

$$C=c\,(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}$$

úgy, hogy az 5) alatti 2) és 3) egyenletnek eleget tesz:

$$f=c\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}v''}{(u-uv')^3} \qquad 7)$$

Egyszerű számítás meggyőz bennünket arról, hogy ez az első egyenletet is kielégíti; tehát a 7) alatti kifejezésben *az u, v, v', v'' oly függvényét nyertük, mely az euklidesi csoportnál invariáns és ha $c=1$ teszszük, akkor minden más invariáns függvény ennek az*

$$\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}v''}{(v-uv')^3}$$

nak függvénye. Ez a kifejezés megegyezik a KÜRSCHÁK úr által megadott görbületi sugárral.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A nedvesség méréséről. Mintegy 10 évvel ezelőtt sokszor egymásután kellett a levegő abszolut nedvességét meghatároznom s e czélra EDELMANN készülékét használtam. Ez mintegy $^1/_2$ liter térfogatú öblös üveghenger, melybe egy vele közlekedő edényből kénsavat lehet befolyatni: ez elnyelvén a térben elzárt vízgőzöket, a nyomás alább száll. A nyomás csökkenését a hengerre szerelt kis higany manometer méri.

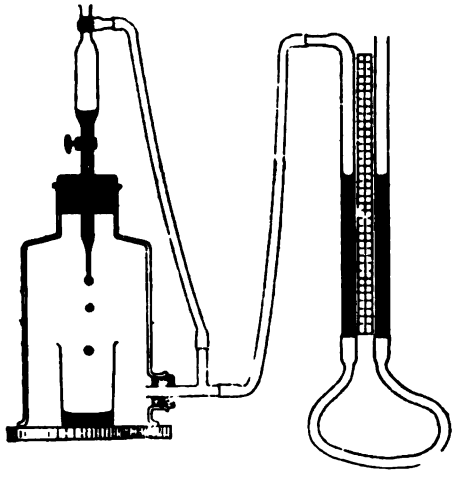
Ennek a készüléknek csak azt a baját éreztem, hogy a hengert minden egyes mérés után gondosan meg kell mosni és kiszárítani s ebből a czélból az egész készüléket szétszedni. Mindez a kisérlet gyors ismétlését — a mi pedig mindíg kivánatos — igen meghezíti.

A sok bajlódást akként törekedtem elhárítani, hogy az üveghengert túbusos légszivattyú-haranggal helyettesítettem s a kénsavat a harang alá zárt magas falú pohárba folyattam. Így csak a poharat kell egy másikkal helyettesíteni, s a kisérlet nyomban ismételhető.

Az ekként módosított készüléket a mellékelt ábra mutatja. A henger nyakába légzáróan illő kaucsuk dugó két csappal ellátott pipettát tart: az alsó túbus dugójában ⊤ alakú üvegcső van tolva. Ezen keresztül a harang belseje a pipetta felső terével, illetőleg a manometerrel, kaucsuk csövek révén közlekedésbe helyezhető.

A kisérlet lefolyása a következő. A harang alját gondosan megfaggyúzva, lecsiszolt üveglapra állítjuk. A tömény kénsavval megtöltött pipettát légzáróan beleillesztjük a harang nyakába, a felső csapot úgy fordítván, hogy a harang belseje a kénsavval telt tértől egyelőre elzárva legyen s a szabad levegővel, valamint a manometerrel közlekedjen. Ez a követelmény nyilván akkor van teljesítve, ha a csap a rajzban látható helyzetből 180°-kal van elfordítva. Most a felső csapot a rajzban feltüntetett állásba fordítván, az alsó csapot kissé elfordítjuk, hogy a kénsav a henger alatt álló pohárba lassan lecsepegjen; a manometer — melynek két ágában eddigelé egy szinten állott a folyadék — nyomban megmutatja a nyomás csökkenését és rövid idő alatt megállapodik. Ekkor az alsó csap elzárható. A leeső kénsavtól kiszorított levegő a felső csapon keresztül a kénsav helyére léphet s így a térfogat

változása csakis a vízgőz elnyeletéséből ered. A vízgőz elnyeletése hőfejlődéssel jár s ez a levegőnek kiterjedését vonja maga után; de a hőemelkedés oly csekély, hogy a nedvességméréseknél megkivánt pontosság mellett elhanyagolható. A manometerben felemelkedő folyadék tényleg kisebbíti a térfogatot; de ha folyadék a higany, úgy ez elenyésző csekély. Ha azonban az érzékenység fokozása kedveért — a mi kivánatos, ha a kisérletet előadás közben akarjuk végezni — vízmanométert használunk, akkor a folyadékoszlopot a hengerrel közlekedő szárban a kezdetben elfoglalt állására kell hozni, a mi az által történik, hogy a manometer másik ágát lefelé toljuk, mindaddig, míg a folyadék felszine az előbbi ágban eredeti helyére nem



jutott. A folyadékoszlopok álláskülönbsége megadja a keresett gőznyomást, mely higanynyomásra átszámítható.

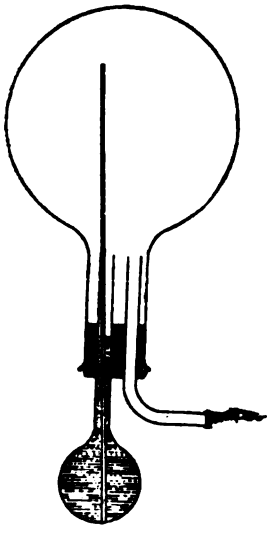
A kisérlet ismétlése végett csupán csak a harang alá helyezett poharat kell egy másikkal kicserélni, miközben a harangot a levegőben kissé felalá mozgatjuk, hogy a benne levő száraz levegőnek helyét a környezet nedves levegője foglalja el. A kénsav felfogására magas falú poharat kell venni, hogy a leeső higanycseppek a henger falára szét ne frecscsenjenek, a mi a harang új kimosását, vagy legalább is gondos kitörülgetését tenné szükségessé.

Természetes, hogy a harangot kisérlet közben felmelegíteni (pl. érintés utján) nem szabad: ez jelentékeny kisérleti hibát okozhatna.

A nedvesség meghatározása ennél jóval egyszerűbb berendezéssel, még a legszerényebb laboratóriumban is meglelhető eszközökkel is végre-

hajtható. Egy lombik, néhány darab üveg- és kaucsukcső és a lombikba légzáróan illő kétfuratú kaucsuk dugó — és természetesen egy kis kézi ügyesség — kell csak hozzá.

A kaucsuk dugó egyik lyukába néhány kőbcentiméternyi üveggömböcske csövét — vagy egyszerűen egyik végén zárt üvegcső nyilt végét! — toljuk, a másikba pedig derékszögre meghajlított ugyanoly vastagságú üvegcsövet. Erre a vízmanométerhez vezető kaucsukcső jön, a gömböcske pedig tömény kénsavval töltetik meg. A lombikot már előre belefogjuk egy Bunsen-állvány fogójába, *nyílásával lefelé*, s most alulról beletoljuk a dugót. Ez által a lombikban levő levegő kissé összenyomatik s a manometerben a folyadékoszlopok egyensúlya megbomlik: ezt a manometercső csekély alátolásával nyomban helyre állítjuk s a lombikot felfordítjuk. A kénsav kifolyik, elnyeli a vízgőzt, melynek feszültségét a manometeren az előbb leirt módon meghatározzuk. A lombikot felfordításkor nem kell — sőt nem is szabad — kézbe fogni: csak a tartóját kell tengelye körül megfordítani. A kénsav befogadására való gömböcskébe még egy vékony üveg pálczikát tolhatunk: ez megindítja és lassítja a kénsav kifolyását; a kénsav a csövön folyik s ezzel nagyobbodik a gőznyelő felület s ennélfogva gyorsul az elnyeletés folyamata.



Rajzunk az összeállítást a lombik megfordítása előtti pillanatban mutatja.

Ha vízmanometert használunk, akkor a kiszárítandó tér levegőjét a manometer levegőjétől kis vatta-fojtással el kell különíteni. A vatta a nyomás kiegyenlítődését nem gátolja, ellenben a manometer gőzzel telített levegőjének átdiffundálását annyira késlelteti, hogy a kisérlet alig egy percznyi tartamában egyáltalában észrevehetetlen.

A gőz nyomása helyett a térfogatát is lehet meghatározni. Ezt kétféleképen lehet tenni. Ha az első rajzban látható manométerrel dolgozunk, a gőz elnyeletése után egy magasságra hozzuk a két ágban a manométer folyadékoszlopait: a folyadékoszlop emelkedése megadja a térfogat csökkenését, vagyis az elnyelt vízgőz térfogatát. Ehhez természetesen az szükséges, hogy a manometer illető ága kalibrálva legyen.

A második eljárás, mely főleg előadási czélokra ajánlatos, abban áll, hogy a kiszárítandó edényt festett vízcseppel elzárt, vízszintesen megerősí-

tett, mintegy 4—6 *mm* átmérőjü üvegcsővel kötjük össze. Meghatározván előre 1 *cm*-nyi hosszának térfogatát, a gőztérfogatoknak aránylag igen pontos mérésekre alkalmas. A vízcsepp eltolódása, természetesen, annál nagyobb, mennél nedvesebb a levegő s mennél nagyobb a lombik. 1 literes edénynyel még a legszárazabb téli időben is 10—20 *cm*-rel tolódik el a vízcsepp. *B. G.*

*

A kristályosodás vetitése igen hálás mutatványa a vízszintes vetitő készüléknek. Alkénessavas nátront vagy eczetsavat kémlő csövecskében megömlesztvén, gyengén felmelegített tiszta üveglapra öntjük s ezt a vízszintes vetitő készülékre leteszszük. Kis kristály darabbal, melyet a még folyós anyagba vetünk, a kristályosodást megindítjuk, mely aztán rohamosan az egész anyagra átterjed. — Ennél az eljárásnál talán kényelmesebb és biztosabb, ha túlhütött sók helyett oly oldatokat használunk, melyek oldófolyadéka gyorsan párolog. Így például a naftalin aetherben nagy mértékben oldódik; ha tehát készítünk telített oldatot s ebből keveset lehetőleg sik alappal bíró csészébe, vagy egyszerüen a vetitő készülékre *vízszintesen* elhelyezett sik üveglapra öntünk, az aether gyorsan elpárolog s a naftalin szép pikkelyekben kikristályosodik. Naftalin helyett pyrogallussavat is használhatunk, mely aetherben szintén nagy mértékben oldódik s igen szép csillagalaku kristályokban válik ki belőle. *Gruber N.*

*

A mágnesi állapot rögzitése a vasban. A lágyvasban indított szabad mágnesség tudvalevőleg nem enyészik el teljesen az indító hatás megszüntével s bizonyos körülmények között a remanens mágnesség elég jelentékeny.

E remanens szabad mágnesség mennyisége mindenesetre nagyon függ attól, hogy az indító hatás megszünte után a lágyvasat erősebb mechanikai behatások ne érjék, mert a remanens mágnesség mennyiségét a lágyvasrészecskék irányított helyzetének állandósága határozza meg.

Ismeretes, hogy próbacsőbe zárt és dugóval összenyomott lágyvaspor az indító hatás megszünte után is mutat némi szabad mágnességet mindaddig, míg a vasport a csőben össze nem rázzuk.

Ha tehát az irányított részecskék elmozdulását még mágnesezés közben valami módon állandóan megakadályozzuk, a porrészecskék ezen helyzetükből nem tudnak többé kifordulni és elhelyezkedésüktől függő szabad mágnességüket állandóan megtartják.

Az egyszer irányított lágyvas részecskék elmozdulásának állandó megakadályozása sikerül, ha a lágyvasport eleinte lágy, de később megkeményedő anyaggal keverjük össze.

Egyik módja a fékezésnek az lehet, hogy a lágyvasport próbacsőben

viaszszal olvasztjuk össze és mágneses térben a viaszt megkeményedni hagyjuk. Ily módon ezelőtt két évvel ezelőtt készített állandó mágnesem még ma is változatlan erősségű.

Kényelmesebben dolgozhatunk a lágyvaspor közé kevert finom gipszporral. Ez utóbbi eljárással a legbonyolultabb mágneses tereket könnyen állandósíthatjuk és többszörösen lemásolhatjuk, ha a gipsz-masszát megkeményedéseig hagyjuk a mágnestérben. Ily terekben a lágyvaspor-részecskék a mező erővonalainak megfelelő irányítást veszik fel s a mágneses mezőt, ha nem is eredeti intenzitásában, de mágnességének eloszlási viszonyaiban híven és állandóan lemásolják, mi által módot nyerünk arra is, hogy az eredeti mágneses térnek csak tetszésszerinti részleteit öntsük gipszbe s a másolatokat külön vizsgálhassuk.

Az ily parciális mágneses terekhez közelített rövid mágnestűkkel kényelmesen elemezhetők a mágnességnek bennük mutatkozó eloszlása s ha a másolatok erős elektromágnesnek a terében készültek, rájuk hintett vasreszelék segítségével erővonalaikat is igen szépen lerajzolják.

Hogy e módon csakis a ragasztóanyag «coërcitiv ereje» jusson kifejezésre, chemiailag tiszta, igen finom vasporral végeztem kisérleteimet.

A vaspor azonban ily finom eloszlás és a keverésnél nyert nedvesség s alkalmasint a gipsznek kristályvize felvétele közben történő csekély megmelegedése mellett a gipszmasszában erősen oxydálódik és e közben jelentékeny égés meleget termel. Az ily tömeg valóságos fűtőanyag számba megy; egy k. b. 300 grammnyi tömeg a keverés után mintegy félnap mulva kezdett felhevülni s hőmérővel flanellbe göngyölve öt óra hosszán keresztül 80°C hőmérséket mutatott, miközben teljesen átrozsdásodott.

Az oxydátió különben nincs hatással az ily tömeg szabad mágnességére; hiszen a természetes mágneseket is a vasnak oxydjai alkotják. *Fényes.*

*

Dielektrin néven Hurmuzescu egy új szigetelő anyagot ír le, melyet úgy állított elő, hogy olvadt paraffinba folytonos keverés közben kénvirágot hintett. A két anyag benső keveredéséből keletkező pép kihülésekor igen megkeményedik s ekkor igen jól megmunkálható, esztergályozható és simára csiszolható, mely tulajdonsága igen sokféleképen használhatóvá teszi. Felülete jóval keményebb mint a paraffiné s nehezebben olvad; továbbá kevésbbé higroszkópikus és törékeny, mint a kén. Tehát e két anyag jó tulajdonságait fogyatkozásaik nélkül egyesíti magában. A két anyag keverési aránya szerint változik a szigetelő keménysége és színe. Elektrofor és elektroszkóp készítésére a paraffinnál* alkalmasabbnak bizonyult. (Lumière Électrique. LI. k. 289 l.)

* L. *Math. Phys. Lapok* T. u. 304. l.

A CSAVART OSZLOP SAJÁT ÁRNYÉKHATÁRVONALANAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

(Első közlemény.)

I.

A csavart oszlop vagy csavart körhengerfelület egy körnek önmagával parallel tovamozgatása alapján származtatható, ha a kör középpontja egy a síkjára merőleges tengelylyel bíró csavarvonalon végig halad.

A mozgó kör a felület alkotó köre lesz, az adott csavarvonal pedig középponti csavarvonala. Ha a kör mozgását oly módon szorítjuk meg, hogy minden átmérője mozgása közben eredeti irányát megtartsa, akkor minden pontja leír egy a középponti csavarvonallal kongruens csavarvonalat, a hozzá tartozó körérintő azonban egy hengerfelületet, a mely a felületünket a ponttól leírt csavarvonal hosszában érinti. Valamely alkotó kör hosszában szerkeszthető érintősíkok oly ferde körhengert burkolnak be, a melynek alkotó irányát a középponti csavarvonal amaz érintője adja meg, a mely ez alkotó kör középpontjához tartozik.

Az árnyékhatárvonal meghatározására alkalmazhatjuk a burkoló segédfelületek rendszerének általános módszerét. Ilyen rendszereknek kínálkoznak kiválóan a burkoló hengerfelületek az alkotó körök, valamint az alkotó csavarvonalak mentén, mivel ezek felhasználásával oly meghatározási módot nyerünk, a mely nemcsak árnyékhatárvonalunk tetszőleges pontossággal való meghatározására képesít, hanem azonfelül még nehány a keletkező görbe természetére vonatkozó tulajdonság felismerésére is vezet.

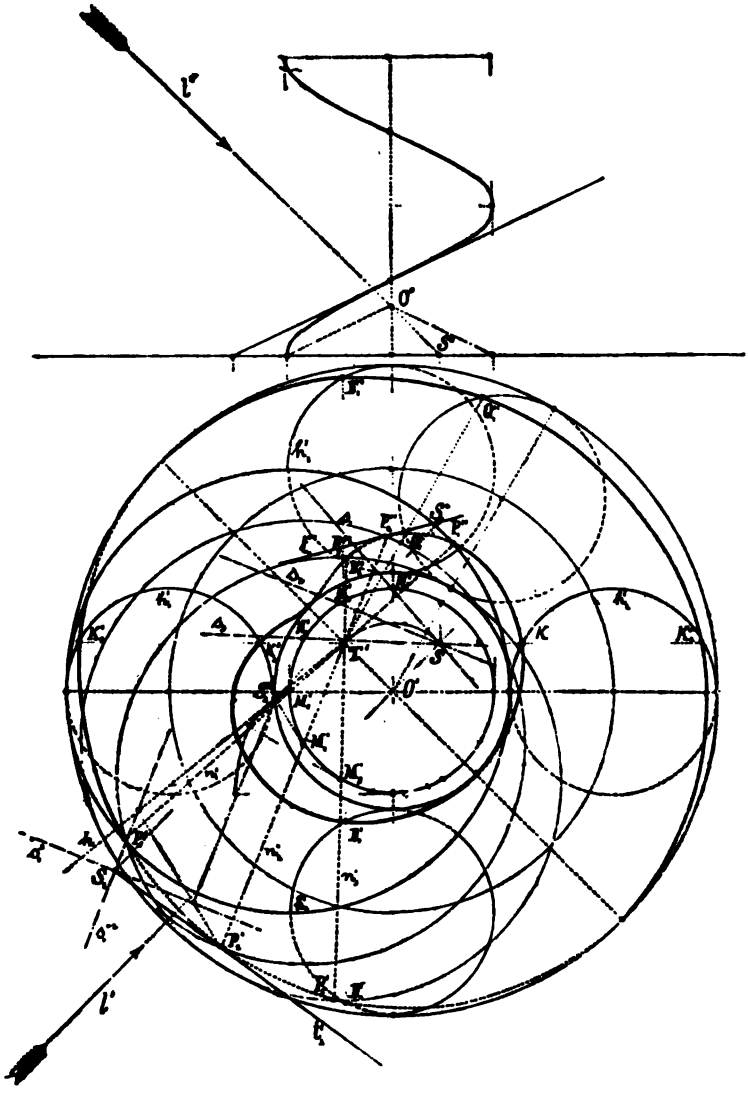
I. Szerkesztési mód.

Állítsuk elő felületünket orthogonális projekcióban, még pedig oly módon, hogy tengelye az első projekczió-lapra merőlegesen álljon. Jelöljük az alkotó körök sugarát ρ-val, a középponti csavarvonal alapkörének sugarát r-rel, és legyen $M_1'M_2'M_3'\ldots$ e csavarvonal első projekcziója, akkor az M_1', M_2', M_3', ... pontokból mint középpontokból ρ sugárral leirt körök lesznek a felület alkotó köreinek első projekcziói.

Közvetetlen projicziálás adja e körök második projekczióit, föltéve, hogy a középponti csavarvonal második projekcziója az ismeretesnek feltett menetmagasságából lett szerkesztettük. Szerkeszszük továbbá a középponti csavarvonal iránykúpját oly módon, hogy alapkörét használjuk alapvonalul; akkor e kúp minden alkotójához a csavarvonal első menetének egy-egy pontja tartozik és igy a felület egy-egy alkotó köre. A kúp-alkotó kijelöli egyszersmind annak a hengernek alkotóirányát, a mely a felületet e kör hosszában burkolja. Ábránk (l. 1. ábra) bármely k_i köre ($i=1, 2, 3, \ldots$) mutatja, hogy a hozzátartozó $|ON_i|$ kúpalkotó első projekcziója és a megfelelő $O'M_i'$ egyenesek egymáshoz képest egy negyedfordulással (90°-kal) vannak elforgatva.

Ha már most a fénysugarak irányát az l egyenes (l', l'') projekczióival ábrázoljuk, akkor árnyékhatárvonalunknak k_i körön fekvő pontjait megtaláljuk, ha annak a síknak nyomvonalát szerkesztjük, mely úgy a fénysugarak, valamint a megfelelő kúpalkotó irányát magán tartalmazza, és azután az e talált nyomvonallal parallel körérintők érintési pontjait megkeressük. Legczélszerűbb az iránykúp csucsán (O', O'') keresztül fénysugarat bocsátani, ennek első nyompontját S_i-ben megkeresni, ezt a megfelelő kúpalkotó nyompontjával N_i-vel összekötni és M_i-n keresztül az $N_iS_i \equiv s_i$ egyenesre merőleges körátmérőt n_i-t meghúzni, a melynek végpontjai P_i, P_i^*-ben a keresett pontpárt adják meg, mivel a körérintők ezen pontokban s_i-vel parallelek.

Figyelemmel kisérve az $s_i (i=1, 2, 3\ldots)$ és hozzá tartozó $n_i' (i=1, 2, 3\ldots)$ egyeneseket, azt látjuk, hogy az utóbbiak az



1. ábra.

előbbieknek 90°-kali elforgatása útján nyerhetők O' pontot véve forgási középpontnak. Mivel az $s_1, s_2, s_3, \ldots$ egyenesek egy az S_1 középponttal biró elsőrendű sugársort alkotnak, következtetjük,

hogy az $n_1, n_2, n_3, \ldots$ körátmérők első projekcziói ugyancsak elsőrendű sugársort alkotnak, melynek középpontja T_1' az S_1-ből nyerhető, ha azt O' körül eredeti helyzetéből 90°-kal elforgatjuk. A forgatás iránya megegyezik mindenkor a csavarvonal menetének értelmével.

Ezek szerint megtalálhatjuk az árnyékhatárvonal bármely alkotó kör kerületén fekvő pontjainak első projekczióit, ha középpontjának első projekczióját T_1' ponttal összekötjük, és ezt az egyenest a kör kerületével metszéshez hozzuk.

Mivel a $T_1' \equiv | n_1', n_2', n_3', \ldots |$ sugársor minden sugara az alapkört két különböző pontban metszi, világos, hogy e sugarak mindegyikén az árnyékhatárvonal projekczijának négy pontja található.

Az eddigiek összefoglalása árnyékhatárvonalunk első projekczijának meghatározására oly egyszerű szerkesztési módot szolgáltat, mely még az alkotókörök első projekczióinak megrajzolását is fölöslegessé teszi; ez a következő módon végzendő:

»Húzzunk a T_1' ponton keresztül tetszőleges számú, a középponti csavarvonal alapkörét átmetsző sugarat; mérjük le az alkotó kör sugarának hosszát és mérjük rá az imént talált metszéspontokból kiindulva mindkét értelemben sugaraink mindegyikére: akkor az így nyert pontsorozatot folytonos görbével összekötvén, megnyerjük az árnyékhatárvonalnak első projekczióját.

Az így nyert görbe első projekcziója általános hatodrendű konchoida, a melynek pólusa a T_1' pont, egyik alapgörbéje a középponti csavarvonal alapköre, másik alapgörbéje pedig egy T_1'-ből mint középpontból ρ sugárral leírt körvonal, föltéve, hogy az általánosított konchoida alaptulajdonságát oly módon állapítjuk meg, mely szerint minden pont vezérsugara egyenlő az alapgörbék vezérsugarainak algebrai összegével.*

Közvetlen felprojicziálás szolgáltatja árnyékhatárvonalunk második projekczióját is; ez azonban transzczendens görbe, mely a felület minden menetmagasságának megfelelően ismétlődő periodusokból áll.

* Wiener, Darst. Geometrie I. p. 182.

II. Szerkesztési mód.

Az árnyékhatárvonal új meghatározási módjára jutunk, ha a feladatunk megoldására a felület alkotó csavarvonalait veszszük igénybe.

Az alkotó csavarvonalak első projekcziói a középponti csavarvonal alapkörével egyenlő, r sugarú körök, melyek középpontjai egy O' középpontból ρ sugárral leírt kör kerületén fekűsznek. Valamely alkotó csavarvonalon megtaláljuk az árnyékhatárvonal pontjait azokban a pontokban, a melyekben a burkoló hengerfelülethez szerkesztett érintősikok a fénysugarakkal parallelek. A szerkesztés egyszerűsbítése czéljából előnyös azonnal figyelembe venni azt, hogy az alkotó csavarvonalak mindegyike a középponti csavarvonallal kongruens és hasonló fekvésű, s ennek következtében parallel eltolással ennek a helyére tolható; ennek az eltolásnak iránya mindenkor merőleges a burkoló hengerfelület alkotóira.

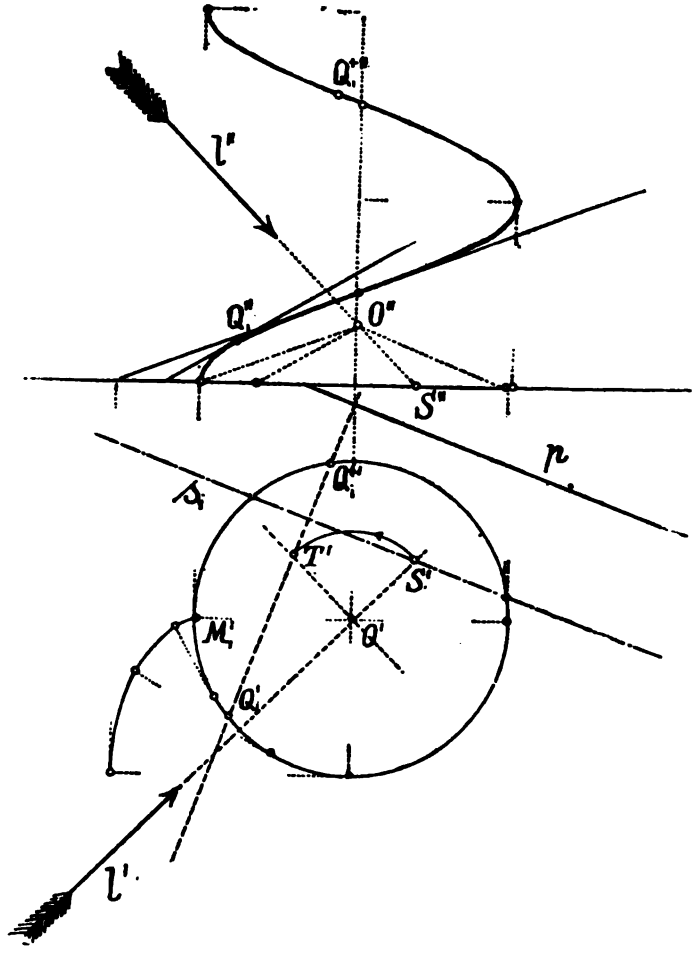
Legyen a 2-dik ábrában egy a középponti csavarvonal helyére eltolt alkotó csavarvonal burkoló hengerének alkotóirányа a g egyenessel megadva. Ekkor a henger bármely érintősíkjának első nyomvonala parallel a g egyenessel.

Az iránykúp csucsán keresztül fektetett, a fénysugárral és a g egyenessel parallel sík (első nyomvonala s_1) kimetsz rajta két kúp alkotót, és a csavarvonal megfelelő pontjaiban egy oly pontpárt állapít meg, a mely e csavarvonalnak eredeti helyére való visszatolása után árnyhatárvonalunk egy pontpárját szolgáltatja.

A kimetszett alkotóknak megfelelő pontpár első projekcziói megtaláljuk, ha az s_1 nyomvonalat O' körül, a csavarvonal értelmével megegyező irányban egy negyed fordulással elforgatjuk, és az alapkörrel Q_1 és Q_1''-ben átmetszszük. Ez a $Q_1Q_1'' \equiv n$ egyenes magán tartalmazza az S'-nek 90°-kal való elforgatását T'-et, merőleges a burkoló henger alkotóira, és változatlan marad, ha az alkotó csavarvonalat eredeti helyére visszatoljuk.

Az alkotó csavarvonal minden menetmagasságán általában találunk egy-egy ily pontpárt, és világos, hogy ennek valós vagy képzetes volta csakis a fénysugarak irányától függ.

Mivel adott felületünkön mindenkor két oly alkotó csavarvonal van, a melyekre nézve a burkoló henger alkotóiránya ugyanaz, világos, hogy projekcióikon, a T''-n keresztül húzott ugyanazon sugár fogja az árnyékhatárvonal pontjait megállapítani, és hogy e sugár mindenkor parallel a csavarvonalpár első projekcióinak középpontjait összekötő egyenessel. Árnyékhatárvonalunk első projek-



2. ábra.

cziójának e második szerkesztési módja megegyezik teljesen egy BURMESTER-től * egészen más indokolással adott eljárással, úgy, hogy végeredményünk is az övével teljesen egyezően következőképen kimondható:

Húzzunk T'-en át (l. 1. ábra) *egy tetszőleges n_i sugarat és O'-en keresztül vele párhuzamost, míg ez az O'-ből ρ sugárral leírt kört találja; e metszéspontokból írjunk r sugarú köröket; a hol ez utóbbiak n_1-t metszik, ott lesznek az árnyékhatárvonal első projekciójának pontjai.*

Felületünk második konturvonalainak első projekcióin — h_1' és h_2' körpáron — kimetszi a T'-en keresztül, a projekcció tengelylyel párhuzamosan húzott egyenes a K_1', K_2', K_1^{+1}, K_2^{+1} pontpárakban az árnyékhatárvonal második konturpontjainak első projekcióit.

Nevezetesek még a h_3' és h_4' projekciókkal biró alkotó csavarvonalak, mivel ezek második projekcziói a középponti csavarvonal második projekcziójával összeesnek. A T'-en keresztül, a projekcziótengelyre merőlegesen húzott egyenes kimetszi rajtuk $D_1'D_1^+$, $D_2'D_2^+$ pontokban az árnyékhatárvonal ama pontjainak első projekcziót, a melyeknek második projekcziói páronkint összeesnek, és így a második projekczió kettőspontjait szolgáltatják.

Szépréthy Béla.

---

* Theorie der Beleuchtung 347. l.

ELLIPTIKUS ÁRAM HATÁSA A GYÚPONTJAIBAN LÉVŐ MÁGNESI PÓLUSOKRA.

A sinus-galvanometer állandóját — elméleti úton — az áramkör sugarából (r) és a földmágnesség intensitásának horizontális alkotójából (H) a

$$C = \frac{rH}{2\pi}$$

ismeretes képlet határozza meg.

A fentebbi képlet azonban csak közelítő érvényességű, mivel egy a valóságban teljesen ki nem vihető feltételhez fűződik; ahhoz t. i., hogy a mágnestű pólusai az áramkör középpontjában foglalnak helyet. Törekedhetünk ugyan e feltételnek lehetőleg eleget tenni olyképen, hogy az áramkör sugarának hosszához viszonyítva rövid mágnestűt használunk, de a rövid mágnestű alkalmazása, a mint a következőkben ki fog tünni, leszállítja a készülék érzékenységét. Az érzékenységnek ily módon való csökkentését nem éppen a pólusokra ható elektromos erőpárok karjainak a rövidítése okozza; hisz a karok hoszszának a változásával arányosan fog változni úgy a mágneses erőpároknak, mint az áramkör elemeinek a hatásából integrálódó erőpároknak a forgató nyomatéka, hanem az, hogy az áramkör sugarának a fentemlített feltétel betöltéséhez megkivánt rövidsége határt szab az áram hatásából származó erőpár növesztése elé, s ily módon száll alább az elektromos erőpárok forgató nyomatéka, a mi egyetértelmű a készülék érzékenységének a csökkentésével.

A sinus-galvanometer állandójának használatos formulája tehát csak megközelítő, melynek érvényessége fokozható ugyan, de mindig a készülék érzékenységének a rovására.

E sorokban a sinus-galvanometer állandójának véges hosszúságú mágnestű esetére szóló szigorú képletét szándékozom levezetni, s ki fogom mutatni a nyert képletből, hogy a pólusok távolságának növelése — ugyanazon sugarú köráram esetén — fokozza a galvanometer érzékenységét.

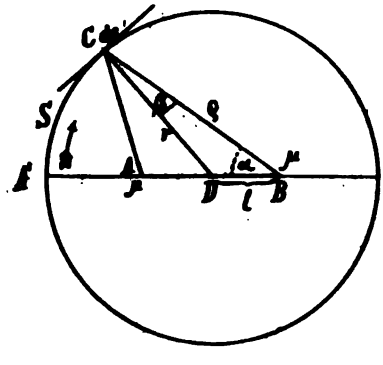
Végre ki fogom mutatni, hogy létezik oly alakú áram, a melyhez egy bizonyos meghatározott hosszaságú mágnestűt használva, a sinus-galvanometer constansának szigorú képlete igen egyszerű alakot ölt; sokkal egyszerűbbet mint a köráram esetében, s hogy ez akkor fog beállani, ha az áramnak, nem kör, hanem ellipszis alakot adunk s hozzá olyan hosszú mágnestűt használunk, melynél a magneses pólusok az ellipszis gyújtópontjaiba esnek.

Megjegyzem azonban, hogy a számitásban azzal az egyszerüsitéssel élek, hogy a mágnest két ismert helyzetű pólussal helyettesitem.

I.

A köráramú sinus-galvanometer constansa.

Legyen az 1. ábrán O a köráram középpontja s egyszersmind a mágnestű középpontja is, A és B a tű polusai μ mágneses fluidummal, r a kör sugara, ρ egy ds elemi áramnak távolsága a B polustól, i a köráramnak intenzitása, p az erő, melylyel a ds elemi



1. ábra.

áram a B pólusban levő μ mágneses folyadékra hat, l a pólusok távolsága a középponttól és végre P az összes elemi áramoktól kifejtett erők integrálja.

AMPÈRE törvénye szerint ds áramelem hatása B pólusra

$$p = \frac{i\mu ds \sin(90° - \beta)}{\rho^2} = \frac{i\mu ds \cos\beta}{\rho^2}.$$

Ha az s körívet A' ponttól felül B' pont felé számítjuk:

$$s = r(\alpha + \beta),$$

mely egyenletben $\alpha \measuredangle$ a független változó, s' egyszersmind $\beta \measuredangle$ is $\alpha \measuredangle$-nek függvénye. Ezen egyenletből

$$ds = r(d\alpha + d\beta).$$

A $d\beta$ meghatározására az $AOC\Delta$-ből

$$\sin\beta = \frac{l}{r}\sin\alpha$$

egyenlet áll rendelkezésünkre.

Ha $\frac{l}{r} = c$ rövidített jelzéssel élünk,

$$\sin\beta = c\sin\alpha,$$

honnan

$$\beta = \text{arc. sin}(c\sin\alpha),$$

s innen

$$d\beta = \frac{c\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha}}.$$

Ezt ds értékébe helyettesítve, lesz:

$$ds = r\left(d\alpha + \frac{c\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha}}\right).$$

Figyelembe véve, hogy

$$\cos\beta = \sqrt{1 - c^2\sin^2\alpha},$$

lesz az 1. egyenletből

$$p = \frac{i\mu r}{\rho^2}\,(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Ugyancsak $AOC\Delta$-ből, tekintve hogy

$$\rho^2 = l^2+r^2+2lr\cos(\alpha+\beta),$$

lesz:

$$p = \frac{i\mu r\,(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha)\,d\alpha}{l^2+r^2+2lr(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)},$$

vagy $\sin\beta$ és $\cos\beta$ értékeit helyettesítve,

$$p = i\mu r\,\frac{(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha)\,d\alpha}{l^2+r^2+2lr\cos\alpha\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}-2l^2\sin^2\alpha},$$

és $c = \frac{l}{r}$ jelzés bevezetése után:

$$p = \frac{i\mu}{r}\cdot\frac{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha}{1+c^2+2c\cos\alpha\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}-2c^2\sin^2\alpha}.$$

Minthogy

$$c^2\sin^2\alpha = c^2-c^2\cos^2\alpha$$

lesz:

$$p = \frac{i\mu}{r}\cdot\frac{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha}{(1-c^2\sin^2\alpha)+2c\cos\alpha)\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c^2\cos^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \frac{i\mu}{r}\cdot\frac{d\alpha}{\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}+c\cos\alpha} =$$

$$= \frac{i\mu}{r(1-c^2)}\cdot(\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}-c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Ez a differentiális egyenlet fejezi ki bármely $a\alpha$-nek megfelelő *ds* áram-elemnek a hatását a B pontban levő μ mágneses fluidumra. Ha pedig A-tól B'-ig terjedő félkörbe eső összes elemeknek a hatását akarjuk megkapni, integrálnunk kell e kifejezést O és π határok között. Azaz

$$\frac{P}{2} = \frac{i\mu}{r(1-c^2)}\left[\int_0^\pi\sqrt{1-c^2\sin^2\alpha}\,.\,d\alpha - c\int_0^\pi\cos\alpha d\alpha\right],$$

innen a μ fluidumra az egész köráram hatása

$$P=\frac{2i\mu}{r(1-c^2)}\left[\int_0^{\pi}\sqrt{1-c^2\sin^2 a}\,.\,da-c\int_0^{\pi}\cos a\,da\right].$$

Tekintve hogy:

$$\int_0^{\pi}\cos a\,da=0,$$

$$P=\frac{2i\mu}{r(1-c^2)}\int_0^{\pi}\sqrt{1-c^2\sin^2 a}\,.\,da.$$

E képletben előforduló határozott integrál egy teljes másodrendű elliptikus integrál, melynek I értékét sorbafejtés útján

$$I=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2^2}c^2-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}c^4-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}c^6-\ldots\right]$$

végtelen sor adja meg.

Az I határozott integrál értéke tehát a c értékétől függ. Annyit azonban könnyen beláthatunk, akár az integrálandó függvénynek, akár a kifejtett végtelen sornak figyelmesebb megtekintéséből, hogy $c=0$ értékre

$$I_{c=0}=\frac{\pi}{2};$$

ezután c növekedésével az I értéke folytonosan kisebbedik, míg végre $c=1$ érték mellett lesz:

$$I_{c=1}=1.$$

Ez utóbbi esetből következik, hogy az I értékét meghatározó végtelen sor $c=1$ értékre, $\frac{2}{\pi}$ számértéket nyer, azaz:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}-\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\ldots$$

Az I értékének meghatározása után a μ mágneses fluidumra ható erő

$$P=\frac{4iuI}{r(1-c^2)}.$$

Ismeretes, hogy a sinusgalvanometernél, ha $\delta \measuredangle$ a mágnestű kitérését jelöli, az egyensúly esetén

$$H\mu \cos \delta = \frac{4i\mu I}{r(1-c^2)}$$

egyenlet áll, a melyből az áram intenzitása

$$i = \frac{Hr(1-c^2)}{4I} \cos \delta,$$

s innen a sinus-galvanometer constansa

$$C = \frac{Hr(1-c^2)}{4I}.$$

Könnyen belátható, hogy a constansnak ez a képlete — elenyésző hosszaságú mágnestű esetére, azaz ha $l=0$ és így $c=0$ és $I = \frac{\pi}{2}$ —, a

$$C = \frac{Hr}{2\pi}$$

ismeretes képletté változik.

Ezekből látható, hogy a sinus-galvanometer constansának szigorú képlete korántsem oly egyszerű mathematikai kifejezés, mint a melyet helyette használnak, mert az előbbihez még $1-c^2$ tényező járul és I-nek, egy teljes másodrendű integrálnak a reciprok értéke.

Hogy mily változást szenved a constans értéke a tű hosszabbitása által állandó sugár mellett, arra nézve maga a képlet szolgál felvilágositással. Ha a tű hossza ugyanazon sugarú köráram mellett nő, az l és a $c = \frac{l}{r}$ szintén növekedni fog, mig az $1-c^2$ és az I, folytonosan kisebb értékekhez fognak jutni, a mi annyit jelent, hogy a tű hosszabbodásával a constans képletének úgy a számlálójában, mint a nevezőjében egy-egy tényező értéke csökken. Ennélfogva azt kell eldönteni, hogy az

$$\frac{1-c^2}{I}$$

függvény c-nek $c=0$-tól $c=1$-ig terjedő növekedésével csökken-e, vagy növekedik.

Mivel $1-c^2$, c-nek 0-tól 1-ig terjedő értékeire, 1-től kezdve folytonos fogyás mellett, 0 értékhez jut, míg az I integrál c-nek ugyancsak 0-tól 1-ig terjedő változása mellett $\frac{\pi}{2}$-ről folytonosan fogyva 1 értékhez jut, következik, hogy $1-c^2$ bármily c értékére kisebb lesz az I integrálnál, a mi annyit jelent, hogy c-nek 0-tól 1-ig terjedő összes értékeire

$$\frac{1-c^2}{I}<1,$$

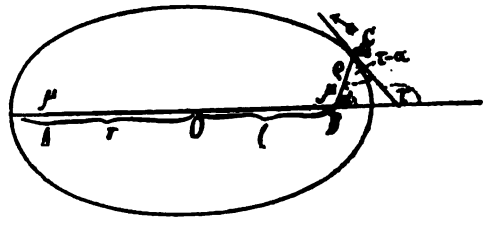
tehát a tű hosszának a növelése mellett kisebbedik a constans értéke.

Minél kisebb egy készülék constansa, annál kisebb áram szükséges arra, hogy a mágnestű egy bizonyos nagyságú szöggel térjen ki, n ás szóval annál érzékenyebb a műszer. Világos tehát, hogy ugyanazon köráramnál hosszabb tűt alkalmazva, kisebbíteni fogjuk a műszer constansát, de növeljük ugyanekkor az érzékenységet, a mi arra mutat, hogy előnyösebb, az elmélet szerint, az érzékenység szempontjából hosszabb mágnestűt alkalmazi.

II.

Az elliptikus áramú sinus-galvanometer constansa.

Legyen a 2. ábrán O az ellipsis középpontja, A és B az ellipsis két gyújtópontja, $2r$ a nagytengely hossza, l a gyújtópontok távola



2. ábra.

a középponttól és $c = \frac{l}{r}$ az ellipszis excentricitása, ds egy áramelem hossza, ρ a ds elemi áramhoz tartozó radius-vector, $a \measuredangle$ a második sark-coordináta, végre τ az a szög, melyet a ds elem vagyis a C ponthoz tartozó érintő a sark coordináta-rendszer tengelyével bezár. Könnyen belátható, hogy a radius-vector és az érintő közé fogott szög $\tau - a$. Ha a B pólusban a mágnesség mennyisége μ és az áram intenzitása i, a ds elemi áram hatása a pólusra

$$p = \frac{i\mu ds \sin(\tau - a)}{\rho^2} =$$

$$= \frac{i\mu ds}{\rho^2}(\sin\tau\cos a - \cos\tau\sin a)$$

$$= \frac{i\mu ds}{\rho^2}(\operatorname{tg}\tau\cos a - \sin a)\cos\tau$$

$$= \frac{i\mu ds}{\rho^2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\tau\cos a - \sin a}{[1+\operatorname{tg}^2\tau]^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel a sark-coordinátákkal meghatározott görbéknél

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{da}\operatorname{tg} a + 1}{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{da} - \operatorname{tg} a}$$

és

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{da}\right)^2},$$

s mivel az ellipszis egyenlete, ha $r(1-c^2) = \lambda$ rövidített jelzést használjuk:

$$\rho = \frac{\lambda}{1 + c\cos a},$$

azt fogjuk találni, hogy

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{\lambda\sin a}{(1+c\cos a)^2}$$

és

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\frac{1+c\cos a}{\lambda}\cdot\frac{\lambda c\sin a}{(1+c\cos a)^2}\operatorname{tg} a + 1}{\frac{1+c\cos a}{\lambda}\cdot\frac{\lambda c\sin a}{(1+c\cos a)^2} - \operatorname{tg} a},$$

miből átalakitás után

$$= \frac{c\sin^2\alpha+\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{c\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-c\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= -\frac{c+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ha az előbbi helyettesitéseket ds értékében is eszközöljük, lesz:

$$ds = \sqrt{\frac{\lambda}{(1+c\cos\alpha)^2}+\frac{\lambda^2c^2\sin^2\alpha}{(1+c\cos\alpha)^4}}\cdot d\alpha,$$

mely ismét

$$= \sqrt{1+c^2+2c\cos\alpha}\,.\,\frac{\lambda d\alpha}{(1+c\cos\alpha)^2}.$$

értékre vezet.

Mindezen értékek helyettesitése után

$$p=2i\frac{(1+c\cos\alpha)^2}{\lambda^2}\cdot\frac{\lambda\sqrt{1+c^2+2c\cos\alpha}}{(1+c\cos\alpha)^2}\times$$

$$\times\frac{-\frac{c+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha-\sin\alpha}{\left[1+\left(\frac{c+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}d\alpha$$

$$= \frac{i\mu}{\lambda}\sqrt{1+c^2+2c\cos\alpha}\,\frac{-c\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin^2\alpha+c^2+2c\cos\alpha+\cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}d\alpha$$

$$= -\frac{i\mu}{\lambda}(1+c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

E differentiális egyenletből a fél elliptikus áramnak a pólusra ható ereje kiadódik, ha az integrálást O-tól π-ig terjedő határok közt végezzük.

Az egész ellipszis alakú áram hatása pedig az előbbinek kétszerese, úgy hogy

$$P = -\frac{2i\mu}{\lambda}\int_0^{\pi}(1+c\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Mivel

$$\int_0^{\pi}(1+c\cos\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\pi}d\alpha+c\int_0^{\pi}\cos\alpha d\alpha,$$

tekintettel arra, hogy

$$\int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha = 0,$$

lesz:

$$\int_0^{\pi} (1 + c \cos \alpha) d\alpha = \int_0^{\pi} d\alpha = \pi.$$

E határozott integrál és λ értékének helyettesítése után, eltekintve az előjeltől, a mi úgyis csak az integrálás határainak megválasztásától függ, lesz:

$$P = \frac{2\pi i \mu}{r(1-c^2)}.$$

Tekintve ismét arra, hogy sinus-galvanometernél egyensúly esetén

$$H\mu \cos \delta = \frac{2\pi i \mu}{r(1-c^2)},$$

az áram intenzitása:

$$i = \frac{Hr(1-c^2)}{2\pi} \cos \delta$$

a honnan az elliptikus áramú sinus-galvanometer constansa:

$$C = \frac{Hr(1-c^2)}{2\pi}$$

feltéve, hogy a pólusok az ellipszis gyújtópontjaiban vannak.

Mivel a kör oly ellipszisnek tekinthető, melynek az excentricitása $c=0$-al, ugyancsak ez az egyenlet, magában foglalja $c=0$ értékre, a körárammal és igen rövid mágnestűvel biró sinus-galvanometer constansát is.

Összehasonlítva már most egy rövid mágnestűvel és $2r$ átmérővel biró köráramú sinus-galvanometer

$$\frac{Hr}{2\pi}$$

constansát, egy a gyújtópontok egymástól való távolságának megfelelő hosszaságú mágnestűvel és $2r$ hosszú főtengelylyel biró elliptikus áramú sinus-galvanometer

$$\frac{l/r\,(1 - c^2)}{2\pi}$$

constansával, azt találjuk, hogy az utóbbi $(1 - c^2)$ tényezőben különbözik az előbbitől.

Mivel $c<1$, c^2-re is feutáll, hogy $c^2<1$ és igy $1-c^2<1$, a mi annyit tesz, hogy az elliptikus árammal kisebb a constans értéke, mint a köráram esetén, és pedig annál inkább kisebbedik a köráramú galvanometer constansához képest, mennél nagyobbá teszszük a c értékét, az ellipszis excentricitását. Mondhatnók, mennél lapultabb ellipszissé nyomjuk össze a kört, annál inkább kisebbedik a constansának értéke, de e mellett mindinkább növekedik a készülék érzékenysége.

Összefoglalva tehát a fentebbi sorokból levonható tanulságot, arra az eredményre jutunk, hogy az áramkörnek ellipszissé lapitása által, feltéve, hogy a mágnestü hoszszát a gyújtópontok távolsága határozza meg, a sinus-galvanometer constansának szigorú érvényességgel biró képlete igen egyszerü mathematikai alakot ölt s az áram hatásának fokozásával egyszersmind a készülék érzékenysége is növekedik.

Szijártó Miklós.

EGY SOR, MELY A «π» ÉRTÉKÉHEZ VEZET.

A következő végtelen sorról:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 . 3^2 . . . (2n-3)^2 (2n-1)}{2^2 . 4^2 . . . 2(n-1)^2 (2n)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2 . 3}{2^2 . 4^2} - \frac{1^2 . 3^2 . 5}{2^2 . 4^2 . 6^2} - \cdots$$

kimutatható, hogy határozott számértéket képvisel azaz összetartó, továbbá hogy az érték, a melyhez mindinkább közeledik, azaz az összege nem más mint $\frac{2}{\pi}$.

Ismeretes dolog, hogy

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

végtelen sor összetartó, s ez maga után vonja az

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots$$

sor összetartását is.

Ha a tárgyalt sor tagjaiban a tényezőket kellő módon szétválasztjuk, és az első tagot elhagyjuk, a sor a következő alakban lesz irható:

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{1}{4^2} - \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdot \frac{1}{6^2} - \cdots$$

$$- \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{1}{(2n)^2} -$$

$$- \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{(2n+2)^2} - \cdots$$

Ha tekintetbe veszszük, hogy

$$\frac{(n-1)\,(n+1)}{n^2} < 1,$$

beláthatjuk, hogy e sor minden tagjában az utolsó tényező előtt álló tényezők valódi törtek; és így minden tagja kisebb, mint az

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

sor megfelelő tagja, a mi a fentebb említett sor összetartását igazolja.

A sor összegének meghatározására képezük az egymásutáni tagok összegét, s ekkor lesz:

$$a_0+a_1=1-\frac{1}{2^2}=\frac{1.3}{2^2}=\frac{1^2.3}{2^2},$$

$$a_0+a_1+a_2=\frac{1^2.3}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}=\frac{1^2.3(4^2-1)}{2^2.4^2}=\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2},$$

$$a_0+a_1+a_2+a_3=\frac{1^2.3^1.5}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}=$$

$$=\frac{1^2.3^2.5\,.\,(6^2-1)}{2^2.4^2.6^2}=\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}.$$

Az eddigi eredmények arra engednek következtetni, hogy

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1^2.3^2.5^2.\ldots(2n-1)^2\,(2n+1)}{2^2.4^2.6^2.\ldots\;[2(n-1)]^2\,(2n)^2}.$$

Hogy azonban ez az eredmény teljesen bebizonyíttassék, ki kell mutatnunk, hogy a talált törvényszerűség az $(n+1)$-ső tag hozzácsatolásával is érvényben marad, azaz, hogy

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=$$
$$=\frac{1^2.3^2.\ldots(2n+1)^2\,(2n+3)}{2^2.4^2.\ldots\;(2n)^2\,(2n+2)^2}$$

egyenlet csakugyan fennáll.

Mivel

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=$$

$$=\frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}-$$

$$-\frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2\ldots(2n)^2(2n+2)^2}=$$

$$=\frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2(2n-1)^2(2n+1)[(2n+2)^2-1]}{2^2.4^2\ldots(2n)^2.(2n+2)^2},$$

s tekintve, hogy

$$(2n+2)^2-1=(2n+1)(2n+3),$$

lesz:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}=$$

$$=\frac{1^2.3^2\ldots(2n+1)^2(2n+3)}{2^2.4^2\ldots(2n)^2(2n+2)^2};$$

de ez határátmenet után a WALLIS-féle képletben szereplő kifejezés reciprok értékét adja, — a miből következik, hogy

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}-\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}-\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

Hogy ez a sor valóban $\frac{2}{\pi}$ értékkel bir, kimutatható még a következő úton is. Ismeretes hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=1$$

A $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ integrandust sorba fejtvén, lesz:

$$\sqrt{1-\sin^2\varphi}=1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\sin^6\varphi-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\sin^8\varphi-\cdots$$

és innen

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\sin^6\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\sin^8\varphi - \ldots\right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi d\varphi$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8\varphi d\varphi - \ldots$$

Az integrálások végzése után lesz:

$$I = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \ldots\right]$$

a honnan

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \ldots$$

Ez pedig a czikk elején tárgyalt sor. Tehát e második bebizonyitást használván, mellékesen a WALLIS-féle formulának új bebizonyitására juthatunk.

Szijártó Miklós.

PHYSIKAI SZEMLE.

A Hertz-féle kisérletekről.* Augusto Righi, Su alcune disposizioni sperimentali per la dimostrazione e lo studio delle ondulazioni elettriche di Hertz. *Nuovo Cimento.* T. 35. pag. 12. 1894.

Augusto Righi, Sulle oscillazioni elettriche a piccola lunghezza d'onda e sul loro impiego nella produzione di fenomeni analoghi ai principali fenomeni dell'ottica. *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna.* Ser. V., t. IV.

Az elektromos rezgésekre vonatkozó nagy számú és terjedelmű közlemény közől Righi-nek a czímben idézett két dolgozata a legalkalmasabb arra, hogy a Hertz-féle kisérleteknek egyszerű és igen jó — talán a legjobb elrendezésére utasítást, valamint a vizsgálatok főbb eredményeiről áttekinthető képet adjon.

A Hertz-féle kisérletek lényege tudvalevőleg a következő: Igen magas potentiálu elektromosságnak valamilyen forrása, a minő pl. a Ruhmkorff-féle szikraindító vagy pedig a Holtz-féle gép, egy szimmetrikus kisütő két ágát elektromossággal tölti, mely rezgésszerűen kisülvén, a környezetben nagy sebességgel terjedő elektromos hullámokat gerjeszt. Ezek hatása alatt a vezetőkben szintén elektromos rezgések jönnek létre, melyek szikrában, vagy másféle módon is észrevehetőkké válnak, ha a vezető megfelelő alakkal bir. A kisütő capacitásától és öninductiójától függ a rezgésidő, mely a másodpercz ezermilliomodrészeinek rendjébe esik, sőt Righi kisérleteiben még ennél is jóval kisebb. Minthogy a kisütő a rezgéseket gerjeszti, *vibrator*-nak vagy *oscillator*-nak nevezik. Az a második vezető, mely a térben elterjedő elektromos hullámokat észrevehetőkké teszi, *resonator*-nak neveztetik.

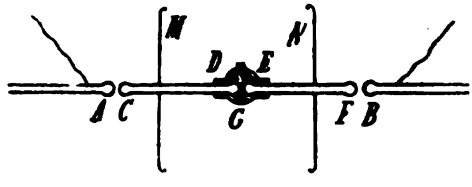
Righi alább leirandó kisérleteit 30 *cm* szikrát adó 2 forgó korongú Holtz-géppel végezte. Használható azonban a szikraindító is.

*Oscillator*át az 1. rajz mutatja: *A* és *B* 1 *cm* vastagságú rézcsövek, melyek 4 *cm* átmérőjű rézgolyókban végződnek, vastag rézdrótok révén a Holtz-

* L. Természettud. Közlöny 1889.

féle gép két sarkával közlekednek. Ezen golyók között foglal helyet a tulajdonképeni oscillator, *CF*. Ez két egyenlő rézcsőből áll, melyek végeire az előbbeniekkel egyenlő nagyságú golyók vannak szerelve. *CF* mintegy 3—4 *cm*-nyire vannak az *AB* golyóktól; *DE* golyók távolsága 3—5 *mm* között változik. Az oscillator egész hossza körülbelül 72 *cm*. — Ha a gép működik, *AC* és *FB*, továbbá *DE* közökben egyidejűleg szikrák ugranak át. A *DE*-ben létrejövő szikra az, melynek hatása alatt *CF* kisütőben elektromos rezgések jönnek létre; hatásuk a környezetre kiterjed és nagyobbnak mutatkozik, ha a két külső szikra hossza növekedik. De ez csak egy bizonyos határig van így; addig, míg a szikrák vakító fehérek és élesen csattogók.

Az oscillator capacitását *MN* 24,5 *cm* átmérőjű, gömbölyített szélű fémkorongok növelik, melyek a rézcsöveken gyenge surlódással ide-oda tolhatók. Egymástól való távolságuk rendesen 43 *cm*.



1. ábra.

DE szikraköz 11 *cm* átmérőjű, vastagfalú üvegedényben van; az edény szigetelő folyadékkal van megtöltve. Sarasin és De la Rive szerint e czélra legalkalmasabb a vazelin-olaj, melyben szilárd vazelin van feloldva; az oldat oly sűrű, hogy alig önthető. Ebben a szigetelőben a szikrák sokkal hatásosabbak, mint a levegőben s hozzá a berendezés még azzal az előnynyel jár, hogy a *DE* golyókat nem kell folyton tisztogatni. Mikor a golyók felülete a szikráktól okozott chemiai folyamatok folytán kéreggel vonódott be s az eleinte áttetsző szigetelő már tinta-feketévé vált: még akkor sem csökken a szikrák gerjesztő hatása.

Resonator gyanánt 2 *mm* vastagságú rézdrótból hajlított 57 *cm* átmérőjű kört használt. A drót nem alkotott teljes kört, a mennyiben két vége közé 10—15 *cm* hosszaságú Geissler-féle cső volt befogva. Ez a resonator az oscillatortól 3—4 *m* távolságban reagált az elektromos rezgésekre: a Geissler-cső világítása egész hallgatóság előtt tette a hatást láthatóvá. Ennek a resonatornak megfelelő hullámhossz 4,10 *m*.

A készülék az elektromos erő hullámainak visszaverődését is megmutatta. E végből az oscillatortól 5 *m*-nyire 4 m^2 területű czinklap volt felállítva, úgy, hogy síkja az oscillator tengelyén átmenő függélyes síkkal

párhuzamos legyen. A hullámok a lapon visszaverődvén, álló hullámok keletkeznek, melyek csomóit a Geissler-csöves resonator könnyen felkeresi. Ha a resonator síkja az oscillátoron átmenő függélyes síkkal párhuzamos s a Geissler-cső a kör legmagasabb, vagy legmélyebb pontján van, az elektromos erő hozza létre a hatást; ha ellenben a resonator az oscillátor tengelyén átmenő vízszintes síkban tolódik el s a Geissler-cső az oscillator tengelyével párhuzamos átmérő egyik vagy másik végén van, akkor a mágnesi erő hatása érvényesül.

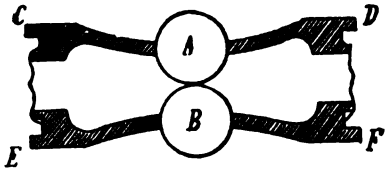
A drótokban az elektromos hullámok terjedését a következőleg mutatja meg. Szigetelő oszlopokon 6 *m* hosszú rézdrót van kifeszítve; egyik végéről 2 *m* hosszaságú drót vezet 100 cm^2 területű czinklemezhez, mely az oscillator egyik korongjának szomszédságában, síkjához párhuzamosan, van elhelyezve. A drót végén történő visszaverődés folytán e drótban álló hullámok jönnek létre, a melyekben a resonátornak a drót mentén való eltolásával az elektromos és a mágnesi erő egymástól elkülönítve mutatható ki. Ha a resonator síkja eltolás közben a dróton átmegy s a Geissler-cső a körnek a dróthoz legközelebb, vagy tőle legmesszebb levő pontján van: csak a mágnesi erő hatása érvényesül. Ha ellenben a resonator síkja a drótra merőleges, az elektromos erő hatása elkülönítve mutatható ki; kell azonban, hogy a Geissler-cső annak az átmérőnek egyik végén legyen, melynek meghosszabbítása a dróton megy át.

Míg az eddig leírt kisérletek főleg a nagy hallgatóságnak való bemutatás szempontjából vannak egybeállítva, s lényegökben nem is térnek el Hertz eredeti kisérletei berendezésétől: addig a második értekezésben Righi inkább a további kutatás és részletes tanulmány czéljait tartja szemmel, s mint lényeges haladás kiemelendő, hogy aránylag igen rövid, 2,6 *cm* hosszaságú hullámokat állított elő; s ezzel oda jutott, hogy az elektromos kisérletekhez ugyanazokat a készülékeket használhatta, a melyekkel az optikában kisérletezünk.

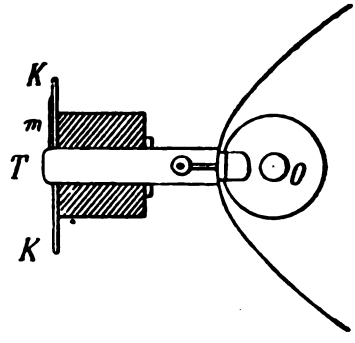
Oscillator gyanánt ezekben a kisérletekben csupán csak két golyó szolgál. Ezek a golyók (l. 2. ábra) *A* és *B*, könnyen tágítható skatulyának *CD*, illetőleg *EF* fedőlapjaiban ülnek; a fedőlapok ebonitból, üvegből, vagy paraffinnal telített fából vágott korongok, melyek bőr-, kaucsuk- vagy pergamentpapirszalaggal vannak skatulyává összekapcsolva. A skatulya a már leírt szigetelő keverékkel van megtöltve. Ez az oscillator — *O* — egy parabolás hengertükör gyújtóvonalában van, melylyel együtt *T* ebonittengelyre van erősítve, úgy, hogy körülötte forgatható legyen (3. ábra). Állását a szerkezet állványával szilárd kapcsolatban levő *K* körbeosztáson *m* mutató jelzi.

A parabolás tükör gyúponttávola 8 *cm*, magassága 40 *cm*, nyilása 50 *cm*; a golyótartó korongok átmérője mintegy 15 *cm*. (Ilyen parabolás

tükör könnyen készíthető: A megadott adatok szerint száraz fenyőfa deszkából 2 parabolát vágunk ki, a két egyenlő mintára $^1/_2$ *mm*-es czinkpléhet borítunk s reászögecseljük.) A 4. ábra az állványára szerelt tükröt mutatja. *IH* szigetelő rudak vastag rézdrótok végén levő két golyót tartanak — az alsó nem látszik! — melyek az oscillatort közre fogják. A távolságokra nézve irányadó, hogy akkor, ha a külső golyók s az oscillator golyói között a távolság 2 *cm*, a gerjesztő szikra 0,8 *mm* legyen.

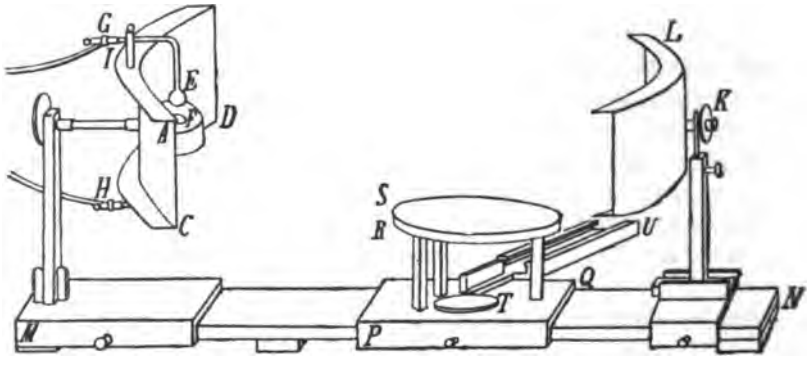


2. ábra.



3. ábra.

A resonatorokat Righi tükördarabokból készítette. Közönséges ezüstözött tükörből néhány *cm* hosszaságú keskeny szalagokat vágott ki, a tük-

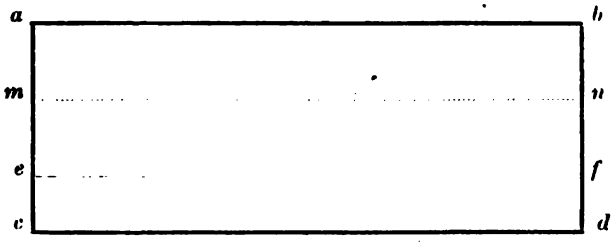


4. ábra.

röztető fémet középen lehetőleg keskeny vonalon lekarczolta s a karczolatra merőleges irányban keskeny darabokra fölszeletelte. Az ilyen üvegdarabban, ha a tükör tengelyével párhuzamos helyzetben tartotta, az ezüstbevonat megszakítása helyén élénk szikrák képződtek az oscillator szikráinak hatása alatt, melyek sötétben 1—2 méternyire is voltak megláthatók.

A resonator ily alakja azért oly kedvező, mert tapasztalásszerűleg ugyanazon potentialkülömbségre az üvegfelületen hosszabb szikrák keletkeznek, mint a szabad levegőben, s a szikrák az égésfolyamatok miatt élénkebbek is.

A resonatorok így készültek: *abcd* üvegszalagon *efcd* részen az ezüst eltávolíttatik, úgy, hogy *ae=bf* a készítendő resonatorok hosszával legyen egyenlő. A tükör azután, a védő bevonat természete szerint, forró alkohol vagy terpentinszeszbe teendő, hol a máz leolvad s az ezüstözés szabaddá válik. Erre az ezüstözést *mn* vonal mentén finom gyémánt hegygyel lekarczolván, a szalag keskeny darabkákra felvágható. Egy-egy ilyen darab kész resonator, melynek ezüstmentes része kézbe fogható, vagy a resonator másnemű megerősítésére használható fel. A gyémánt, ha gyengén nyomják az ezüst lekarczolása közben, síma szélű, 1—2 ezredrész milliméternyi barázdát húz a bevonatban. Ez a barázda, minthogy a két vezető lemez



5. ábra.

között átütő szikrák az ezüstöt elégetik, lassan szélesedik, a mi a resonator érzékenységének csökkenését vonja maga után.

Az oscillator golyóinak s a hozzátartozó resonatoroknak méretei, valamint a megfelelő hullámhosszak a következők:

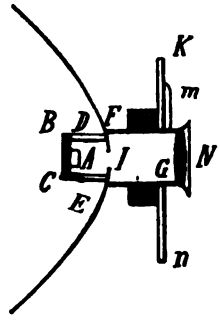
	Az oscillator golyóinak átmérői	A resonator méretei	Hullámhosszak
I.	0,8 *cm*	0,9×0,1 *cm*	2,6 *cm*
II.	3,75 «	4×0,2 »	10,6 «
III.	8,0 «	10×0,6 »	20,0 «

A III. alatt közölt készülékekkel az összes Hertz-féle kisérletek több hallgatónak mutathatók be. Az I. és II. készülékei ellenben egyéni megfigyelésekre vannak szánva. Érdemes megjegyezni, hogy a legkisebb resonator a 10 filléres felületén történő visszaverődést megmutatja.

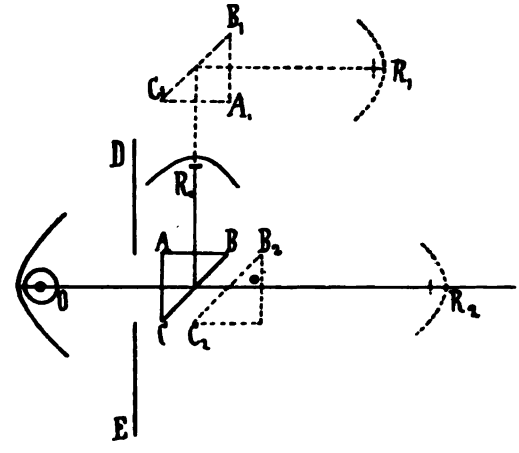
A tükör-resonatorokat Righi egy második, kisebb parabolás henger gyujtóvonalában erősítette meg (6. ábra). A tükör épen úgy készül, mint az oscillatoré s úgy is van állványra szerelve. Az eltérés csak annyi, hogy az

igen kicsi szikrák megfigyelése végett a tükör mögé N egyszerű nagyító van beilleszte, mely a czinklemezbe vágott I nyíláson keresztül BC resonator A szikraútjára beállítható. DE szigetelő rudacskák a resonator tartói.

A vibrator és resonator mintegy 2½ m hosszaságú fatalpra vannak ideoda tolhatólag szerelve. A talpon PQ, vezetékkel biró deszka is csuszolható, mely R asztalkát hordja. T-ben U szánnak tengelye van, mely az alább közlendő kisérletekben a resonator tükör felvételére szolgál. Az így összeállított készülék tehát mintegy egyesítése az optikai padnak s a spektrálkészüléknek.



6. ábra.



7. ábra.

Kisérletek. — 1. *Egyenes vonalú terjedés.* Az oscillator tükrének tengelyében a resonator, ha nagy Holtz-féle gép hozza létre a gerjesztő szikrákat, 24 m távolságban szikrákat ad. A fémek, s általában a vezetőknek ismert anyagok a hullámok útját elvágják, ellenben a szigetelők — fa, falak és kőzetek is! — a hullámokat átbocsátják.

2. *Visszaverődés.* A tükör tengelyére merőlegesen álló fémtükör — sík fémlap vagy akár közönséges szobatükör — visszaveri az elektromos hullámokat, és pedig könnyen kimutathatólag a másféle hullámmozgások visszaverődési törvénye szerint. Mint már említve volt, parányi tükör hatása is kimutatható. A kisérletet külön tükör nélkül is lehet előidézni: egyszerűen a tenyerünket tartjuk a hullámok utjába. Ugyanis testünk, mint vezető, visszaveri az elektromos hullámokat. Ez a kisérlet egyúttal figyelmeztetőül szolgál az e fajta vizsgálatoknál szemmel tartandó zavaró körülményekre.

3. *Törés.* A dielektrumokból készült prizmák az elektromos hullámokat

megtörik s az elhajlításból, valamint a törőszögből meghatározható a törésmutató. Az ily módon meghatározott törésmutatók közel egyezők a fénysugarak töréséből nyert értékekkel. A kis hullámhosszak esetében a közönséges üvegprizma használható. — Righi egy derékszögű paraffinprizmával előidézte a *teljes visszaverődés* tüneményét s ennél a következő érdekes megfigyelést tette: Ha a prizma *CB* átfogói lapjához (7. ábra), a melyen a teljes visszaverődés létesült, egy második derékszögű prizma C_2B_2 átfogói lapját közelítette, a szikra gyengülni kezdett, mihelyt a két lap egymástól való távolsága a hullámhossz negyedrészénél kisebbé lett és pedig annál inkább, mennél közelebb jutott egymáshoz a két lap s a szikra teljesen eltűnt, mielőtt a lapok közvetlenül érintkezhettek volna. Ugyanakkor a második prizma mögé tartott R_2 resonatorban kezdtek szikrák mutatkozni. Ez azt mutatja, hogy a teljes visszaverődés megszüntetésére nem szükséges a két lap közvetlen (optikai) érintkezése: $\frac{\lambda}{4}$-nél vékonyabb levegőréteg a visszaverődés és törés tüneményében úgy viselkedik, mint maga a törő anyag. Ime a Fresnel-féle ismeretes hipotézisnek megfelelő analogon. *D E* fémlemezek a beeső hullámot határolják.

Lencséket — a legmegfelelőbbek a hengerlencsék! — igen könnyen lehet papir vagy famintába paraffinból, szurokból, kénből önteni. Terpentinnel, szénkéneggel, petróleummal vagy másféle szigetelő folyadékkal telt üveg kész hengerlencse, mely megfelelő méretek mellett az elektromos hullámok összegyűjtésére felhasználható.

4. *Álló fémhullámok.* Fém falról visszaverődő hullámoknak a beesőkkel való interferentiája már igen kis síktükrökkel sikerül. Az első csomókat a tenyerünkön történő reflexio is előidézi. A csomók egymástól való távolsága a hullámhossz ismeretére vezet.

5. *A Fresnel-féle tükörkisérlet.* Az oscillator tükréről visszaverődő hullám két, egymás meghosszabbításában levő síktükörről a resonator parabolás tükrére esik, melynek resonatora élénk szikrákat kezd mutatni. Az egyik tükröt a normális irányában eltolván, a resonator szikrái kimaradnak, valahányszor a tükrök síkjainak egymástól való távolsága $(2n+1)\frac{\lambda}{4}$. A módszer a dielektrumok törésmutatójának mérésére is alkalmas. E végből az egyik tükörre az illető dielektrumból öntött lemezt kell fektetni s a másiknak eltolása által az egyenértékű levegőréteg vastagságát meghatározni.

Kénből vagy paraffinból öntött *biprizma* is használható e czélra.

6. «*Vékony lemezek*» *színeit* előidéző interferentia analog tüneménye, 1,5—4,2 *cm* vastagságú kén vagy paraffinlemezekkel idéztetett elő. A leme-

zek területe 24×50 cm^2 volt, vastagságuk pedig 1,5—4,2 cm között változott. Ha i a beesés szögét, d a lemez vastagságát, n a törésmutatót jelenti az első és második határlapon visszavert hullámok útkülömbsége itt is, épen úgy, mint a fényre nézve

$$\delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$$

6—7 mm vastagságú üveglemezen volt észlelhető visszaverődés, ellenben ugyanolyan vastagságú kén- vagy paraffinlemezek a visszaverődésnek nyomát sem mutatták.

7. *Diffractio.* Az egyszerű és kettős-résen átmenő hullámokban, valamint a különböző alakú vezetők árnyékában ugyanoly módon kimutatható a diffractio, mint a fényben. A HUYGENS-féle zónák a jelenségek magyarázatában épen úgy értékesülnek, mint az optikában.

8. *Polarisatio.* Az oscillator és resonator parabolás tükreiről az eddigi kisérletekben feltételeztük, hogy gyujtóvonalaik párhuzamosak. Ha most bármelyiköket a tükör tengelye körül való forgatás útján kimozdítjuk, szikrák gyengülnek; mikor a gyujtóvonalak egymásra merőlegesek, a szikrák teljesen kimaradnak. Ez tehát a keresztezett turmalinlemezek vagy Nicol-hasábok kisérletének analogonja. Totális reflexio útján az «egyenesen polarizált» rezgés átalakítható elliptikusan vagy circularisan polarizált rezgéssé, és pedig FRESNEL-nek az optikából ismert fogásai szerint, a mint ez a 7. ábra megtekintéséből nyomban kiviláglik.

Általában az analogiák köre igen tágnak bizonyult, de oly jelenségek is akadtak, melyeknek optikai analogonjuk nincsen.

Így pl. az egy és ugyanazon hullámfelületen levő két resonator hat egymásra. Távolságukat változtatván, a szikrázás élénksége mindkettőben periodikusan változott, ha érzékenységök egyforma volt; különben csak az érzékenyebbiken mutatkozott változás. A maximumnak $(m+1)\frac{\lambda}{2}$ távolságoknak feleltek meg. — Az ugyanazon sugáron levő resonatorok is hatottak egymásra, mely esetben a maximumok $(m+1)\frac{\lambda}{4}$ távolságokban mutatkoztak. *B.*

IRODALOM.

Dr. C. Christiansen: *Elemente der theoretischen Physik.* Deutsch herausgegeben von Dr. Joh. Müller. Mit einem Vorwort von Dr. E. Wiedemann. Leipzig, 1894., Joh. Ambr. Barth. Ára 10 m.

Az előszót író erlangeni professzor megörült koppenhágai szaktársa dán nyelven megjelent könyvének, mert mint mondja, akkorig az elméleti physikának csupa terjedelmes tárgyalásai léteztek, a melyek közöl felemlíti F. Neumann-nak és Kirchhoff-nak az előadásait, V. von Lang munkáját s Poincaré-nak németre is átfordított előadásait; már pedig, hogy mily hasznos lehet egy rövid tankönyv, a mely képesítsen legalább a nem túlzóan speciális tartalmú eredeti közlemények megértésére, ezt ő Kirchhoff-nak 1870/71 telén tartott ily természetű collegiumán tapasztalta Heidelbergában. Gondoskodott tehát a német tanulók érdekében a dán könyv német kiadásáról, a melyet előbb részint maga a szerző, részint a fordító még átdolgozott, «hogy minden szükségletet kielégítsen».

A könyv 452 lapnyi terjedelméhez képest, első pillanatra meglepő az anyagbősége és pedig jóllehet, hogy sok oly régibb és újabb disciplina hiányzik belőle, a melyek legalább is annyira fontosak, mint azok, a melyek benne vannak. Tizennégy szakaszra van osztva, a következő czímiratokkal: 1. Általános mozgástan. 2. Rugalmasság elmélete. 3. Folyékony testek æquilibriuma. 4. Folyékony testek mozgása. 5. Belső surlódás. 6. Hajesövesség. 7. Elektrostátika. 8. Mágnesség. 9. Elektromágnesség. 10. Inductio. 11. Elektromos rezgések. 12. Fénytörés izotrop és átlátszó hatókban. 13. Hőelmélet. 14. Hővezetés. — Már a szakaszok e czímsora is elárul nagy hézagokat. Igy pl. az elektromágnesség alapján tárgyalt fénytan már a reá vonatkozó 12. czímirat szerint is mostohán van kezelve; az elektromos áramlás elméletének nemcsak hogy nincs külön szakasza, de a 9. szakasz két lapnyi utolsó czikkébe van beszorítva az egész, s az Ohm és a Joule-féle törvénynek vonalas vezetőkre való megszerkesztéséből áll, az elektromos áramlás thermodynamikai tárgyalásának nyoma sincs a könyvben s azzal a kijelentéssel látszik elütni, hogy «Hier fehlt es in Wirk-

lichkeit auch in mancher Beziehung an Klarheit» (259. l.) stb. stb. Áttekintve a 135 czikk czímiratát is, még aránylag mindig igen gazdagnak tarthatjuk a könyv foglalatát, sőt még akkor is, ha olvasva, a czímiratok alatt sokszor jóval kevesebbet találunk, mint a mennyi alájuk foglalható. Pedig levezetéseiben, bizonyításaiban nem mindig a legegyszerűbb módszerekkel él; pl. a rugalmasság tanában «Zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen den Schiebungen und den Tangentialkräften» (102. l.) V. v. Lang nehézkes geometriai eljárását követi (Theor. Phys. 411. l.). Másrészt gyakran használ kétféle levezetési vagy bizonyítási módot; így pl. a sűrűség Poisson-féle egyenletét kétféle módon állapítja meg, a halmazállapotváltozások alapegyenleteit a szokásokhoz hasonló módon is, meg Planck egyszerűbb és teljesebb módszere szerint is származtatja stb. stb. Néha háromféle módon is megmutat valamit. Annál bámulatosabbnak látszhatik a kis munkába befoglalt anyagnak a hézagok daczára is szép gazdagsága.

Ennek azonban olyan oka van, a mely miatt a könyvnek nagyobb körökben való használhatósága nem várható. Ugyanis a tárgyalás átlagosan egészen szokatlanul szűkszavú és rövid szabású. Ennek a szokatlan rövidségnek van ugyan egy jó általános jellemvonása is, hogy t. i. az ábrák világosan látható jelentményeinek az értelmezésével nem fölöslegeskedik, s a szöveg közé nyomott 143 elég jó ábra nem csekély segítségül szolgál. Azonban néha az ábrára hivatkozás rövidsége is túlságos, a mennyiségtani következtetésekben pedig az egymásután következő affirmatiók összefüggésének a felismerése a szókímélés miatt nem ritkán kisebb-nagyobb mérvű inventiót követel, olyanokat, a minőknek a szüksége tankönyvekben, sőt kézikönyvekben sem szokott ily fokon előfordulni. Álljon itt erre is egy-két példa a sok elősorolható közől. A folyadékok Lagrange-féle mozgási egyenleteiről szóló 45. §.-ban a continuitás egyenletének a felállításához így fog hozzá: «Azok a folyadék-részecskék, a melyek eredetileg *da*, *db*, *dc* élű, derékszögű parallelepipedonban voltak, *t* idő mulva olyanban vannak, a melynek az éleihez tartozó vetületek» s itt azután következik a hat vetület kifejezése, tt. m. $\partial x/\partial a \,.\, da$ stb., de semmi útbaigazítás ennek a belátására nem adatik. Az inductiós coëfficiensek meghatározásával foglalkozó 86. §-ban erre a kifejezésre:

$$m=2\int_0^{\pi}\frac{r\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{p^2+(q^2-p^2)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}}$$

csupán ennyit mondván: «Ha α egy kis szög, a mely úgy van választva, hogy $q\alpha$ igen nagy a p-hez képest, akkor tehetjük»: írja:

$$m=2\int_0^{\alpha}\frac{rds}{\sqrt{p^2+q^2\frac{\varepsilon^2}{4}}}+2\int_0^{\pi}\frac{rd\varepsilon\left(1-2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right)}{q\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

Mindent megmondott ugyan, a mi a második kifejezésnek az elsőből való kifrásához okvetetlenül szükséges, dé az összefüggésnek keresgélés nélkül való felismerésére olyszerű gyakorlottság, vagy találékonyság szükséges, a melyet a kezdők nagy többségétől nem lehet elvárni, s nagy részétől a szükségeltük keresgélés megejtése sem reményelhető bizonyossággal, hanem inkább gondolható, hogy néhány ily locustól megriasztva, félre teszik a könyvet. — Már pedig míg egy oly kényelmetlenség van a könyvben, a melynek részben rövidségét köszöni: a törteknek sormetsző vonalakkal jelzése, a melyek néha egész szálka-sorokba sereglenek. A munka első szakaszáról (általános mozgástan), a melyre nézve Lagrange s a mi vele összefügg, nem létezik, azt hiszem, hogy eltekintve a kis beléje iktatott potentiál-elmélettől, a Mécanique analitique megjelenése előtt is helyesebben meg lehetett volna szerkeszteni és írni. A többi részekben a felölelt anyag terjedelméhez képest általában eléggé figyelembe van véve a tudomány mai állása. A szövegezés, kivált a definitiók megfogalmazásában gyakran pongyola, de azért átlagával jóval szabatosabb, mint V. v. Lang munkájának a szövege.

Csak olyanoknak ajánlhatom a könyvet, a kik az alkalmazott mathesisben valamelyes jártassággal bírnak, csak némi előleges tájékozást akarnak a tudomány anyaga felől szerezni és elszánták magukat a könyvnek mindig mulasztásokból és sohasem a tárgy természetéből származó nehézségeit legyőzni, vagy azokon egyelőre átsíklani.

F. Gy.

MEGOLDOTT FELADATOK.

21. *Legyen*

$$F(u, v) = 0$$

valamely görbének egyenlete vonalkoordinátákban; bizonyíttassék be, hogy az (u, v) *érintőnek érintéspontjában a görbületi mértéket a következő képlet adja:*

$$G = \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}} = \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

(KÜRSCHÁK.)

Ötödik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A görbe egyenlete:

$$F(u, v) = 0.$$

A simuló kör középpontjának egyenlete:

$$au + bv + 1 = 0. \qquad 1)$$

E pontnak az (u, v) érintőtől mért merőleges távolsága:

$$\frac{au + bv + 1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r; \qquad 2)$$

ez az egyenlet egyszersmind a simuló kör egyenlete vonalkoordinátákban.

Az érintkezés másodrendű lévén a 2) egyenlet kétszeri differenciálásából származott, a és b állandókban lineáris egyenletrendszerből a és b értékei kifejezhetők.

Ez egyenletek:

$$av(udv-vdu)-bu(udv-vdu)+udu+vdv=0 \qquad 3)$$

$$a(udv^2+uvd^2v-vdudv)+b(vdu^2-u^2d^2v-ududv)+ \\ +du^2+vd^2v+dv^2=0, \qquad 4)$$

melyekből:

$$a=\frac{-dv(udv-vdu)^2+u\,.\,du\,.\,d^2v(u^2+v^2)}{(udv-v\,.\,du)^3}$$

$$b=\frac{du(udv-v\,.\,du)^2+v\,.\,du\,.\,d^2v(u^2+v^2)}{(udv-vdu)^3}.$$

Ez értékeket 2)-be behelyettesítvén, lesz

$$r=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}du\,.\,d^2v}{(udv-vdu)^2}.$$

Ebből a görbület mértéke:

$$\frac{1}{r}=G=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}. \qquad 2a)$$

A görbe egyenletéből:

$$\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}=0$$

és

$$\frac{\partial^2F}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2F}{\partial u\partial v}\frac{dv}{du}+\frac{\partial^2F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}=0,$$

melyekből:

$$\frac{dv}{du}=-\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^{-1}$$

és

$$\frac{d^2v}{du^2}=-\left[\frac{\partial^2F}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial u\,.\,\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial^2F}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^{-3}\right].$$

Ez értékeket 2a)-ba téve végül:

$$G=\frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u}+v\cdot\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2F}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2-2\cdot\frac{\partial^2F}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial^2F}{\partial v^2}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

Hatodik megoldás Grünwald Miksa főgymnasiumi tanár úrtól Losonczon.

Legyen u, v a görbe egyik érintőjének koordinátái, akkor a szomszédos érintő koordinátái: $u+du$, $v+dv$. Ezek metszéspontja az u, v érintő érintési pontja. Legyenek ennek koordinátái x, y, akkor

$$ux+vy+1=0$$
$$(u+du)x+(v+dv)y+1=0$$

a miből, u-t független változónak, v-t pedig u függvényének tekintvén:

$$x=-\frac{\frac{dv}{du}}{u\frac{dv}{du}-v} \qquad y=\frac{1}{u\frac{dv}{du}-v}.$$

A görbe szomszédos pontjának, vagyis $u+du$, $v+dv$ érintési pontjának koordinátái: $x+dx$, $y+dy$. Most már

$$dx=-\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)\frac{d^2v}{du^2}-\frac{dv}{du}\left(\frac{dv}{du}+u\frac{d^2v}{du^2}-\frac{dv}{du}\right)}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du$$

vagy összevonván

$$dx=-\frac{v\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du$$

és hasonlóképen

$$dy=-\frac{u\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du.$$

Az e szomszéd pontokat összekötő ds ívelemre nézve:

$$ds^2=dx^2+dy^2=\frac{(u^2+v^2)\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)^2}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^4}du^2$$

és

$$ds=\frac{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2}du.$$

Rajzoljunk továbbá egy kört egységnyi sugárral a koordinátarendszer kezdőpontja körül, és huzzunk ugyanebből a pontból párhuzamosakat a föntebbi érintőkkel. Ezek között a körnek egy da íveleme fekszik, és a görbületi mérték az u, v érintő érintési pontjában nem egyéb, mint $\frac{da}{ds}$.

A da körívelem egyik végpontjának a ξ, η koordinátáit úgy kapjuk meg, mint az u, v érintővel párhuzamos

$$u\xi+v\eta=0$$

egyenes metszéspontját a

$$\xi^2+\eta^2=1$$

körrel. Tehát

$$\xi=-\frac{v}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \eta=-\frac{u}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

A da másik végpontjának koordinátái: $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, a hol

$$d\xi=-\frac{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{du}-v(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)}{u^2+v^2}du$$

$$=-\frac{u\left(u\frac{dv}{du}-v\right)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}du$$

$$d\eta=-\frac{u^2+v^2-u(u^2+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)}{u^2+v^2}du$$

$$=-\frac{v\left(u\frac{dv}{du}-v\right)}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}du$$

tehát

$$da^2=d\xi^2+d\eta^2=\frac{(u^2+v^2)\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2du^2}{(u^2+v^2)^3}$$

$$=\frac{u\frac{dv}{du}-v}{u^2+v^2}du$$

és így

$$\frac{da}{ds}=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}.$$

Hatodik megoldás Lóky Béla kegyesrendi tanár úrtól Sátoralja-Ujhely.

Az $y=y(x)$ görbe (x, y) pontjához tartozó érintőjének egyenlete

$$\eta-y=y'(x)(\xi-x)$$

avagy PLÜCKER-féle alakra hozva

$$-\frac{y'(x)}{xy'(x)-y}\xi+\frac{1}{xy'(x)-y}\eta+1=0.$$

Az érintő vonalkoordinátái tehát

$$u=-\frac{y'(x)}{xy'(x)-y},\qquad v=\frac{1}{xy'(x)-y}.$$

Ezek szabják meg a görbe $F(u, v)=0$ egyenletét.

A görbületi mérték az (x, y) pontban tudvalevőleg

$$G=\frac{y''(x)}{[1+y'(x)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Meghatározandók y' és y''. Először is u és v felírt kifejezéseinek osztása adja

$$y'=-\frac{u}{v}.$$

Ha x szerint differenciálunk, ered

$$y''=-\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

De

$$\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{xy'-y}\right]=-\frac{(xy'-y)y''-y'(xy''+y'-y')}{(xy'-y)^2}$$

$$=\frac{yy''}{(xy'-y)^2}=v^2\cdot yy''$$

tehát

$$y''=\frac{uv'-v}{v^2}\cdot v^2yy'',$$

azaz

$$1=(uv'-v)y.$$

Ezt x szerint differenciálva, ered

$$0=y'(uv'-v)+yuv''\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{u}{v}(uv'-v)+yuv''v^2yy''$$

$$=\frac{u}{v}(uv'-v)+\frac{uv''v^2}{(uv'-v)^2}y'',$$

a hounan *

$$y'' = \frac{(uv' - v)^3}{v^3 v''}$$

$$G = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2v}{du^2}}.$$

Minthogy pedig $F(u, v) = 0$ egyenlet esetében

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{du} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{du^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2} = 0$$

azért

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\partial F}{\partial u} : \frac{\partial F}{\partial v}$$

és

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right\}.$$

Következésképp

$$G = -\frac{\left(u\frac{dv}{du} - v\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2v}{du^2}}$$

$$= -\frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{\left(u\frac{\partial F}{\partial u} + v\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(m-1)^2\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)^3}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}} H_{urw}(F)};$$

ha m az F osztályszáma és H az F-nek u, v, w-re nézve formált Hesse-féle determinánsa, hol a differenciálás elvégzése után $w = 1$ teendő. (Erre nézve l. Baltzer Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. kiadás, 166. lapját).

*

Hetedik megoldás dr. Sulák József kegyesrendi tanár úrtól Budapesten.

Ha a görbe valamely pontjában oszkuláló kör czentrumának koordinátáit a, b-vel jelöljük, akkor annak egyenlete vonalkoordinátákban:

$$(au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0. \qquad 1)$$

Differenciáljuk ezt az egyenletet totalisan kétszer egymásután, ez által a

$$P = \frac{u + v\frac{dv}{du}}{u\frac{dv}{du} - v} \qquad 2)$$

jelölés alkalmazásával a következő két egyenlethez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} -av \quad + bu &= P \\ -a\frac{dv}{du} + b &= \frac{dP}{du} \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

Ezeknek az egyenleteknek, minthogy a kör simuló kör, eleget tesznek még

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{du^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{d^2F}{\partial u \partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{d^2F}{\partial v^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^3} \qquad 4)$$

differenciálhányadosok is.

A 3) alatti egyenletből könnyen eljuthatunk a következőkhöz:

$$\left.\begin{aligned} \left(u\frac{dv}{du} - v\right)b &= \frac{dv}{du}P - v\frac{uP}{du} \\ \left(u\frac{dv}{du} - v\right)a &= P - u\frac{dP}{du} \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

innen pedig

$$\left(u\frac{dv}{du} - v\right)(au + bv + 1) = \left(v\frac{dv}{du} + u\right)P - (u^2 + v^2)\frac{dP}{du} + u\frac{dv}{du} + v. \qquad 6)$$

Ha l-nek és

$$\frac{dP}{du}=\frac{\left[1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2+v\frac{d^2v}{du^2}\right]\left(u\frac{dv}{du}-v\right)-u\frac{d^2v}{du^2}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2} \qquad 7)$$

értékét a 6) alatti levő egyenletbe behelyettesítjük s aztán a nyert egyenletet megszorozzuk $\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^2$-tel, a következő eredményre jutunk:

$$\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3(au+bv+1)$$

$$=\left\{\left(u+v\frac{dv}{du}\right)^2-(u^2+v^2)\left[1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2+v\frac{d^2v}{du^2}\right]+\left(d\frac{dv}{du}-v\right)^2\right\}\left(u\frac{dv}{du}-v\right)$$

$$+(u^2+v^2)\,u\frac{d^2v}{du^2}\left(u+v\frac{dv}{du}\right)$$

$$=-(u^2+v^2)v\left(u\frac{dv}{du}-v\right)\frac{d^2v}{du^2}+(u^2+v^2)\,u\left(u+v\frac{dv}{du}\right)\frac{d^2v}{du^2}$$

$$=(u^2+v^2)^2\frac{d^2v}{du^2}.$$

Innen

$$au+bv+1=\frac{(u^2+v^2)^2}{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}\frac{d^2v}{du^2};$$

az 1) egyenletből pedig:

$$(au+bv+1)^2=r^2(u^2+v^2),$$

tehát

$$\frac{1}{r}=\frac{\left(u\frac{dv}{du}-v\right)^3}{(u^2+v^2)^2\frac{d^2v}{du^2}},$$

melybe, ha $\frac{dv}{du}$ és $\frac{d^2v}{du^2}$ értékeit a 4) alatt lévő egyenletekből behelyettesítjük, a kivánt eredményhez jutunk.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Január hó 10-én. Dr. BEKE MANÓ: A casus irreducibilis a harmadfokú egyenletnél.

FUCHS KÁROLY: Megjegyzések a felületi feszültségre vonatkozó elterjedtebb kísérletekre.

Január 24-én. Dr. KÜRSCHÁK JÓZSEF: Maximum-minimum problémák elemi tárgyalása.

GRUBER NÁNDOR: A benzin-szaturátor mint a vetítő-készülék fényforrása.

Február hó 7-én. HORNISCHEK HENRIK: A kinematikai geometria egyik alaptételéről.

Dr. FRÖHLICH IZIDOR: «Miért esik mindig talpára a macska?»

Február hó 21-én. RADOS IGNÁCZ: Az ívhosszak méréséről.

Dr. KÖVESLIGETHY RADÓ: Az efemeridák számításáról.

*

«Miért esik mindig talpára a macska?»

MARCEL DEPREZ ismert elektrikus hosszasan gondolkodott DELAUNAY könyvének** ama megjegyzéséről, mely szerint a szabadon elejtett és teljesen magára hagyott élő organizmus semmiféle körülmények között nem-

---

* *Comptes Rendus:* 1894 second semestre (1894 X/19 Séance.) — MAREY: Mécanique animale: Des mouvements que certaines animaux exécutent pour retomber sur leur pieds, lorsqu'ils sont précipités d'un lieu élevé. pp. 714—717. GUYON: Note relative à la communication de M. MAREY. pp. 717—718. — MAURICE LÉVY: Observations sur le principe des aires — pp. 718—721. *Comptes Rendus:* 1894 second semestre Nr. 19 (XI/5 Séance). PAUL APPEL: Sur le théorême des aires pp. 770—771. NATURE: 22 november 94 pg. 80—81. — Photographs of a tumbing cat.

** DELAUNAY: Mécanique rationelle. Negyedik kiadás 229 §. 412 lap 1866.

csak hogy súlypontjának mozgását nem képes megváltoztatni, hanem semmiféle forgó mozgást sem képes végezni. A M. Deprez idézte paragrafus Delaunay könyvében tényleg megvan, szóról-szóra tartalmazza ama sorokat, a melyeket Deprez idéz, de egyéb következtetések is vannak benne. Nemcsak azt mondja, hogy az élő organizmus a súlypont megtartása elvének felel meg, azaz hogy a súlypont mozgása nem változhatik, akármilyen mozgásokat végezzenek is testének egyes részei; de azt is mondja, hogy ennek a mozgásnak olyannak kell lenni, mely eleget tegyen a területek elvének, vagyis kell, hogy a pontok által leírt területek s a megfelelő pontok tömegének szorzataiból alakított összeg állandó tartozik lenni, ha kívülről származó hatások nem működnek, s hogy e szerint egy nyugvó állapotban elejtett szerves lény önerejénél fogva forgásokat nem végezhet.

M. Deprez elgondolkodván ezen a paragrafuson, feltűnt neki, hogy a benne foglalt állítás egyenes ellentmondásban áll azzal a közmondással, mely szerint «a macska mindig a talpára esik». Ez a közmondás, mint minden más közmondás, nem akar más lenni, mint sűrített igazság, melyben a népnek hosszú időkre kiterjedő tapasztalata kifejezésre jut. — Ő a közönséges természettudományi eljárást akarta alkalmazni annak kiderítésére, vajjon tényleg úgy van-e a dolog, a mint a közmondás mondja? Macskán, kutyán, tengeri nyúlon próbálta meg és azt tapasztalta: Bárminként ejti vagy dobja is el, minden esetben a talpára áll ez a három állat. A közmondás igazat mondott; tehát ellentétben áll vele az idézett paragrafus, és így jogosan merültek fel kételyek, hogy Delaunay értelmezése elfogadható-e vagy sem?

Hogy a területek elve kétségtelenül helyes, az tán további fejtegetésre nem szorul. De az értelmezése mégis nehezebb volt, mint látszik.

Delaunay után még számos mechanikai könyv és értekezés írója ugyanezen tévedésbe esett; azt gondolták, hogy egy magára hagyott test, ha külső erő nem hat reája, nem képes esés közben forgást végezni. — Már pedig, ha a macskát hátával lefelé eleresztjük, csak úgy eshetik a talpára, ha esés közben megfordul. Ő tehát a kísérletet úgy rendezte be, hogy az organizmust egész nyugodtan bocsátotta el, minden kezdetbeli mozgás nélkül; tehát a macska semmi kezdetbeli sebességgel nem birt, sem translatorius, sem rotatorius sebességgel és azt tapasztalta, hogy másfél méter magasságról ejtve le, csakugyan mindig a talpára állott. A mint mi is tapasztalhatjuk.

Önként következik, hogy ilyen jelenségek vizsgálatánál a tapasztalati kipuhatolás első sorban érdekelte M. Deprez-t, ki a kérdést felvetette. Abban a véleményben volt, hogy pillanatnyi fotografiák alapján ezen mozgásnak ismeretére jobban fog jutni, biztosabban, helyesebben, mintha tovább szövi az elméletet, s ez okból Marey, a nagyhirű franczia fiziologushoz fordult,

ki megalkotója és feje annak az intézetnek, melynek feladata az élő organizmusok mozgására vonatkozó vizsgálatok megejtése. MAREY tényleg lefotografálta a macskát 1·5 méterről való esésének 20 phasisában s a képeket a franczia akadémiának 1894. évi okt. 29-én tartott ülésén, nagy érdeklődés közben bemutatta. A képek a *Comptes Rendus*-ban megjelentek, honnét aztán átmentek számos illusztrált lapba. Ezek a pillanatnyi képek tényleg sokkal értékesebbek a mozgás tanulmányozásánál, mint maga a kísérlet, mert hiszen az esés ideje alig 0·6 másodpercz, a mely idő alatt a mozgásnak számos fazisát megvizsgálni teljes lehetetlen. A képeknek két sorozata jelent meg. Az egyik vonatkozik arra az esetre, a mikor az állatot oldalról, a második sorozatban pedig az állatot hosszirányában nézzük. Az állat olyan helyzetben van elbocsátva, hogy a háta lefelé és lábai felfelé legyenek fordítva. A képek jól mutatják, hogyan végez az állat hossztengelye körül egy fordulatot. Ha tekintetbe veszszük, hogy az esés idő nem sokkal több egy fél másodperczcnél, akkor a képekből arra is következtethetünk, hogy az állat végtagjainak igen heves mozgásban kell lenniök.

M. DEPREZ már most úgy vetette fel a kérdést, hogy valamely élő organizmus, mely magára van hagyatva, de a melynek egyes részei heves mozgásban lehetnek, végezhet-e forgást egy tengely körül csakis a saját, úgynevezett belső erők behatása alatt? Mindenekelőtt ki kellett mondania, hogy a DELAUNAY-féle következtetés nem helyes, mert hisz a tapasztalattal ellentétben van.

Mert igaz, hogy belső erők merülnek fel és ezekre áll az, hogy a hatás és visszahatás elvének teljesen megfelelnek, hogy általában véve a translatorius erők összege 0 és az erők forgató nyomatékainak összege szintén 0. Ha tehát a dolog így állana és így értelmeztetnék, akkor a forgás tényleg nem volna lehetséges.

Csakhamar kiderült, hol rejtőzik a tévedés DELAUNAY értelmezésében. Ez a tétel, így kimondva, merev testre alkalmazva, igenis érvényes. Merev test súlypontja csakugyan nem változtathatja mozgását s ha eredetileg nyugalomban van, forgás nem fog bekövetkezni.

De másként áll ez az organizmus vagy oly test esetében, melynek egyes részei egymáshoz képest relativ mozgást végezhetnek. Igaz, hogy belső erők vannak, a melyek az actio és reactio elvnek felelnek meg, de nincs kizárva, hogy daczára ennek, az egész test ilyen forgást végezhessen.

Én az előbb érintett tételnek közönséges alakját kívánom felírni és erre egy észrevételt tenni. Ha adva van egy m tömegű pont, a melyhez tartozó r vezető sugár mozgás közben (a mozgás akármilyen lehet) df területet ír le: akkor az előbb érintett tétel azt mondja, hogy a területsebesség állandó, vagyis hogy a terület, melyet a vezető sugár leír, arányos az idővel, tehát

$$\Sigma\left\{ m\, r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right\} = constans$$

a hol az összegezés az egész testre kiterjed. Ezen összeg tehát abban az esetben, ha külső erők nem működnek, állandó. Ha úgy bocsátunk el valamely rendszert, hogy az elbocsátás pillanatában nyugalomban van, akkor semmiféle forgás nem fog történni és így az előbbeni kifejezés minden egyes tagja egyenlő zérussal, tehát ez esetben az előbb felírt összeg is egyenlő zérussal, vagy a mi ugyanaz:

$$\Sigma m \frac{df}{dt} = 0$$

Ebből az is következtethető, hogy ha egy bizonyos időpillanatban ezen egyenlet áll és külső erők nem működnek és akkor a területeknek is mindig állandóknak kell lenniök: akkor merev rendszerre a tétel úgy értelmezendő, hogy a merev rendszer mozdulatlanul esik le.

Azonban artikulált rendszerben, a melynek egyes részei egymáshoz képest mozgásokat végezhetnek, mint például az organizmus tagjai, nincs kizárva, hogy ezen összeg egyes tagjai közül némelyek positiv és némelyek negativ értékűek lesznek és azért összegük még mindig egyenlő lehet zérussal. Delaunay is úgy mondta és úgy következtette, hogy ha a test végtagjai mozgásban vannak, akkor, ha az egyik végtag az egyik irányban forog, akkor a másik végtagnak az ellentett irányban kell forognia. Deprez általánosította a kérdést a következő formulázásban:

«Lehetséges-e, hogy egy anyagi rendszer, a mely eleinte nyugalomban van és magára van hagyatva, a melynek egyes részei cziklusszerű mozgásokat végezhetnek, de úgy, hogy az eredeti helyzetbe, az eredeti configuratióba térnek vissza; lehetséges-e, hogy ilyen esetben az egész testhelyzet változást szenvedjen és tengelykörüli forgást végezzen?»

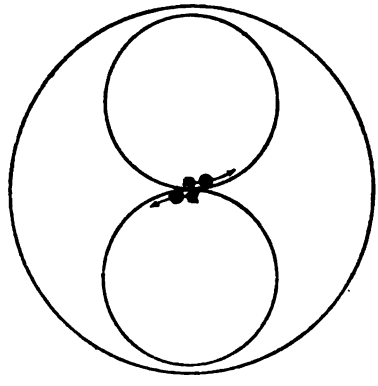
Deprez arra az eredményre jutott, hogy igen is lehetséges. Egy készüléket is készített,* a mely az ő következtetéseinek helyességét bebizonyítja, t. i. azt, hogy ha a rendszer teljes nyugalomban van és ha csak belső erők behatása alatt történnek mozgások és az egyes részek eredeti helyzetbe térnek vissza: akkor az egész rendszer forgást szenvedhet. A készülék lényegét a mellékelt ábra mutatja. Áll egy homogén körlapból, melybe két köralakú csatorna van kivésve. Ezen csatornákban két golyó gurulhat.

A lapot a középpontjában fonalra függesztve a golyók közé egy rugó van

---

* *Comptes rendus* 1894 XI/5 Séance, Second semestre. Marcel Deprez: Sur un appareil servant à mettre en evidence certaines conséquences du théorème des aires. pg. 767—769.

közbe fogva olyan módon, hogy össze legyen nyomva és a golyók egyenlő távolságban legyenek a középponttól, miáltal a súlypont a középpontban marad. A rugó összenyomása olyan módon van megcsinálva, hogy a mikor a lapot tartó fonalat elégetik, a rugó kényszere: az is megszünjék: az esés megkezdésének pillanatában tehát mindkét golyó egyenlő nagy, de ellenkező irányú lökést kap a felszabadult rugótól, úgy hogy a köralakú csatornákban egyenlő sebességgel fognak mozogni, miáltal az egész rendszer súlypontja ismét nem fog változást szenvedni, de a golyók sebességéből származó centrifugalis erő esés közben a körlapot függőleges tengely körül megforgatja.



A részletekbe azonban jelenleg bele menni nem akarok, valamint azt is épen csak említem, hogy némelyek a levegő ellenállásának és azon körülménynek is tulajdonítanak lényeges befolyást a szóban forgó jelenségre, hogy az állat, mely a fent érintett elbocsátás előtt szokatlan s reá nézve mindenesetre kellemetlen helyzetben van, fészkelődik s magát a tartó kezektől eltaszítani törekszik s így valószínüleg mégis bizonyos, habár csekély mérvü kezdeti forgás sebességgel bír.

Ha t. tagtársaim figyelmét ezen jelentéktelennek tetszö tárgyra irányítottam, föleg azért tettem, hogy példát mutassak, mekkora óvatosságra van szükség még az egészen biztosnak látszó alapból való következtetéseknél. S talán arra is adtam alkalmat felszólalásommal, hogy a tagtársak egyike vagy másika emez érdekes témára még visszatérjen. *F. J.*

TÁRSULATI ÜGYEK.

Határozat a M. P. T. harmadik rendes közgyűlése tárgyában. A választmány 1894 okt. 19-én megtartott rendes ülésén az ügyvivő titkár a szombathelyi tagtársaknak következő levelét mutatta be:

Tekintetes Választmány!

A tekintetes Választmánynak 1893. évi május hó 26-án tartott ülésén fölmerült a kérdés, valjon a közgyűlés helye állandóan Budapest legyen-e, vagy pedig fölváltva a fővárosban és vidéken tartassék meg?

A társulat Elnöke beszédében az utóbbit tartja kívánatosnak, még pedig oly czélzattal, hogy nagyobb városokban inkább a tudományos munka, kisebb helyeken pedig a tudományos törekvéseket hathatósan előmozdító társas szellem ápolása adná meg a közgyülés színezetét.

Nagyméltóságú Elnökünk ezen kijelentése bátorít fel bennünket, midőn a tek. Választmányhoz azon tiszteletteljes kéréssel járulunk, hogy az első vidéki közgyülés éveül az 1895-iki társulati évet, helyéül pedig Szombathely városát választani kegyeskedjék.

Engedje meg a tek. Választmány, hogy kérelmünk és meghívásunk támogatására felhozzuk a következőket:

1. Szombathely 7 irányú vasúti közlekedése folytán a Dunántúl egyik középpontja és — a budapesti tanintézeteket nem számítva, — 24 tanintézetre nézve 5—6 órán belül elérhető. Ezek tanárai közül mintegy ötvenen tagjai társulatunknak. Budapesttől való távolsága sem nagyobb.

2. Ujonnan épített főgymnasiumunk a közgyűlés czéljaira alkalmas helyiségekkel rendelkezik.

3. Tanulságos kirándulásul kinálkozik a 4 kilometer távolságban levő herényi astro-physikai intézet megtekintése.

4. Egy-egy félnapi kellemes és tanulságos kirándulásra adhat alkalmat a jaáki templom megtekintése, vagy Kőszeg városa.

5. Végül, a Math. és Phys. Társulatnak megjelenése Vasvármegye székhelyén hatalmasan előmozdítaná, hogy e határszéli megye és város lakosságának kulturális dolgok iránt meglevő helyes érzéke erősbödjék.

Tiszteletteljes kérelmünket és meghívásunkat megujítván, maradunk szíves üdvözlettel

Szombathelyen, 1894. évi október 8-án

a társulat hű tagjai:

Dr. Kunc Adolf, *Módly Kriszó*,
Gothard Jenő, *Dr. Edelmann Sebő*.

*

A választmány a szombathelyi tagtársak ezen szíves meghívását köszönettel és örömmel elfogadja és egyhangulag azt határozza, hogy *a Mathematikai és Physikai Társulat 1895. évi rendes közgyülését Szombathelyen fogja megtartani.*

ADALÉK A PRIMITÍV GYÖKÖK ELMÉLETÉHEZ.

I. Tétel. *Minden* $p=2^m+1$ $(m>0)$ *alakú törzsszámnak a*

$$3 \quad \text{és} \quad \frac{p+1}{3}$$

számok primitív gyökei.

Bebizonyítás. E tétel bebizonyítását több elemi tétel kimutatására vezettem vissza.

1. $p=2^m+1$ *csak akkor lehet törzsszám, ha* m *páros.* Ha m páratlan, akkor a

$$2\equiv -1 \pmod 3 \qquad (1)$$

kongruenciából tüstént következik, hogy

$$2^m\equiv(-1)^m=-1 \pmod 3,$$

tehát $p=2^m+1$ 3-mal osztható és így nem törzsszám. Ha tehát p törzsszám, akkor — miként be volt bizonyítandó — m páros.

2. *A* $p=2^m+1$ *törzsszám a* $12k+5$ *alakra hozható.* Ugyanis a

$$p=2^m+1=4(2^{m-2}-1)+5$$

egyenlőségben szereplő

$$2^{m-2}-1$$

kifejezés mindig 3-mal osztható egész szám. Egész szám azért, mert m páros lévén, $m-2$ negativ nem lehet; 3-mal pedig azért osztható, mert az 1) alatti azonos kongruenciából következik, hogy

$$2^{m-2}\equiv(-1)^{m-2}\equiv 1 \pmod 3,$$

mivel $m-2$ páros szám. Tehát

$$2^{m-2}-1=3k$$

és igy

$$p=12k+5.$$

3. 3 *a p-nek quadratikus nem-maradéka.* A 3 maradékjellegének meghatározása végett számítsuk ki a $\left(\frac{3}{p}\right)$ LEGENDRE-féle jelet. Ha e kiszámítás közben a quadratikus maradékok elméletéből ismeretes reciproczitási tételt többször alkalmazzuk, a következőt nyerjük:

$$\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{3}{12k+5}\right)=\left(\frac{12k+5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1,$$

úgy hogy tehát 3 valóban p-nek quadratikus nem-maradéka.

4. *A $p=2^m+1$ törzsszámnak minden quadratikus nem-maradéka egyszersmind primitiv gyöke is.* A p-nek quadratikus maradéka nem lehet egyszersmind p-nek primitiv gyöke; mert minden quadratikus maradék az

$$x^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenciát elégítvén ki, a $(p-1)$-nél kisebb kitevőhöz tartozik. Primitiv gyök tehát csakis a quadratikus nem-maradékok sorában található. E nem-maradékok száma,

$$\frac{p-1}{2}=2^{m-1},$$

és a primitiv gyökök száma

$$\varphi(p-1)=2^{m-1}$$

egyenlő, tehát valóban minden quadratikus nem-maradék egyszersmind p-nek primitiv gyöke.

5. A megelőzők alapján most már kimutathatjuk a bevezetésben felállított tétel helyességét.

Hogy 3 p-nek primitiv gyöke az onnan következik, hogy miként 3-ban kimutattuk, p-nek quadratikus nem-maradéka és minden quadratikus nem-maradék egyszersmind p-nek primitiv gyöke (4.)

Hogy pedig $\frac{p+1}{3}$ is primitív gyöke p-nek, az a következőképen látható be. 3 primitív gyök, ennek következtében

$$3^{p-1} \equiv 3^{2^m} \equiv 1 \pmod{p};$$

de ez így is írható

$$3^{2^m} \equiv p+1 \pmod{p};$$

$p+1$ azonban osztható 3-mal, mert

$$p+1 = 12k+6 = 3(4k+2),$$

úgy hogy az utolsó kongruenczia mindkét oldalán 3-mal oszthatunk. Ha ezt megteszszük lesz

$$\frac{p+1}{3} \equiv 3^{2^m-1} \pmod{p},$$

de minthogy 3 primitív gyök és 2^m-1 a $p-1=2^m$-hez képest relatív törzsszám, azért innen már következik, hogy $\frac{p+1}{3}$ a p-nek primitív gyöke.

II. Tétel. *Ha $p=8n+1$ és n törzsszámok továbbá $n>5$, akkor*

$$3 \quad \text{és} \quad \frac{p+1}{3}$$

a p-nek primitív gyökei.

Bebizonyítás. 1. *A $p=8n+1$ törzsszám az n-re vonatkozó feltétel teljesülése mellett a*

$$p = 12k+5$$

alakra hozható. Az n törzsszám (mod. 3) a következő értékeket veheti fel:

$$0,\ 1,\ 2.$$

Ha azonban p törzsszám, akkor n (mod. 3) sem 0 sem 1 nem lehet. Az $n \equiv 0$ (mod. 3) eset lehetőségét kizárja az a körülmény, hogy n törzsszám. Az $n \equiv 1$ (mod. 3) kongruenczia pedig azért van kizárva, mert különben kellene, hogy p 3-mal osztható legyen, mert ekkor

$$p=8n+1=8(n-1)+9$$

kifejezésben

$$n-1\equiv 0 \pmod 3;$$

ha tehát p törzsszám, akkor az $n\equiv 1 \pmod 3$ kongruenczia fennállása ki van zárva.

Még csak egy lehetőség marad fenn, a melynek most már be is kell következnie, t. i. az hogy

$$n\equiv 2 \pmod 3,$$

de akkor

$$p=8n+1=8(3l+2)+1=24l+17$$
$$=12k+5,$$

a hol k és l egész számokat jelentenek. De ezzel a tétel ki van mutatva.

2. *3 a p-nek quadratikus nemmaradéka.* Ugyanis a reciproczitási tétel alapján

$$\left(\frac{3}{p}\right)=\left(\frac{3}{12k+5}\right)=\left(\frac{12k+5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1.$$

3. Az a kitevő, a melyhez 3 (mod. p) tartozik, minden esetre

$$p-1=8n$$

pozitiv osztója. De minthogy n törzsszám, $(p-1)$-nek összes osztói:

$$1, 2, 4, 8, n, 2n, 4n, 8n.$$

De mivel 3 a p-nek quadratikus nem-maradéka, az

$$1, 2, 4, n, 2n$$

kitévők ki vannak zárva mert

$$3^{\frac{p-1}{2}}\equiv 3^{4n}\equiv -1 \pmod p.$$

3 a 8 kitevőhöz sem tartozhat, mert

$$3^8-1\equiv(3^4-1)(3^4+1)\equiv$$
$$\equiv 80\,.\,82\equiv 2^5\,.\,5\,.\,41 \pmod p$$

és a $p=4n+1$ törzsszámban $n>5$ lévén,

$$2^8 . 5 . 41$$

és így a vele kongruens 3^8-1 sem osztható p-vel.

Minthogy 3 a 8 kitevőhöz sem tartozik, kell tehát, hogy a $p-1=8n$ kitevőhöz tartozzék, de ekkor primitiv gyöke is a p-nek.

4. $\frac{p+1}{3}$ *a p-nek primitív gyöke.* Minthogy 3 a p primitiv gyöke

$$3^{p-1} \equiv 3^{8n} \equiv 1 \pmod{p};$$

de ez így is írható

$$3^{8n} \equiv p+1 \pmod{p};$$

$p+1$ — a mint a

$$p+1=(12k+5)+1=3(4k+2)$$

egyenlőségből látható — 3-mal osztható, tehát az utolsó kongruenczia mindkét oldalát 3-mal oszthatjuk, a nélkül, hogy a moduluson változtatnunk kellene, mert ez 3-hoz képest relatív törzsszám. Ha ezt megteszszük, kapjuk, hogy

$$\frac{p+1}{3} \equiv 3^{8n-1} \pmod{p}$$

és minthogy 3 p-nek primitiv gyöke $8n-$ pedig a $p-1=8n$-hez képest relatív törzsszám, ezzel ki van mutatva, hogy $\frac{p+1}{3}$ is p-nek primitiv gyöke.

Klimkó Mihály.

A BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK NEHÁNY ELEMI TULAJDONSÁGA.

1. A binomiális együtthatóknak néhány igen egyszerű tulajdonságára akarom felhívni a figyelmet, a mely eddig — tudtommal legalább — nem volt ismeretes. Általánosan ismert képlet az, a mely megadja két szám összegének binomiális együtthatóját kifejezve az egyes összeadandók binomiális együtthatóiban. Közelfekvő gondolat az, hogy ily képletet állítsunk fel azokra az esetekre is, midőn nem két, hanem három négy, . . . , m összeadandóból áll az összeg.

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható tudvalevőleg az n elemből képezhető k-ad osztályú kombinációk számát adja meg. Bontsuk fel az n elemet m számú $n_1, n_2, \ldots, n_m$ elemű csoportra, úgy hogy tehát

$$n_1+n_2+\ldots+n_m=n$$

legyen. Most az összes kombinációkat csoportokba osztjuk a szerint, hogy hány elemet tartalmaznak az $n_1, n_2, \ldots, n_m$ elemű csoportokból. Egy ily csoport például az, a melynél magából az n_1 elemből van k elem, és a többiből egy sincs, úgy hogy ez a csoport

$$\binom{n_1}{k}=\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{0}\cdots\binom{n_m}{0}$$

kombinációból áll. Ha az n_1 elemből van $k-1$, az n_2-ből 1 elem, és a többiből egy sincsen, akkor az ilyen kombinációk száma:

$$\binom{n_1}{k-1}\binom{n_2}{1}=\binom{n_1}{k-1}\binom{n_2}{1}\binom{n_3}{0}\cdots\binom{n_m}{0}$$

Egy harmadik csoportja a kombinációknak lehet olyan, hogy n_1 elemből $k-3$, n_2 elemből 2, n_3-ból 1, és a többiből 0 elem van, ez a csoport

$$\binom{n_1}{k-3}\binom{n_2}{2}\binom{n_3}{1}\binom{n_4}{0}\cdots\binom{n_m}{0}$$

kombinációt tartalmaz. Ezekből a példákból már látható, hogy egy csoport általános alakjában az n_1 elemű csoportból i_1, az n_2 eleműből i_2, ... és végre az n_m elemű csoportból i_m elem fordul elő, úgy hogy

$$i_1 \leqq n_1,\ i_2 \leqq n_2,\ \ldots,\ i_m \leqq n_m$$

és

$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

Ez a csoport természetesen

$$\binom{n_1}{i_1}\binom{n_2}{i_2}\cdots\binom{n_m}{i_m}$$

kombinációból fog állani. Ha ily módon képezzük az összes különböző csoportokat, és az ezekben foglalt kombinációkat összeadjuk, akkor megkapjuk az n elemből képezhető összes k-adosztályú kombinációk számát, úgy hogy lesz:

$$\binom{n_1+n_2+\cdots+n_m}{k}=\sum\binom{n_1}{i_1}\binom{n_2}{i_2}\cdots\binom{n_m}{i_m}$$

a hol az összegezés az $i_1, i_2, \ldots, i_m$ indexek amaz értékeire kiterjesztendő, a melyek az

$$i_1 \leqq n_1,\ i_2 \leqq n_2,\ \ldots,\ i_m \leqq n_m$$
$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

relációknak felelnek meg.

Ha most felveszszük, hogy

$$n_1=n_2=\cdots=n_m=a,$$

akkor a következő képletet nyerjük:

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m} \qquad (1)$$

a hol

$$i_1 \leqq a, \quad i_2 \leqq a, \ldots, i_m \leqq a$$
$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

Minthogy a szorzatban a tényezők egészen egyenlő ranguak, felírhatjuk még azt is, hogy

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(j)}\binom{m}{j_1}\binom{m}{j_2}\cdots\binom{m}{j_a}$$

a hol

$$j_1 \leqq m, \; j_2 \leqq m, \ldots, j_a=m$$
$$j_1+j_2+\cdots+j_a=k.$$

Ha ezt az (1) egyenlettel egybevetjük, akkor a következő azonosságot nyerjük:

$$\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m}=\sum_{(j)}\binom{m}{j_1}\binom{m}{j_2}\cdots\binom{m}{j_m} \qquad (2)$$

a hol

$$i_1+i_2+\cdots+i_m=j_1+j_2+\cdots+j_a=k \leqq ma$$

Vizsgáljuk most közelebbről a nyert képletünket; azt találtuk, hogy:

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m},$$

hol

$$i_1 \leqq a, \quad i_2 \leqq a, \ldots, i_m \leqq a$$
$$i_1+i_2+\cdots+i_m=k.$$

Minthogy az i indexeknek bárminő permutálása meg van engedve, azért közvetlenül világos az, hogy a $\sum_{(i)}\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_m}$ összegben ugyanaz a tag többször is elő fog fordulni; érdekes alakot nyerünk, ha megteszszük a lehetséges összevonásokat. Talált képletünk azt az utasítást adja, hogy a k számot fel kell bontanunk minden lehető módon és sorrendben annyi számnak az összegére, a hány egység foglaltatik az m-ben; ezen összeadandók általában nem mind különböző számok, hanem lesznek köztük egyenlők is; tegyük fel, hogy egy ilyen felbontásnál az m számú i

között az összes különbözők legyenek $j_1, j_2, \ldots, j_l$, továbbá j_1 forduljon elő ρ_1-szer, j_2 ρ_2-szer, ... és végre j_l ρ_l-szer, ekkor az $\binom{a}{j_1}^{\rho_1}\binom{a}{j_2}^{\rho_2}\ldots\binom{a}{j_l}^{\rho_l}$ tag könnyen beláthatólag $\frac{m!}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_l!}$-szer fog előfordulni, minthogy m számú elem közül, a melyek között $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_l$ van egyenlő, ugyanennyi különböző permutáczió képezhető. Ha ily módon összefoglaljuk az összes egyenlő tagokat, akkor végre azt kapjuk, hogy:

$$\binom{ma}{k}=\sum_{(j)}\frac{m!}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_l!}\binom{a}{j_1}^{\rho_1}\binom{a}{j_1}^{\rho_2}\ldots\binom{a}{j_l}^{\rho_l} \qquad (3)$$

a hol a következő feltételi egyenletek állanak fenn:

$$j_1 \leqq a,\quad j_2 \leqq a, \ldots j_l \leqq a$$
$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_l=m$$
$$\rho_1 j_1+\rho_2 j_2+\ldots+\rho_l j_l=k$$

és a hol a j indexek permutálása többé már nincs megengedve.

Példaképen alkalmazzuk most a (3) alatti képletet egy numerikus esetre. Fejtsük ki $\binom{5a}{6}$ binomiális együtthatót. A fentiekben vázolt eljárás kivitele után azt kapjuk, hogy

$$\binom{5a}{6}=\frac{5!}{4!}\binom{a}{6}+\frac{5!}{3!}\binom{a}{5}\binom{a}{1}+\frac{5!}{3!}\binom{a}{4}\binom{a}{2}+$$
$$+\frac{5!}{2!\,2!}\binom{a}{4}\binom{a}{1}^2+\frac{5!}{2!\,3!}\binom{a}{3}^2+\frac{5!}{2!}\binom{a}{3}\binom{a}{2}\binom{a}{1}+$$
$$+\frac{5!}{3!}\binom{a}{3}\binom{a}{1}^3+\frac{5!}{3!\,2!}\binom{a}{2}^3+\frac{5!}{2!\,2!}\binom{a}{2}^2\binom{a}{1}^2+\frac{5!}{4!}\binom{a}{2}\binom{a}{1}^4$$

2. Vizsgálataimnak másik része az $\binom{ma}{a}$ alakú binomiális együtthatók oszthatósági viszonyaira vonatkozik. Ezen a téren a következő két eredményre jutottam:

$\binom{ma}{a}$ *mindig osztható* m*-el, és* $(m-1)\,a+1$*-el.*

A bebizonyítások rendkívül egyszerűek, csupa azonos átalakításon alapszanak.

$$\binom{ma}{a} = \frac{ma\,(ma-1)\ldots[(m-1)\,a+1}{a!} =$$

$$= m\,\frac{(ma-1)\ldots[m-1)\,a+1]}{(a-1)!} = m\binom{ma-1}{a-1} \qquad (4)$$

A második oszthatósági tétel bebizonyítása meg a következő:

$$\binom{ma}{a} = \frac{ma\,(ma-1)\ldots[(m-1)\,a+1]}{a!}$$

$$\frac{\binom{ma}{a}}{(m-1)\,a+1} = \frac{ma\,(ma-1)\ldots[(m-1)\,a+2]}{a!} =$$

$$= \frac{(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!} = \frac{[(m-1)\,a+1](ma)! - (m-1)\,a\,(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!}$$

De minthogy:

$$\frac{[(m-1)\,a+1](ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!} = \frac{(ma)!}{[(m-1)\,a]!\;a!} = \binom{ma}{a}$$

$$\frac{(m-1)\,a\,(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\;a!} = (m-1)\,\frac{(ma)!}{[(m-1)\,a+1]!\,(a-1)!} =$$

$$= (m-1)\binom{ma}{a-1}$$

azért végre lesz:

$$\frac{\binom{ma}{a}}{(m-1)\,a+1} = \binom{ma}{a} - (m-1)\binom{ma}{a-1} \qquad (5)$$

Abban a speciális esetben, midőn $m=2$, azt kapjuk, hogy $\binom{2a}{a}$ mindig osztható 2-vel és $(a+1)$-el.

Ifj. Szily Kálmán.

AZ INVARIÁNSOK ELMÉLETÉNEK ALAPTÉTELÉRŐL.

(Második közlemény.)

II.

3. *Jelentse*

$$F_1, F_2, F_3, \ldots, F_s, \ldots$$

az

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

változók bizonyos adott homogén egész függvényeinek határtalan sorozatát, akkor mindig található oly m pozitiv egész szám, hogy bármely F_s ily alakban állítható elő

$$F_s = A_{1s}F_1 + A_{2s}F_2 + \cdots + A_{hs}F_h + \cdots + A_{ms}F_m,$$

hol az A_{hs}-k a független változóknak alkalmasan választott homogén egész függvényei.

Magától értetődik, hogy itt (és minden hasonló szerkezetű aggregatumban) minden egyes A_{hs} együttható (ha csak nem zérus) fokszámát úgy választjuk, hogy az $A_{hs}F_h$ szorzat foka megegyezzék F_s fokával. Ha ugyanis más szorzatok is fordulnának elő, ezek az összevonásnál egymást kölcsönösen megsemmisítenék, tehát kezdettől fogva zérusokkal pótolhatók.

A tétel abban a határesetben is bir értelemmel, midőn $n=0$, vagyis mikor az F_s-ek puszta számértékek s ekkor közvetetlenül belátható. Valóban, ha az F_s-ek közt van egy a zérustól különböző F_m, akkor minden F_s ily alakban állítható elő:

$$F_s = A_{1s}F_1 + A_{2s}F_2 + \cdots + A_{ms}F_m,$$

hol

$$A_{1s} = A_{2s} = \cdots = A_{m-1s} = 0$$

és A_{ms} az F_s-nek F_m-mel való hányadosa. Ha ellenben minden F_s zérus, akkor

$$F_s = F_1$$

tehát

$$m=1, \qquad A_{1s}=1.$$

Minden más esetre a tétel *teljes indukczióval* terjeszthető ki, vagyis ki fogjuk mutatni, hogy ha a tétel $(n-1)$ változós függvényekre helyes, akkor n változó esetében sem veszti el érvényességét.

Ennek igazolásánál jelentse f_s az F_s-nek x_n-től ment részét.

Ha az

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_s, \ldots$$

sorozat csupa zérusból áll, akkor legyen

$$F_s^{(1)} = F_s$$

Ellenkező esetben jelöljük az első f_s-t, mely nem zérus, f_α-val; a reá következő f_s-k közül legyen f_β az első, a mely nem állitható elő mint f_α-nak és az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

valamely alkalmasan választott homogén egész függvényének szorzata; továbbá f_γ legyen az első f_s, mely nem állitható elő mint f_α és f_β *lineáris kombinácziója*, azaz nem hozható az

$$a_{\alpha s} f_\alpha + a_{\beta s} f_s$$

alakra, hol

$$a_{\alpha s}, \quad a_{\beta s}$$

az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

alkalmasan választott homogén egész függvényei; f_δ legyen az első f_s, mely nem állitható elő mint f_α, f_β és f_γ lineáris kombinácziója; stb.

Ha tételünk $(n-1)$ változó esetére igaz, akkor az

$$f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, f_\delta, \ldots$$

sorozat előbb utóbb egy bizonyos f_1-val véget ér s bármely f_s mint

$$f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$$

lineáris kombinációja állítható elő.

Képletben

$$f_\varepsilon = l_\varepsilon(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda) \equiv a_{\alpha\varepsilon} f_\alpha + a_{\beta\varepsilon} f_\beta + \cdots + a_{\lambda\varepsilon} f_\lambda,$$

hol

$$a_{\alpha\varepsilon}, a_{\beta\varepsilon}, \ldots, a_{\lambda\varepsilon}$$

az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

alkalmasan választott homogén egész függvényei. Ha most már

$$\begin{aligned} F_\varepsilon^{(1)} &= F_\varepsilon - l_\varepsilon(F_\alpha, F_\beta, \ldots, F_\lambda) \\ &= F_\varepsilon - (a_{\alpha\varepsilon} F_\alpha + a_{\beta\varepsilon} F_\beta + \cdots + a_{\lambda\varepsilon} F_\lambda), \end{aligned}$$

akkor e különbség az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

oly homogén egész függvénye, mely F_ε-sel egyenlő fokú, de ennél annyiban egyszerűbb szerkezetű, hogy x_n-től ment tagokat nem tartalmaz.

Az

$$F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \ldots, F_\varepsilon^{(1)}, \ldots$$

sorozatról, most már oly

$$F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, F_3^{(2)}, \ldots, F_\varepsilon^{(2)}, \ldots$$

homogén függvényekre térünk át, a melyekben már x_n első hatványa sem fordul elő.

Ha már maguk az összes $F_\varepsilon^{(1)}$-ek ilyenek volnának, akkor legyen

$$F_\varepsilon^{(2)} = F_\varepsilon^{(1)}.$$

Ha azonban az $F_\varepsilon^{(1)}$-ek maguk még nem ilyenek, akkor jelöljük $x_n f_\varepsilon^{(1)}$-gyel $F_\varepsilon^{(1)}$-nek azt a részét, mely x_n-et épen az első hatványon tartalmazza, s vizsgáljuk meg az

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_\varepsilon^{(1)}, \ldots$$

sorozatot.

Lehetséges, hogy ennek minden egyes eleme az

$$f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda$$

lineár kombinációja, azaz bármely $f_s^{(1)}$ ily alakban állítható elő:

$$f_s^{(1)} = l_s^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda) \equiv a_{\alpha s}^{(1)} f_\alpha + a_{\beta s}^{(1)} f_\beta + \cdots + a_{\lambda s}^{(1)} f_\lambda,$$

akkor legyen

$$F_x^{(2)} = F_s^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda).$$

Az ellenkező esetben — midőn csak a tétel $(n-1)$ változó esetében helyes — lehet az $f_x^{(1)}$-ek közül egy oly véges

$$f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \quad f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \quad f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}, \quad f_{\delta^{(1)}}^{(1)}, \quad \ldots, \quad f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

sorozatot kiválasztani, hogy $f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$ nem állítható elő mint

$$f_\alpha, \ f_\beta, \ \ldots, \ f_\lambda$$

lineár kombinációja, $f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$ nem állítható elő mint

$$f_\alpha, \ f_\beta, \ \ldots, \ f_\lambda, \ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációja, $f_{\gamma^{(1)}}^{(1)}$ nem állítható elő mint

$$f_\alpha, \ f_\beta, \ \ldots, \ f_\lambda, \ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \ f_{\beta^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációja, s i. t., de az

$$f_\alpha, \ f_\beta, \ \ldots, \ f_\lambda, \ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \ f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ \ldots, \ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

függvényekből bármelyik $f_s^{(1)}$ az

$$f_x^{(1)} = l_x^{(1)}(f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, f_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)})$$

alakban nyerhető, hol $l_x^{(1)}$ a benne felsorolt elemeknek oly homogén lineár kapcsolata, melyben az együtthatók

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots, \ x_n$$

alkalmasan választott homogén egész függvényei. Ebben az esetben legyen

$$F_x^{(2)} = F_x^{(1)} - l_s^{(1)}(x_n F_\alpha, x_n F_\beta, \ldots, x_n F_\lambda, F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, F_{\beta^{(1)}}^{(1)}, \ldots, F_{\lambda^{(1)}}^{(1)}).$$

Mind a három esetben $F_x^{(1)}$ és $F_x^{(2)}$ egyenlő fokúak.

Egészen hasonlóan térünk most már át oly

$$F_1^{(3)},\ F_2^{(3)},\ F_3^{(3)},\ \ldots,\ F_s^{(3)},\ \ldots$$

függvényekre, a melyekben az x_n-nek négyzetét tartalmazó rész is hiányzik s csak x_n magasabb hatványai fordulnak elő.

Ha már maguk az $F_s^{(2)}$-k ilyenek, akkor legyen

$$F_s^{(3)}=F_s^{(2)}.$$

Ha azonban az $F_s^{(2)}$-k maguk még nem ilyenek, akkor jelöljük $x_n^2 f_s^{(2)}$-vel $F_s^{(2)}$-nek azt a részét, a mely x_n-t épen a második hatványon tartalmazza s vizsgáljuk meg az

$$f_1^{(2)},\ f_2^{(2)},\ f_3^{(2)},\ \ldots,\ f_s^{(2)},\ \ldots$$

sorozatot.

Abban az egyszerűbb esetben, midőn e sorozat minden egyes eleme az

$$f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációja, azaz

$$f_s^{(2)}=l_s^{(2)}(f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}),$$

legyen

$$F_s^{(3)}=F_s^{(2)}-l_s^{(1)}(x_n^2F_\alpha,\ x_n^2F_\beta,\ \ldots,\ x_n^2F_\lambda,\ x_nF_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ x_nF_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ldots,x_nF_{\lambda^{(1)}}^{(1)}).$$

Abban az általánosabb esetben, mikor a $f_s^{(2)}$-k nem állíthatók elő mint

$$f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\beta^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}$$

lineár kombinációi, — feltéve, hogy a tétel $(n-1)$ változó esetében helyes — lehet az $f_s^{(2)}$-k közül egy oly véges

$$f_{\alpha^{(2)}}^{(2)},\ f_{\beta^{(2)}}^{(2)},\ f_{\gamma^{(2)}}^{(2)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$$

sorozatot kiválasztani, hogy az

$$f_\alpha,\ f_\beta,\ \ldots,\ f_\lambda,\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ f_{\alpha^{(1)}}^{(1)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(1)}}^{(1)},\ f_{\alpha^{(2)}}^{(2)},\ f_{\beta^{(2)}}^{(2)},\ \ldots,\ f_{\lambda^{(2)}}^{(2)}$$

sorozat egyik eleme sem fejezhető ki mint az őt megelőzőknek

lineár kombinációja, ellenben valamennyi $f_s^{(2)}$ ily alakban állítható elő

$$f_s^{(2)} = l_s^{(2)}(f_\alpha, \ldots, f_\lambda, f_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \ldots, f_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, f_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, \ldots, f_{\lambda^{(2)}}^{(2)})$$

hol $l_s^{(2)}$ a benne előforduló függvényeknek oly homogén lineár kapcsolata, melyben az együtthatók

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

homogén egész függvényei.

Ekkor legyen

$$F_s^{(3)} = F_s^{(2)} - l_s^{(2)}(x_n^2 F_\alpha, \ldots, x_n^2 F_\lambda, x_n F_{\alpha^{(1)}}^{(1)}, \ldots, x_n F_{\lambda^{(1)}}^{(1)}, F_{\alpha^{(2)}}^{(2)}, \ldots, F_{\alpha^{(2)}}^{(2)}).$$

Mind a három esetben $F_s^{(2)}$ és $F_s^{(3)}$ egyenlő fokúak.

Ez az eljárás határtalanul folytatható, azaz bármely egész számot jelentse is r, a leírt módon r lépés után az F_s-ekből oly $F_s^{(r)}$-eket képezhetünk, melyekben x_n-nek már csak r-dik és magasabb hatványai fordulnak elő.

Minden egyes lépésnél ugyanazok az esetek különböztetendők meg, mint a kezdő lépéseknél, ámde — a mi különösen figyelemre méltó — *a legáltalánosabb eset nem ismétlődhetik határtalanúl.* Legyenek ugyanis a π-dik, a τ-dik stb. lépések azok, melyeknél a legáltalánosabb eset következik be. Ha ezeknek szorzata határtalan volna, akkor az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

homogén egész függvényeinek oly

$$f_{\alpha^{(\pi)}}^{(\pi)}, f_{\beta^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, f_{\lambda^{(\pi)}}^{(\pi)}, f_{\alpha^{(\tau)}}^{(\tau)}, f_{\beta^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, f_{\lambda^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots$$

határtalan sorozatát nyernők, melyben egy függvény sem fejezhető ki mint a megelőzőknek lineáris kombinációja. Ily sorozat azonban — ha a tétel $(n-1)$ változó esetében érvényes — nem lehetséges, tehát egy bizonyos w-dik lépés után a legáltalánosabb eset többé nem következhetik be.

Most már bármely F_s mint

$$\begin{aligned} &F_{\alpha^{(\pi)}}^{(\pi)}, F_{\beta^{(\pi)}}^{(\pi)}, \ldots, F_{\lambda^{(\pi)}}^{(\pi)}, \\ &F_{\alpha^{(\tau)}}^{(\tau)}, F_{\beta^{(\tau)}}^{(\tau)}, \ldots, F_{\lambda^{(\tau)}}^{(\tau)}, \\ &\ldots, \\ &F_{\alpha^{(w)}}^{(w)}, F_{\beta^{(w)}}^{(w)}, \ldots, F_{\lambda^{(w)}}^{(w)} \end{aligned} \qquad 7)$$

lineáris kombinációja állítható elő.

Jelentse ennek igazolásánál r az F_s-nek fokát. Az előbb leírt eljárás értelmében

$$\begin{aligned} F_s^{(r+1)} &= F_s^{(r)} - l_s^{(r)}, \\ F_s^{(r)} &= F_s^{(r-1)} - l_s^{(r-1)}, \\ &\ldots \\ F_s^{(1)} &= F_s - l_s, \end{aligned} \qquad 8)$$

hol az l-ek a (7) alatti függvényeknek x_n bizonyos hatványaival való szorzataiknak lineáris kombinációi, tehát maguknak a 7) alatti függvényeknek is lineáris kombinációi, a mennyiben x_n illető hatványai az együtthatókhoz csatolhatók.

Az $F_s^{(r+1)}$ függvény keletkezésének módjánál fogva osztható x_n^{r+1}-gyel, noha csak r-ed fokú.

Ez csak úgy lehetséges, hogy

$$F_s^{(r+1)} \equiv 0.$$

De akkor a (8) alatti egyenletek értelmében

$$F_s^{(r)}, \quad F_s^{(r-1)}, \quad \ldots, \quad F_s^{(1)},$$

rendre mindannyian a 7) alatti függvényeknek lineáris kombinációi s végre maguk a F_s-ek is azok.

A 7) alatti függvények viszont a

$$\begin{aligned} &F_{\alpha^{(\pi)}}, F_{\beta^{(\pi)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\pi)}}, \\ &F_{\alpha^{(\tau)}}, F_{\beta^{(\tau)}}, \ldots, F_{\lambda^{(\tau)}}, \\ &\ldots, \\ &F_{\alpha^{(w)}}, F_{\beta^{(w)}}, \ldots, F_{\lambda^{(w)}} \end{aligned} \qquad 9)$$

függvényekből lineáris kombinálás révén keletkeztek, ennélfogva *bármely F_s a 9) alatti függvények lineáris kombinációja.*

Ha tehát a szóban forgó tétel $(n-1)$ változó esetében helyes, akkor n változós függvényekre is érvényes. Még pedig

$$m=\lambda^{(w)}.$$

Amde a legegyszerűbb esetben, midőn a változók száma zérus, a tétel közvetlenül be volt látható, tehát rendre 1, 2, 3 s akárhány változó esetében is helyes.

Jegyzet. A bebizonyított tétel nem veszti el érvényességét, ha benne *homogén egész függvény* helyett mindenütt (tehát az A együtthatókra vonatkozólag is) a következő kitételek valamelyikét teszszük:

1) *egész számú együtthatókkal biró homogén egész függvény,*

2) *egész függvény,*

3) *egész számú együtthatókkal biró egész függvény.*

A mi az 1) módosítást illeti, úgy az csak az $n=0$ esetben szorul *új* bebizonyításra, az $(n-1)$-ről n-re való következtetés lépésről lépésre ismételhető.

A mi pedig a *homogén* jelző elhagyását illeti, úgy az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

bármely F_s *egész* függvénye mint egy $\bar{F}_s$ $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *homogén egész* függvénynek az $x=1$ helyettesítésnél kiadódó értéke fogható fel.

Ha most már az

$$\bar{F}_1, \quad \bar{F}_2, \quad \bar{F}_3, \quad \ldots$$

sorozathoz megkeressük a bebizonyított tételnek vagy az 1) módosításnak megfelelő

$$\bar{F}_1, \quad \bar{F}_2, \quad \ldots, \quad \bar{F}_m$$

függvényeket s itt x helyéhe az egységet helyettesítjük, akkor belőlük megkapjuk a 2) illetve 3) módosításnak megfelelő

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_m$$

függvényeket.

Az 1) módosítás az $n=0$ esetben most már következőleg igazolhato.

Az adott

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots, \quad c_s, \quad \ldots$$

egész számok sorozatában legyen c_μ az első zérustól különböző szám; a reá következők közül $c_{\mu'}$ legyen az első, mely vele nem osztható; ez a $c_{\mu'}$ a következő alakra hozható

$$c_{\mu'}=q'c_{\mu}+r_{\mu'}$$

hol q' egész szám és $r_{\mu'}$ a c_{μ} felénél abszolut értékre nézve nem nagyobb egész szám; a $c_{\mu'}$ után következő számok közül legyen $c_{\mu''}$ az első, mely nem osztható $r_{\mu'}$-vel, hanem

$$c_{\mu''}=q''r_{\mu'}+r_{\mu''}$$

alakú, hol q' egész szám, továbbá $r_{\mu''}$ a $r_{\mu'}$ felénél abszolut értékre nézve nem nagyobb pozitiv vagy negativ egész szám; a sorozat további számai közül $c_{\mu'''}$ legyen az első, mely $r_{\mu''}$-vel nem osztható, hanem

$$c_{\mu'''}=q'''r_{\mu''}+r_{\mu'''}$$

alakú; stb.

Az így nyert

$$r_{\mu'},\ r_{\mu''},\ r_{\mu'''},\ \ldots$$

sorozat tagjai abszolut értékre nézve folyvást kisebbek és kisebbek, továbbá mindannyian a zérustól különböző egész számok. Ez csak úgy lehetséges, hogy e sorozat előbb utóbb egy oly $r_{\mu}^{(u)}$-val ér véget, mely a $c_{\mu}^{(u)}$ után következő valamennyi c_{ϱ}-ben maradék nélkül foglaltatik.

Az

$$\begin{aligned}
r_{\mu'} &= c_{\mu'} - q' c_{\mu} \\
r_{\mu''} &= c_{\mu''} - q'' r_{\mu'} \\
r_{\mu'''} &= c_{\mu'''} - q''' r_{\mu''} \\
&\ldots \\
r_{\mu}^{(u)} &= c_{\mu}^{(u)} - q^{(u)} r_{\mu}^{(u-1)}
\end{aligned}$$

egyenletekből

$$r_{\mu}^{(u)}=c_{\mu}^{(u)}-q^{(u)}c_{\mu}^{(u-1)}+q^{(u)}q^{(u-1)}c_{\mu}^{(u-2)}+\ldots+(-1)^{u+1}q^{(u)}q^{(u-1)}\ldots q^{1}c_{\mu},$$

vagyis $r_{\mu}^{(u)}$ s vele a $c_{\mu}^{(u)}$ után következő c_{ϱ}-ek

$$c_{\mu},\ c_{\mu'},\ \ldots,\ c_{\mu}^{(u)}$$

bizonyos egész többeseinek aggregatumai.

A tétel 1) módosítása e szerint az $n=0$ esetében, azaz egész számokból álló sorozatokra vonatkozólag, valóban érvényes. Még pedig

$$m=\mu^{(u)}.$$

4. *Ha adva van az*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$$

változók bizonyos homogén egész függvényeinek valamely végtelen sokasága, akkor abban mindig található oly véges számú

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_m$$

függvény, melyekből a sokaság bármely más függvénye az

$$F=A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3+\cdots+A_kF_k+\cdots+A_mF_m$$

alakban fejezhető ki, hol az A_k együtthatók a független változóknak alkalmasan választott homogén egész függvényei.

A vizsgálandó sokaságot akként képzeljük megadva, hogy valamely törvény segitségével bármely függvényről eldönthető valjon a sokasághoz tartozik-e vagy sem. Ha a törvény olyan, hogy a sokaságba tartozó függvénynek *sorozatba* rendezhetők, akkor a tétel az imént bebizonyitottal azonos. Ha azonban a vizsgálandó sokaságban foglalt függvények nem rendezhetők sorozatba, a tétel még csak bebizonyitandó.

Tegyük tehát fel, hogy egy bizonyos sokaságból nem lehet oly véges számú függvényt kiválasztani, melyeknek a többiek lineáris kombinációi. Ekkor válaszszuk ki a sokaságból annak tetszőleges F_1 függvényét; továbbá legyen F_2 a sokaság egy oly függvénye, mely nem állitható elő az A_1F_1 alakban, hol A_1 az $x_1x_2\ldots x_n$ valamely homogén egész függvénye; F_3 legyen a sokaság egy oly függvénye, mely nem állitható elő az

$$A_1F_1+A_2F_2$$

alakban; F_4 legyen a sokaság egy oly függvénye, mely nem állitható elő az

$$A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3$$

alakban; s i. t. Feltevésünk értelmében az

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots$$

sorozat határtalanul folytatható, noha egyetlen egy függvénye sem fejezhető ki mint az őt megelőzőknek lineáris kombinációja. De ez ellenkezik a 3) alatti tétellel. Tett feltevésünk tehát nincs megengedve, hanem a kimondott tétel minden sokaságra érvényes.

Az előbbi jegyzetben említett módosítások e tételnél is meg vannak engedve.

III.

5. Az invariáns-elméletben az adott

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots,\ f^{(j)},\ \ldots,\ f^{(k)}$$

alakrendszer együtthatói határozatlanoknak tekintetnek s az invariánsok e határozatlanoknak bizonyos homogén egész függvényei. A 4) alatti tétel értelmében tehát a rendszer invariánsai közt kell oly véges számú

$$i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h,\ \ldots,\ i_m$$

invariánsnak léteznie, melyekből a többiek

$$i=A_1i_1+A_2i_2+\cdots+A_hi_h+\cdots+A_mi_m$$

alakban fejezhetők ki, hol az A_h-k az alakrendszer együtthatóinak homogén egész függvényei.

Sőt az A_h-k oly B_h-kal pótolhatók, melyek épúgy mint az invariánsok, az alakrendszer minden egyes alakjának együtthatóiban külön-külön homogének.

Ugyanis legyenek

$$i,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h,\ \ldots,\ i_m$$

pusztán mint $f^{(j)}$ együtthatóinak függvényei rendre

$$r,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_h,\ \ldots,\ r_m$$

fokúak. Akkor bármelyik A_h az

$$A_h=a_h+\beta_h+\gamma_h$$

alakban írható, hol a_h az $f^{(j)}$ együtthatóiban $r-r_h$ fokú tagok összege, β_h az ugyanazon mennyiségekben magasabb mint $r-r_h$ fokú tagoknak összege, γ_h pedig az alacsonyabb fokú tagok összege. Ily módon

$$\begin{aligned} i=&a_1i_1+a_2i_2+\cdots+a_mi_m+\\ &+\beta_1i_1+\beta_2i_2+\cdots+\beta_mi_m+\\ &+\gamma_1i_1+\gamma_2i_2+\cdots+\gamma_mi_m. \end{aligned}$$

Az első sor tagjai $f^{(j)}$ együtthatóinak r-ed fokú homogén függ-

vényei, ellenben a második és harmadik sor tagjai e mennyiségekben mindannyian magasabb illetve alacsonyabb fokúak. Ennélfogva

$$i=a_1 i_1+a_2 i_2+\cdots+a_m i_m,$$

s a második meg harmadik sor külön-külön eltünik.

Az A_h-kat ily módon sikerült oly a_h-kkal pótolni, melyek $f^{(j)}$ együtthatóiban a kivánt szerkezetüek.

Ha a leirt átalakitást először $f^{(1)}$ együtthatóira vonatkozólag, azután a nyert kifejezésben $f^{(2)}$ együtthatóira vonatkozólag, s i. t. rendre elvégezzük, utoljára oly

$$i=B_1 i_1+B_2 i_2+\cdots+B_h i_h+\cdots+B_m i_m \qquad 10)$$

előállításhoz jutunk, melyben a B_h-k minden egyes $f^{(j)}$ együtthatóiban külön-külön homogének.

De átalakitásunkban még tovább is haladhatunk s a B_h-kat invariánsokkal pótolhatjuk a nélkül, hogy a képlet helyessége megszünnék.

Ugyanis helyettesitsük (10) alatt az adott

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots,\ f^{(h)}$$

rendszer együtthatóit az

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinánsú helyettesítéssel transzformált

$$f_a^{(1)},\ f_a^{(2)},\ \ldots,\ f_a^{(h)}$$

rendszer együtthatóival. Az eredeti rendszer i_h invariánsai helyébe akkor

$$a^{p_h} i_h$$

alakú szorzatok lépnek, hol p_h az i_h-nak úgynevezett *indexe*.

A 10) atti képlet tehát a következőbe megy át

$$a^{p_1} i=a^{p_1} B_1(f_a)\, i_1+a^{p_2} B_2(f_a)\, i_2+\cdots+a^{p_m} B_m(f_a)\, i_m,$$

hol

$$B_1(f_a),\ B_2(f_a),\ \ldots,\ B_m(f_a)$$

azokat a kifejezéseket jelentik, melyekbe

$$B_1, B_2, \ldots, B_m$$

a mondott helyettesítésnél átmennek.

Erre a képletre p-szer alkalmazván az I) alatt vizsgált Ω_a mű[2] veletet, leszen

$$\Omega_a^p\{a^p\}.i=\Omega_a^p\{a^{p_1}B_1(f_a)\}.i_1+\Omega_a^p\{a^{p_1}B_2(f_a)\}.i_2+\cdots+$$
$$+\Omega_a^p\{a^{p_m}B_m(f_a)\}.i_m$$

s ha még a zérustól különböző

$$N_p=\Omega_a^p\{a^p\}$$

számmal osztunk, akkor

$$i=I_1i_1+I_2i_2+\cdots+I_hi_h+\cdots+I_mi_m \qquad 11)$$

hol

$$I_p=\frac{1}{N_p}\Omega_a^p\{a^{p_h}B_h(f_a)\}$$

az 1) alatti tétel értelmében invariáns.

A 11) alatti képlet a 10) alattihoz teljesen hasonló, csakhogy benne a B_h-k helyett az I_h invariánsok szerepelnek együtthatókként úgy, mint az czélunk volt.

Az I_h invariánsok mindegyike az i-hez hasonlóan mint

$$i_1, i_2, \ldots, i_m$$

oly lineáris kapcsolata fejezhető ki, melyben az együtthatók megint invariánsok, de alacsonyabb indexűek, mint I_h. Az eljárás ismétlésénél az együtthatók mindig alacsonyabb és alacsonyabb indexű invariánsok lesznek, míg végre 0 indexű invariánsokat kapunk együtthatóknak, azaz puszta számokat.

A nyert képleteket most visszafelé arra használhatjuk fel, hogy előbb rendre a fellépett együtthatókat, utoljára pedig magát i-t mint

$$i_1, i_2, \ldots, i_m$$

raczionális egész függvényét fejezzük ki.

Ezzel be van bizonyítva, hogy *bármely adott*

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(k)}$$

alakrendszer összes invariánsai mint bizonyos véges számú

$$i_1, i_2, \ldots, i_m$$

invariánsnak racionális egész függvényei fejezhetők ki.

Ha az

$$i_1, i_2, \ldots, i_m \qquad 12)$$

invariánsok úgy vannak meghatározva, hogy közülök egyik sem fejezhető ki mint a többinek raczionális egész függvénye, akkor ú. n. *alaprendszert* képeznek. Akár alaprendszer a 12) alatti sorozat, akár nem, mindig *teljes invariáns-rendszernek* neveztetik.

*

Az I) alatti Ω_a művelet már CLEBSCH, GORDAN és MERTENS alaktani vizsgálataiban is szerepel. A II. alatti vizsgálatok DEDEKIND, KRONECKER és WEBER H. arithmetikai vizsgálatai által voltak előkészítve. A két disciplina módszereinek egybekapcsolása vezetett a teljes invariáns-rendszerek létezésének évtizedek óta hiába keresett általános bebizonyítására.

Kürschák József.

IRODALOM.

Dr. Woldemar Voigt: Kompendium der theoretischen Physik. In zwei Bänden. Erster Band: Mechanik starrer und nichtstarrer Körper, Wärmelehre. Leipzig, Veit u. Comp. 1895. I—X. és 1—610. l. Ára 14 márka.

A könyv írója, a göttingai tud. egyetemen a physika egyik ismert nevű tanára az előszóból kitetszőleg azzal a rendeltetéssel írta meg a könyvét, hogy azok, akik az elmélet néhány különleges részével már megismerkedtek, az egész elméletet felölelő áttekintést szerezhessenek belőle. Az evégből szükséges rövidséget azáltal vélte czélszerűen elérhetőnek, hogy az elméletnek részletes, kivált pedig különlegesen mathematikai természetű alkalmazásait mellőzze s behatóbban csak az általános physikai jelentőségű problemákat tárgyalja.

Ez az első kötet három fő részre van osztva, a következő czímekkel: merev testek mechanikája, nem-merev testek mechanikája, hőtan. Az első rész négy fejezetből áll: I. Egy anyagi pont mozgása. II. Anyagi pontok rendszerének mozgása. III. Merev testek mozgása. IV. A potentiál-függvények. A második rész öt fejezetre oszlik: I. Nem-merev testek nyugvásának és mozgásának alap-egyenletei. II. Hydrostatika. III. Ideális folyadékok dynamikája. IV. Rugalmasság és akustika. V. Belső surlódás és rugalmas utóhatás. A harmadik rész két fejezetet foglal magában: az első a hőnek és mechanikai erélynek, a második a hőnek és chemiai erélynek egymásba alakulásáról szól. (I. Thermisch-mechanische Umsetzungen. II. Thermisch-chemische Umsetzungen.)

Mindegyik rész után irodalmi szemelvény van csatolva: könyv-jegyzék és a szöveg közé jegyzett idéző számok alatt a forrás-művek czímeinek sorozata szerzőik nevével, megjelenésük helyével és közzétételük évszámával. Az első részhez 118 idéző szám alatt, a másodikhoz 111 alatt, a harmadikhoz 75 alatt van, egy-egy idéző szám alatt helyenkint több közlemény teljes megjelölése is csatolva.

A mechanikával foglalkozó két rész kiterjeszkedik amaz analogiák némelyeire is, a melyeket physikai jelenségek némi mechanikai értelmezé-

sére eddigelé felállítani sikerült. Ilyen tárgyúak a következő czikkelyek: Az első részben: § 8. Konservative Wechselwirkungen allgemeiner Art. Das W. Weber'sche Grundgesetz. § 9. Der Satz vom Virial; kinetische Theorie der Gase und Lösungen. § 10. Weitere Ausbildung der kinetischen Theorie; die mittlere Weglänge der Moleküle. Innere Reibung, adiabatische Erwärmung, Effusion, Diffusion. § 11. Weitere Ausbildung der kinetischen Theorie; das Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten. § 12. Die Gleichungen von Hamilton und Lagrange. Cyklische Systeme. § 18. Cyklische Systeme, welche starre Körper enthalten. Maxwell's Theorie der Elektrodynamik. A második részben: § 8. Das Gleichgewicht der Elektricität in einem Leitersystem. § 12. Grundgleichungen für die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper. Strömung von Wärme oder Elektricität in einem Leitersystem und verwandte Erscheinungen. § 13. Die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper; allgemeine Sätze über den stationären Zustand. § 14. Die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper; allgemeine Sätze über den veränderlichen Zustand. Diffusion. § 32. Ebene Wellen in einem unendlich elastischen und absorbirenden Medium. § 33. Beziehungen zur Theorie des Lichtes. § 34. Medien ohne innere Kräfte; mechanische Analogie zu den Gleichungen des elektro-magnetischen Feldes. Ez az utolsó újabb keletű (Wied. Ann. 1894.) és magától a szerzőtől származik. A két mechanikai résznek mintegy ötöde van ezekben a tudomány költészetének szentelve. — A potentiál-függvényről szóló fejezet kiterjeszkedik a különböző elektromos és mágneses állapotokra is, ideértve az influált dielektromosságot és mágnességet, a pyro- és piezo-elektromosságot s az elektro-mágnességet is; továbbá a Mathieu-től második potentiál-függvénynek nevezett, functioval is foglalkozik. Nem tekintve, hogy a munka a különlegcs természetű tárgyalásoktól előre kitűzött elvszerűséggel tartózkodik, tárgy tekintetében. főkép ezek azok a területek, a melyekkel a két első rész más kisebb terjedelmű általános tartalmú mechanikai munkáktól különbözik, a mi a munka egészére nézve a tudomány anyagának újszerű rendszerbe foglalását és bizonyos újabb keletű részletek becsatolását jelenti.

Addig, míg a két mechanikai rész különböző physikai jelenségek tárgyalására is ki-kiterjeszkedik, addig a harmadik részből, a hőtanból, kimaradtak némely részletek, amelyek a thermo-dynamikai munkákban már-már szinte egészen otthonossá kezdtek válni, a milyen p. o. a mágneses inductionak s az elektromos áramlásnak thermo-dynamikai elmélete; talán a munka második kötetében fogunk velük találkozni. Ezek helyett azonban ott találjuk a rugalmas testek s a thermo-dynamikai hatások általános rendszerbe foglalt tárgyalását — § 6. Mechanische Wärmetheorie für elastische Körper.

§ 7. Thermische Dilatation. Adiabatische Deformation, — és a chemiai folyamatok beható általános jellegű thermo-dynamikai tárgyalását.

A mi a tárgyalások módjának közös jellem-vonását illeti, ez különösekben az általánosságok czélszerű fokozásában és az egyes részleteknek telhetőleg szoros egymáshoz rendelésében nyilvánul. Például a nem merev testek mechanikai egyenleteibe a test-partikulákra forgatólag ható szabad erőket is vezet be s később erre az általánosításra alapítja az elektromágnesi tér MAXWELL-HERTZ-féle egyenleteinek mechanikai analogonjait; a folyékony testek mechanikájában a nyomást nem kizárólag a sűrűség függvényeként jelöli meg, de tekintettel a hőfoknak esetleges térbeli variatiójára, a sűrűségen kívül is függni engedi a nyomást a coordinátáktól; a hőterjedés elméletét a rugalmas testekben nem megfordíthatóan végbemenő folyamatok általános elméletére alapítja stb. Itt megjegyzem, hogy annak is köszöni a könyv azt a rövidséget, a melyet az eléje tűzött és fent jelzett czél megkivánt, hogy a mathematikai megállapítások keresztülvitelében a lehetőségig kiaknázza azokat az összefüggéseket, a melyek a különböző részletek mathematikai tartalma közt jelentkeznek s eltekintve attól, hogy a rugalmasságnak egy kis molekuláris elméletét is előadja (a merev testek mechanikájában), minden disciplinának egyféleképen való tárgyalására szorítkozik, minélfogva módszer dolgában nem is compendium természetű a könyv és pedig annál kevésbbé, mert a szerző tudományos eredetisége nagy súlylyal érvényesül benne s nemcsak az ő irodalmi működésének specialis terén: a rugalmassági elméletekben, de egyebütt is, mint pl. a capilláris tünemények elméletében.

Ez az eredetiség azok közé tartozik, a melyek tárgyaik érdekességének, sőt belső értékének is az emelésére s tartalmuk fejlesztésére szolgálnak, jóllehet formális tévedésektől sem mentesek. Egy lapsusra, a mely ebben a munkában előfordul, más alkalommal már reá mutattam.*

Egy másik, amely szemembe ötlött, szabad felületű folyadékok mozgástanának a tárgyalásában (II. Th. III. Kap. § 15) esett meg; noha kisebb elentőségű, talán még sem lesz érdektelen, ha legalább a mibenlétére reá mutatok: a sebességi componenseknek a CLEBSCH-féle substitutiójából indul ki.**

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + H\frac{\partial G}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} + H\frac{\partial G}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z} + H\frac{\partial G}{\partial z}.$$

---

* Math. Phys. Lapok IV. k. 7. l.

** CLEBSCH-nél F, G, H helyén φ, ψ, m áll. Crelle-Journal 56. kötet.

De az F, G, H functiók egyenleteit a Clebsch-étól különböző módon vezeti le, haszonra fordítván az örvény-vonalaknak (Wirbellienien) már előbb letárgyalt elméletét. Látszólag arra a következtetésre jut, hogy G és H constantokkal egyenlítve, az örvényvonalak t időponti egyenleteit szolgáltatják, minélfogva aztán $\frac{dG}{dt}$ és $\frac{dH}{dt}$ eltünni tartoznak, mert a folyadékrészecskék az örvényvonalakkal mozognak. Ennek azonban nem okvetetlenül kell így lennie. Mellőzve e helyen az általános discussiót, csupán egy igen egyszerű példára utalok. Mikor $u=\varepsilon y$, $v=-\varepsilon x$, $w=0$, a hol ε constanst jelent, beválnak $F=0$, $G=\text{arc tg}\,\frac{x}{y}$, $H=\varepsilon(x^2+y^2)$, és igaz, hogy $\frac{dH}{dt}=0$; de $\frac{dG}{dt}$-ről nem igaz, hogy $=0$. G iménti kifejezése helyett használható $G=\text{arc tg}\,\frac{x}{y}-\varepsilon t$ is; erről már áll, hogy $\frac{dG}{dt}=0$. Megfelelnek továbbá $F=0$, $G=\frac{x}{y}$, $H=\varepsilon y^2$, de sem e G, sem e H teljes időderivatuma nem tünik el stb. Szerzőnk tehát látszólag többet bizonyít, mint a mennyit kellene: azt kell kimutatni, hogy a beváló G és H függvények közt van olyan, mikép teljes változási sebességük folyvást eltünik, nem pedig azt, hogy e változási sebességek mindegyikének analytikai szükségességgel el kell tünnie. A következtetés az örvényvonalak segítségülhívása nélkül is igen egyszerű analysis rendjén ejthető meg . . .

A szövegezés szabatossága majdnem azon a színvonalon van, mint Kirchhoff előadásaiban és nem tekintve bizonyos kifejezések szinte megegyezésszerű pontatlanságát (pl. az energia növekedése időegységben vagy még rövidebben az energia növekedése e helyett: az idő-egységre számított energia-növekedés, vagy az energia változási sebessége), főkép némely alap-fogalmak difinitiója kifogásolható; felületesek pl. a tömeg, erő, hőfok definitiói.

Igen becses kiegészítői a munkának az irodalmi útmutatások, ámbár nem mindig egészen alaposak. Pl. a folyékony testek mozgás-tanában a sebességi potential fogalmának bevezetésénél, a thermo-dynamikában a szabad energia fogalmának a bevezetésénél csupán Helmholtz-ra hivatkozik, holott e fogalmak mathematikai tartalma, az elsőé Lagrange-tól, a másodiké Massieu-től származik.

A munka megértéséhez aligha szükséges több készültség, mint Kirchhoff előadásainak a megértéséhez: a felhasznált mathematikai disciplinák alapjainak az ismerete; ezzel felszerelve mindenki jól eligazodhatik rajta, csak, ha még mathematikai physikával behatóbban nem foglalkozott, rendszeresen tanulmányozza, a mit megkivánnak azok a kapcsolatok, a melyek

a különböző fejezeteket egymáshoz rendelik. Akik már a tárgyhoz egyetemi cursusok rendjén hozzáférhettek, azok szerzett ismereteiknek esetleg más formákban való készletbentartására illetőleg, egy első fokon való kiegészítésére különösen jó sikerrel használhatják a könyvet, sőt némely benne foglalt általánosítások, módszertani és tárgybeli újszerűségek s a követett rendszer a képezett szakember érdeklődésére is számot tarthatnak.

F. Gy.

FELADATOK.

27. *Bizonyittassék be a következő tétel:*

Ha valamely kúpszelet körülírt háromszög A, B, C szögpontjainak projekcziói a kúpszelet tetszőleges D pontjából a kúpszeletre A_1, B_1, C_1 és a BC, CA, AB oldaloknak érintéspontjai A', B' C'; akkor

$$(A_1\, B_1\, C_1\, D) \overline{\wedge} (A'\, B'\, C'\, D).$$

(Klug.)

*

28. *Adott derékszögű parallelepipedonba adott nagyságú szabályos oktaéder irandó be, azaz úgy helyezendő el, hogy mindegyik szögpontja a parallelepipedon egy-egy síkjában feküdjék. Megvizsgálandó, hogy e próblemának mikor van megoldása és hogy a megoldások száma tekintetében minő esetőségek forogh atnak fenn.*

(Kürschák.)

*

29. *Az A, B, C, P, Q pontok megadatván, szerkesztessék három kupszelet úgy, hogy az első a B, C, P, Q-, a második a C, A, P, Q-, a harmadik az A, B, P, Q pontokon menjen át és egyszersmind kettenként érintsék egymást az A, B illetőleg C pontban.*

(Vályi.)

*

30. *Adva van valamely ellipszis és ennek egy tetszőleges hurja. Megszerkesztendők e hurt érintő körök közül azok, a melyek az ellipszist kettősen érintik.*

(Szily.)

MEGOLDOTT FELADATOK.

22. *Bizonyíttassék be a következő tétel. Ha az* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) *pontpárok valamely kúpszeletre konjugált párok, akkor az* $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$, $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ *pontpárok ugyane kúpszeletre nézve egy időben konjugált vagy nem konjugált párok.* (Ha $A \equiv C_1$, $B \equiv D_1$, $C \equiv A$, $D \equiv B_1$ akkor a két utolsó pár összeesik és Hesse egyik tétele alapján mindig konjugált lesz.) (Klug.)

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Jelöljük az A, B, C, D pontoknak az adott kúpszeletre vonatkoztatott polárisait rendre a, b, c, d-vel, és legyen rövidség kedveért:

$$\begin{aligned} (AB, CD) &\equiv E & (AD, BC) &\equiv F \\ (A_1D_1, B_1C_1) &\equiv E_1 & (A_1B_1, C_1D_1) &\equiv F_1 \\ (a, b) &\equiv X & (c, d) &\equiv Y \\ (a, d) &\equiv Z & (b, c) &\equiv U, \end{aligned}$$

akkor leszen

$$(X, Y) \equiv e, \quad (Z, U) \equiv f$$

az E, illetőleg F pontnak ugyane kúpszeletre vonatkoztatott polárisai.

Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok az $abcd$ négyoldal oldalain feküsznek és oly négyszöget alkotnak, a mely e négyoldalba be van írva.

Ha föltesszük, hogy az E és E_1 pontok konjugalt pólusok, vagyis, hogy E_1 az XY poláris egyik pontja, akkor ez az E_1 pont, mint az A_1D_1, B_1C_1 és XY egyenesek közös pontja, az A_1B_1X és D_1C_1Y háromszögek perspektiv czentrumának tekinthető, a $(Z, U) \equiv f$ egyenes pedig a megfelelő perspektiv tengelynek, a melyen — az F pont polárisán — az A_1B_1 és C_1D_1 megfelelő oldalpár F_1 metszéspontjának kell feküdnie, a miből nyilvánvaló, hogy az F és F_1 pontok ebben az esetben szintén konjugált pólusok.

Ha ellenben E és E_1 nem konjugált pólusok, és így az E_1 pont az e polárison kívül fekszik, az említett háromszögek nem perspektiv fekvésüek

és F_1 nem is fekhetik az f egyenesen, vagyis nem lehet F-nek konjugált pólusa, és ezzel annak a tételnek helyessége, hogy e pontok egyszerre konjugáltak vagy nem konjugáltak, ki van mutatva.

*

Második megoldás Kürschák műegyetemi magántanártól.

1. Legyen

$$a \equiv AB, \quad b \equiv CD, \quad c \equiv BC, \quad d \equiv DA,$$
$$a' \equiv C_1D_1, \quad b' \equiv A_1B_1, \quad c' \equiv D_1A_1, \quad d' \equiv B_1C_1,$$

akkor

$$A \equiv ad, \quad B \equiv ca, \quad C \equiv bc, \quad D \equiv bd,$$
$$A_1 \equiv b'c', \quad B_1 \equiv b'd', \quad C_1 \equiv a'd', \quad D_1 \equiv c'a',$$

a bebizonyítandó tétel pedig így fogalmazható:

Ha az

$$(ad, b'c'), \ (bc, a'd'), \ (bd, c'a'), \ (ca, b'd'), \ (cd, a'b'), \ (ab, c'd')$$

pontpárok közül négy valamely kúpszeletre nézve konjugált, akkor a többi kettő ugyanerre a kúpszeletre nézve egyszerre konjugált vagy nem konjugált.

2. E tétel analitikai levezetésénél a folyó homogen pontkoordinátákat

$$x_1, \ x_2, \ x_3$$

-mal jelöljük, a folyó homogen vonalkoordináták legyenek

$$u_1, \ u_2, \ u_3,$$

valamely adott i egyenes koordinátái pedig

$$i_1, \ i_2, \ i_3.$$

A három-három egyenes koordinátáiból alkotott

$$(ikl) \equiv \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}$$

alakú determinánsok közt a következő kapcsolat ismeretes

$$(klm)\,(inp) + (lim)\,(knp) + (ikm)\,(lnp) = (ikl)\,(mnp). \qquad (1)$$

Ha ugyanis

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

determináns első három oszlopát rendre

$$n_2 p_3 - n_3 p_2, \quad n_3 p_1 - n_1 p_3, \quad n_1 p_2 - n_2 p_1$$

-gyel megszorozva hozzáadjuk az utolsóhoz, akkor

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & (inp) \\ k_1 & k_2 & k_3 & (knp) \\ l_1 & l_2 & l_3 & (lnp) \\ m_1 & m_2 & m_3 & (mnp) \end{vmatrix} = 0$$

képletet nyerjük. Ebből a szóban forgó azonosság úgy adódik ki, hogy baloldalt az utolsó oszlop elemei szerint kifejtünk s az utolsó tagot átviszszük a jobboldalra.

3. Valamely adott *abcd* teljes négy oldal szögpontjainak egyenletei a bevezetett jelzés értelmében

$$(adu)=0, \ (bdu)=0, \ (cdu)=0, \ (bcu)=0, \ (cau)=0, \ (abu)=0.$$

Az egy egyenesen levő három szögpont egyenletei között lineár kapcsolat áll fenn abban az értelemben, hogy az egyenletek baloldalainak bizonyos *állandó* tényezőkkel való szorzatainak összege azonosan eltűnik.

E lineáris kapcsolatokat az (1) alatti azonosságból úgy kaphatjuk meg, ha

$$i, \ k, \ l, \ m, \ n, \ p$$

helyébe rendre a következőket helyettesítjük

$$\begin{array}{l} b, \ c, \ d, \ a, \ a, \ u; \\ c, \ a, \ d, \ b, \ b, \ u; \\ a, \ b, \ d, \ c, \ c, \ u; \\ a, \ b, \ c, \ d, \ d, \ u. \end{array}$$

Leszen

$$\begin{array}{l} (cad)(abu)-(abd)(cau)-(abc)(adu)=0 \\ (abd)(bcu)-(bcd)(abu)-(abc)(bdu)=0 \\ (bcd)(cau)-(cad)(bcu)-(abc)(cdu)=0 \\ (bcd)(adu)+(cad)(bdu)+(abd)(cdu)=0. \end{array} \qquad (2)$$

Egyébiránt az utolsó egyenlőség már az első háromnak következménye.

4. Ha két teljes négyoldal, *abcd* és *a'b'c'd'* van adva, akkor az

$(ad, b'c')$, $(bc, a'd')$, $(bd, c'a')$, $(ca, b'd')$, $(cd, a'b')$, $(ab, c'd')$

pontpárok egyenletei

$$\begin{array}{ll}(adu)(b'c'u)=0 & (bcu)(a'd'u)=0\\ (bdu)(c'a'u)=0 & (cau)(b'c'u)=0\\ (cdu)(a'b'u)=0 & (abu)(c'd'u)=0.\end{array} \tag{3}$$

E hat egyenlet közt lineár kapcsolat áll fenn az előbb megállapított értelemben.

Ha ugyanis a (2) alatti első három egyenletet rendre megszorozzuk

$$\begin{array}{l}(bcd)(c'a'd')(a'b'd')(b'c'u)\\ (cad)(a'b'd')(b'c'd')(c'a'u)\\ (abd)(b'c'd')(c'a'd')(a'b'u)\end{array}$$

-val és összeadunk, akkor:

$$\begin{aligned}&(bcd)(b'c'd')\{(abd)(c'a'd')(cau)(a'b'u)-(cad)(a'b'd')(abu)(c'a'u)\}+\\ &+(cad)(c'a'd')\{(bcd)(a'b'd')(abu)(b'c'u)-(abd)(b'c'd')(bcu)(a'b'u)\}+\\ &+(abd)(a'b'd')\{(cad)(b'c'd')(bcu)(c'a'u)-(bcd)(c'a'd')(cau)(b'c'u)\}-\\ &-(bcd)(abc)(c'a'd')(a'b'd')(adu)(b'c'u)-\\ &-(cad)(abc)(a'b'd')(b'c'd')(bdu)(c'a'u)-\\ &-(abd)(abc)(b'c'd')(c'a'd')(cdu)(a'b'u)=0.\end{aligned}$$

Egy hasonló második egyenlőséget nyerünk, ha $abcd$-t és $a'b'c'd'$-t egymással felcseréljük. A két egyenlőség összege már is a keresett lineár kapcsolatot adja meg, mely a következő:

$$\begin{aligned}&(bcd)(abc)(c'a'd')(a'b'd')(adu)(b'c'u)+\\ &+(cad)(abd)(b'c'd')(a'b'c')(bcu)(a'd'u)+\\ &+(cad)(abc)(a'b'd')(b'c'd')(bdu)(c'a'u)+\\ &+(abd)(bcd)(c'a'd')(a'b'c')(cau)(b'd'u)+\\ &+(abd)(abc)(b'c'd')(c'a'd')(cdu)(a'b'u)+\\ &+(bcd)(cad)(a'b'd')(a'b'c')(abu)(c'd'u)=0.\end{aligned} \tag{4}$$

5. Annak felteteli egyenlete, hogy egy pontpár valamely adott kúpszeletre nézve konjugált legyen, igen hasonlít magára e pontpár egyenletére. Hogy ugyanis a

$$p_1,\ p_2,\ p_3;\qquad p_1',\ p_2',\ p_3'$$

pontok az

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1+2a_{12}x_1x_2=0$$

kúpszeletre nézve konjugáltak legyenek, annak feltételi egyenlete

$$\{p, p'\} \equiv a_{11} p_1 p_1' + a_{12} p_2 p_2' + a_{33} p_3 p_3' + a_{23} (p_2 p_3' + p_3 p_2') + \\ + a_{31} (p_3 p_1' + p_1 p_3') + a_{12} (p_1 p_2' + p_2 p_1') = 0.$$

Magának a pontpárnak egyenlete pedig kifejtett alakban

$$p_1 p_1' u_1^2 + p_2 p_2' u_2^2 + p_3 p_3' u_3^2 + (p_2 p_3' + p_3 p_2') u_2 u_3 + \\ + (p_3 p_1' + p_1 p_3') u_3 u_1 + (p_1 p_2' + p_2 p_1') u_1 u_2 = 0.$$

A szóban forgó feltételi egyenlet tehát a pontpár egyenletének kifejtett alakjából egyszerűen úgy képezhető, hogy

$$u_1^2,\ u_2^2,\ u_3^2,\ u_2 u_3,\ u_3 u_1,\ u_1 u_2$$

helyébe rendre a kúpszelet egyenletének együtthatóit írjuk.

Ennélfogva, ha bizonyos

$$pp',\quad qq', \ldots$$

pontpárok egyenletei közt valamely lineár kapcsolat áll fenn, akkor e kapcsolat meglesz annak a feltételi egyenletek közt is, hogy e pontpárok valamely adott kúpszeletre nézve konjugáltak legyenek.

Ha e megfontolásokat az előbb vizsgált hat pontpárra alkalmazzuk, akkor az

$$\{ad, b'c'\} = 0,\quad \{bc, a'd'\} = 0,\quad \{bd, c'a'\} = 0,\quad \{ca, b'd'\} = 0, \\ \{cd, a'b'\} = 0,\quad \{ab, c'd'\} = 0$$

feltételi egyenletek közt a következő kapcsolatot találjuk:

$$\begin{aligned} &(bcd)\,(abc)\,(c'a'd')\,(a'b'd')\,\{ad, b'c'\} + \\ &+ (cad)\,(abd)\,(b'c'd')\,(a'b'c')\,\{bc, a'd'\} + \\ &+ (cad)\,(abc)\,(a'b'd')\,(b'c'd')\,\{bd, c'a'\} + \\ &+ (abd)\,(bcd)\,(c'a'd')\,(a'b'c')\,\{ca, b'd'\} + \\ &+ (abd)\,(abc)\,(b'c'd')\,(c'a'd')\,\{cd, a'b'\} + \\ &+ (bcd)\,(cad)\,(a'b'd')\,(a'b'c')\,\{ab, c'd'\} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

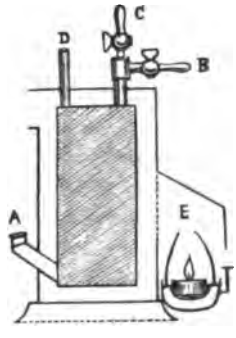
Ha tehát e feltételi egyenletek közül négy ki van elégítve, akkor a többi kettő egy időben lesz kielégítve vagy nem, mint az be volt bizonyítandó.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

A benzin-szaturátor. A vetitő készülék mindjobban terjedvén, egy oly mellékkészüléket kivánok megismertetni, mely a vetités hatásosságát tetemesen fokozza s egyúttal az előkészítést is megkönnyiti. A villamos áram még kevés helyen áll rendelkezésre s így legtöbb helyen a mészfény vagy a petróleumlámpa a fényforrás. A petróleum-lámpa, akárhány belü legyen, kevés fényt ad, mely nem is elég fehér és minden körülmények között kellemetlen szagot terjeszt.

Marad tehát a mészfény, melynek nyugodtsága, nagy fényerőssége, szép fehér szine és könnyü szabályozhatósága könnyen feledtetik az elektromos ívlámpa nagy fényerejét. A hol világító gáz van, ott csak oxygent kell előállítani, a mi olcsó anyagból, vasretorta segítségével igen könnyen és gyor-

Benzin-szaturátor.



A szaturátor keresztmetszete.

san megy. De a hydrogén fejlesztése valóban komoly akadály. Egy órai világításra 60—80 liter kell belőle s előállítása drága és veszödséges.

Ezért is pótlására többféle éghető gőzöket fejlesztő készülékeket hoztak forgalomba. A legelterjedtebb tán a Scott-féle benzin szaturátor.* Amde

* L. A vetitő készülékek leirása Gruber Nándor-tól. Calderoni és társa kiadása 1891.

ez a készülék határozottan veszedelmes, mert oxygén és benzingőz keverékével lévén telve, nyomban explodál, mihelyt a készüléket a lángtól elválasztó biztosító szelep felmondja a szolgálatot, a mi könnyen megesbetik. Ez oknál fogva jobb visszatérni az eredeti DRUMMOND-féle berendezésre: égő gáz gyanánt a hydrogént használni, de a fogyasztást lehetőleg csökkenteni. Erre a czélra aztán igen jól beválik a szaturátor és pedig a következő berendezésben:

A hydrogén gazométert összekötjük a szaturátor *D* csövével, a *C* csapot pedig a mészfény lámpa H csapjával, az oxygén gázométer csapját pedig a mészfény lámpa O csapjával. Ha most a hydrogént a szaturátorba bocsátjuk, áthalad rajta s benzin-gőzökkel telve jut a *C* csapon át a mészfény lámpába, a hol a fény előállítására szükséges lángot adja. Ezt a lángot főleg a gyorsan párolgó benzin gőzei táplálják, s a hydrogénnek jóformán csak az a rendeltetése, hogy a benzin-gőzöket a szaturátorból kihajtsa. Ilyetén összeállítás esetében egy órai folytonos világításhoz legfölebb 20—25 liter hydrogén kell. A fogyasztott gáz mennyiségének meghatározása czéljából végzett kisérleteimben a lángzó egy óra alatt 24 liter hydrogént fogyasztott, mialatt a hydrogén és oxygén 6 cm. vízoszlop nyomása alatt állottak; a fény pedig 130 gyertya erősségű volt.

Ily összeállítás mellett tehát kettős czélt érünk el; egyrészt a hydrogén fogyasztás minimális, másrészt pedig a robbanás veszélye el van hárítva, minthogy az oxygénnek vagy levegőnek a szaturátorba való jutása ki van zárva.

Gruber.

*

A légkör felhajtó ereje. A mérlegen egyensúlyba hozott test légkörbeli súlyvesztesége megváltozik, ha térfogata növekedik vagy csökken, anélkül, hogy tömege megváltoznék. Ezt a tényt a következő két kisérlet mutatja meg: Erős falú csapos edényben, pl. a HERON-féle labdában a levegőt összesűrítjük és a csap csövére vékony falú kaucsuk ballont, vagy állati hólyagot kötünk, melyből a levegőt előbb kinyomtuk. Az edényt a mérlegen egyensúlyba hozván, megnyitjuk a csapot: a levegő a hólyagot felfújja s az egyensúly nyomban felbomlik. Az edényre ható felhajtó erő nagyobbodott, tehát súlya kisebbedik. — A második kisérletben az edényből a levegőt kiszivattyúzzuk s a hólyagot felfújva kötjük a csapjára. A csap megnyittatván, a hólyag levegője az üres golyóba áramlik s a hólyag összehuzódik: ekkor látszólagos súlynövekedés következik be. Ehhez a kisérlethez bármiféle palaczkot lehet felhasználni, ha csak kivülről ható 1 légköri nyomást megbir. A nyakába átfurt dugót, ebbe pedig rövid üvegcsövet kell tolni, melyre kis darab kaucsukcső van húzva; a csövet szorító csappal (Quetschhahn) lehet elzárni s így feleslegessé válik a furatos csap.

Ha a levegő $^1/_2$ literes edényben 2—3 atmoszférányi nyomásu, s ha az utóbbi kisérletben 2—3 literes edényt használunk, igen könnyű 1 liternél nagyobb térfogatváltozást, tehát 1 grammnál jóval nagyobb súlykülömbözetet előállítani.

A második kisérlet Schuller-nek következő kisérletére emlékeztet: A mérleg egyik karján csapos üveggolyó függ úgy, hogy csövének nyilása a csészén levő lapos edény fenekéig leér; a lapos edényben víz van, a golyó pedig légüres. Az ekként terhelt mérleget egyensúlyba hozván, az egyensúly megbomlik, mihelyt a csapot megnyitjuk s a víz a golyóba felszökik.

B. G.

*

Az elektroskóp használatához. Az aranylemezes elektroskóp igen érzékeny a kicsi elektromos töltések irányában, de az elektromosság nemét csak akkor árulja el, ha ismert nemű elektromossággal van előlegesen megtöltve. Robinson a fémházu elektroskópot igen gyengén megelektromozott paraffinlepényre állítja, minek az a következménye, hogy a lemezkék gyenge pozitiv töltést vesznek fel s állandóan széthajlanak. A lemezkék jobban széthajlanak, avagy összeesnek, a szerint, amint pozitiv vagy negativ töltésü test közeledik az elektroskóp gombjához. — Lodge ugyanezt a czélt akként éri el, hogy az elektroskóp fémházát, mely mérés közben a födbe szokott levezettetni, vékony drót révén gyengén töltött leydeni palaczk belső fegyverzetével helyezi közlekedésbe.

Ha a lemezkék képe megfelelő alakú skálára van vetitve, az elektroskóp a potentiálok közelítő mérésére is használható.

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Márczius hó 7-én: Dischka Győző: Az ajaksípok hangjelenségei.

Rados Ignácz: Az ívhosszak méréséről.

Márczius hó 21-én: Dr. Konkoly Miklós: A távcsövek optikai és mechanikai szerkezetéről.

Dr. Suták József: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb vizsgálatokról.

*

Az ephemerisek számításáról.*

Nem ritkán érdeklődik valamely égi testnek, különösen üstökösnek pontosabb helyzete iránt a nem csillagász is, a ki azonban nem mindig rendelkezik a feladat megoldásához szükséges segédeszközökkel s kiről nem mindig tételezhetjük fel, hogy érdeklődése kitartóbb, mint a meglehetős terjengős számítások keresztülvitelére szükséges kedv. Ezért tán sokan szivesen veszik, ha a következőkben valamely bolygónak vagy üstökösnek tisztán graphikai helymeghatározását adom, mely mechanikai modellben is előállítható, és ezért kiváltképen alkalmas, hogy a csillagászok komplikált képleteinek gondolatmenetét világossá tegye.

A szükséges formulák terjengőssége és bonyolódott volta különben könnyen érthető: hiszen a pályameghatározás kényelmes berendezése és a belőle levezetendő helyzetek biztos megfigyelése között számos lépés fekszik. Ama kedvező körülménynél fogva, hogy bolygórendszerünk legtöbb és legfontosabb tagjai, sőt az állandóan hozzánk tartozó üstökösök is az ekliptikához kevéssé hajlott pályákban mozognak, pályameghatározásokban kivétel nélkül az ekliptikára, mint alapsíkra támaszkodunk. Erre vonat-

* Előadatott f. é. február hó 17-ki rendes ülésen.

koznak természetesen a pályaelemek is, és a belőlük levezetett helymeghatározók. Ámde a megfigyelésre az ekliptika rendszere teljesen alkalmatlan, mert nem vagyunk képesek röviden, kényelmesen és elegendő pontossággal kijelölni e legnagyobb kört az égen, holott az æquator, a modern megfigyelések alapsíkja bármely csillagnak napi mozgása segítségével bármikor és pontosan kitüntethető. Az ekliptikára vonatkozó helyzeti adatok tehát első sorban az æquatorra alakítandók át. De még akkor is ez adatok a Nap középpontjára, mint koordináta kezdőpontra vonatkoznak, holott nekünk valamely égi testnek felkereséséhez saját megfigyelő helyünkre támaszkodó koordinátákra van szükségünk. A heliocentrikus helyzet tehát másodsorban geocentrikussá változtatandó át, míg végre a parallaxis tekintetbe vétele a helyzetet a Föld középpontjából a felszinén levő megfigyelési helyre redukálja. Ez utóbbi javítás a legtöbb esetben — különösen pedig a mi czéljainkra nézve — teljesen elhanyagolható, miért is ezt tekintetbe venni nem fogjuk.

Legyen az égi test pályája ellipszis — kör vagy parabola esetén a levezetendő graphikai eljárás még sokkal egyszerűbb, és minden nehézség nélkül módosítható — s a bolygó helyzete vonatkoztatva oly derékszögű rendszerre, melynek alapsíkja maga a pálya síkja, kezdőpontja a Nap középpontja, azaz az ellipszis fókusa s pozitiv x tengelyének iránya a perihélium, x_0, y_0, akkor

$$x_0 = r \cos. v\,; \quad y_0 = r \sin. v\,; \quad z_0 = 0,$$

ha r a heliocentrikus radius vectort, v pedig a valódi anomáliát, azaz a mozgás irányában vett poláris szögletet jelenti.

Az ellipszis egyenletéből következik továbbá, a-n értve az ellipszis fél nagy tengelyét

$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e \cos. v}\,.$$

Ha T az égi test keringési ideje, mely KEPPLER harmadik törvényéből a pálya fél nagy tengelye ismeretével mindig kiszámítható, t a megfigyelés, t_0 a perihéliumátmenet ideje, akkor

$$M = \frac{360^\circ}{T}\,(t-t_0)$$

kifejezés a csillagász nyelvén a közép anomália, melyből v az excentrikus anomália E segélyével származtatható. Legyen ugyanis e az ellipszis numerikus excentricitása, akkor KEPPLER problémája szerint

$$M = E - \frac{180^\circ}{\pi} e \sin. E,$$

mely egyenletben úgy E mint M fokokban fejezendő ki. Ez egyenletnek E szerint történt megoldása után, — melynek egyszerű, ugyancsak graphikai módjáról később lesz szó — a valódi anomáliát a

$$\text{tang.} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tang.} \frac{E}{2}$$

egyenlet szolgáltatja, mint ez a két test problemájából elegendően ismeretes.

Az ekliptikára, mint alapsíkra megyünk át, ha a kezdőpont megváltoztatása nélkül a rendszert saját síkjában úgy forgatjuk, hogy a positiv x tengely a perihéliumból a pálya felszálló csomójába jusson. Ha a perihélium hosszúsága π — a hosszúságokat a tavaszi nap-éjegyenlőség pontjától az ekliptika mentén nyugotról délen át kelet felé olvasva, — a pálya és az ekliptika azon metszőpontjának hosszusága, melyben az égi test déli szélességből északi szélességbe jut, Ω akkor a mozgás irányába eső forgási szög $\omega = \pi - \Omega$. Megjegyzendő ugyanis, hogy csillagászati szokás szerint — elég különösen — a $\pi - \Omega$ szögletet a pályasík mentén a mozgás irányában olvassuk, az ekliptikában fekvő Ω szöglethez adjuk, és az összeget az ekliptikán vett perihélium hosszúságnak hívjuk. Az új derékszögű koordináták lesznek:

$$x_1 = x_0 \cos. \omega - y_0 \sin. \omega; \quad y_1 = x_0 \sin. \omega + y_0 \cos. \omega; \quad z_1 = 0.$$

Ha most az egészet az x tengely körül i szöglettel, a pályahajlás értékével forgatjuk, az új xy sík az ekliptikába esik, míg az x tengely positiv ága még mindig a Ω pont felé mutat. Ezen koordináták adva vannak:

$$x_2 = x_1; \quad y_2 = y_1 \cos. i; \quad z_2 = y_1 \sin. i$$

egyenletek által. Ujabb, a z tengely körül Ω szöglettel való forgatás által az x tengely a Ω pontból a tavaszi nap-éjegyenlőség pontjába jut, mi a következő, mindjárt hosszuság és szélességbe átfordítható koordinátákat szolgáltatja:

$$x_3 = x_2 \cos. \Omega - y_2 \sin. \Omega; \quad y_3 = x_2 \sin. \Omega + y_2 \cos. \Omega; \quad z_3 = z_2,$$

és ezen helyhatározók végül æquatorkoordinátákba mennek át, ha a rendszert ismét az x tengely körül ε szöglettel, az ekliptika ferdeségével forgatjuk; e forgatas eredménye adja az égi test æquatori heliocentrikus koordinátáit:

$$x=x_s\,;\quad y=y_s\cos.\varepsilon-z_s\sin.\varepsilon\,;\quad z=y_s\sin.\varepsilon+z_s\cos.\varepsilon,$$

melyek lánczolatos helyettesítés utján a következő, GAUSS-tól eredő adott egyszerű alakba önthetők:

$$x=ra\sin.(A+v)\,;\quad y=rb\sin.(B+v)\,;\quad z=rc\sin.(C+v),$$

hol a, b, c, A, B, C az ω, i, Ω és ε szögletektől függő segédmennyiségek, melyek értéke a helyettesítés eszközlése után magától adódik.

Ha most az égi test geocentrikus æquatorkoordinátáit ξ, η, ζ-val, a Nap geocentrikus æquatori koordinátáit X, Y, Z-vel jelöljük, akkor a

$$\xi=x+X\,;\quad \eta=y+Y\,;\quad \zeta=z+Z$$

egyenletek a koordináták kezdetét a Föld középpontjába helyezik át, és megadják poláros koordináták bevezetése által tüstént a geocentrikus radius vectort ρ, a rectascensiót α és a declinatiót δ:

$$\xi=\rho\cos.\alpha\cos.\delta\,;\quad \eta=\rho\sin.\alpha\cos.\delta\,;\quad \zeta=\rho\sin.\delta$$

egyenletek alapján. A laikusnak csak ritkán hozzáférhető ephemeris gyüjtemények adják közvetlenül X, Y, Z értékeit, rendesen a Nap radius vectora, R_1 hosszúsága, L és az 1″-et soha el nem érő szélessége, B segítségével számítandók. Az előbbi átalakítása egész hasonlóan most is

$$X=R\cos.L\cos.B\,;\quad Y=R\sin.L\cos.B\cos.\varepsilon-R\sin.B\sin\varepsilon\,;$$
$$z=R\sin.L\cos.B\sin.\varepsilon+R\sin.B\cos.\varepsilon,$$

vagy tekintettel B említett kicsinységére:

$$X=R\cos.L\,;\quad Y=R\sin.L\cos.\varepsilon-0{\cdot}000{,}00193\,B\,;$$
$$Z=R\sin.L\sin.\varepsilon+0{\cdot}000{,}00445\,B,$$

hol B ívmásodperczekben fejezendő ki, míg R a földpálya fél nagy tengelyének egységében van adva.

E formulák hosszadalmas volta kevéssé érezhető, ha hosszabb időközre terjedő egyenletesen haladó teljes ephemerist számítunk, de valóban elkedvtelenítő, ha csak egyes, talán nem is túlságos pontosságot kivánó helyek ismeretét óhajtjuk. Ez esetben a levezetett egyenletekből könnyen nyerjük a geocentrikus szélességet β és hosszúságot λ:

$$\rho \cos.(\lambda - \Omega)\cos.\beta = r\cos.(\pi - \Omega + v) \qquad + R\cos.(L - \Omega)$$
$$\rho \sin.(\lambda - \Omega)\cos.\beta = r\sin.(\pi - \Omega + v)\cos.i + R\sin.(L - \Omega)$$
$$\rho \sin.\beta = r\sin.(\pi - \Omega + v)\sin.i,$$

melyekben a Nap szélessége el van hanyagolva. Mivel minden szöglet két függvénynyel határozható meg, a quadransok választásában kétség nem merülhet fel. Téve ezután:

$$m\sin.M = \sin.\beta; \quad m\cos.M = \sin.\lambda\cos.\beta,$$

midőn is m mindig pozitivnek vehető, kapjuk az ekliptikai rendszernek æquatorivá való átváltoztatására a következő egyenleteket:

$$\sin.\alpha\cos.\delta = m\cos.(M+\varepsilon)$$
$$\cos.\alpha\cos.\delta = \cos.\lambda\cos.\beta$$
$$\sin.\delta = m\sin.(M+\varepsilon),$$

hol ε mint előbb is az ekliptika ferdeségét jelenti. Ez egyenletek nagyobb kényelmet biztosítanak, ha egyes helymeghatározásokat akarunk eszközölni.

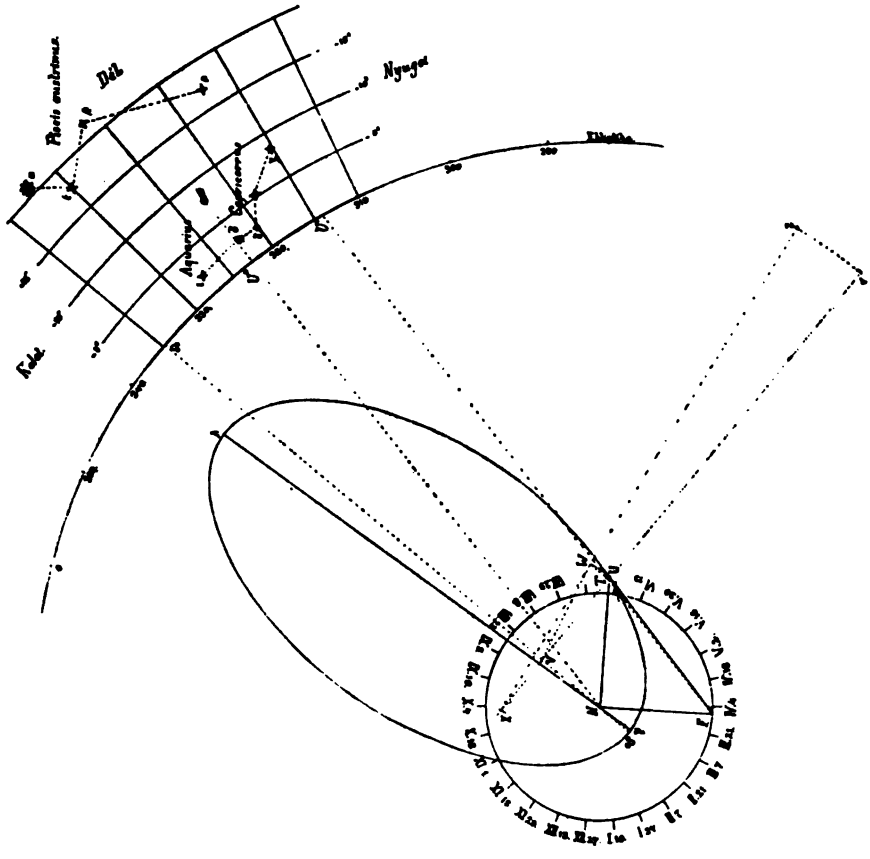
E képletek közlése után teljesen világos lesz a következő graphikai eljárás, melylyel a most visszatért Encke-féle üstökösnek helyét határozom meg, 1895 április 1-én éjfélkor. Newcomb-Engelmann's «Populaere Astronomie» (Leipzig, 1892) ez üstökös számára a következő elemrendszert adja:

$t_0 =$ 1888. juni 28,0^h K. párisi idő.
$\pi = 158°36'$
$\Omega = 334\ 39$
$i = 12\ 53$
$a = 2{\cdot}220$
$e = 0{\cdot}845$
$T =$ 3,308 juliusi év$=$1208,25 nap.
Mozgás: előrefutó.

A perihéliumátmenet megfelel budapesti középidőben kifejezve 1888. év 180,54 napnak, vagy két teljes keringést hozzáadva, s tekintetbe véve, hogy 1892 szökő év volt, 1895. év 39,29 napnak. Április 1-ének éjfele megfelel 1895. év 91·00 napnak, és ezért a közép anomália:

$$M = \frac{360°}{1208{,}25} \cdot 51{,}71 = 15°24{,}4'.$$

Legyen most (1-sö ábra) N a Nap középpontja, a körüle NF egységül vett tetszóleges sugárral leírt kör a Föld pályája, s a nagyobb, egész tetszés szerint választott sugarú concentrikus kör az ekliptikának vetülete az égen. Sem a földpálya excentricitása, sem sebességének változása ily méretű



1. ábra.

rajzban tekintetbe nem vehető. N pont egyszersmind fókusa az üstökös pálya ellipszisének, melynek fél nagy tengelye $a = \frac{AP}{2} = 2{\cdot}220\ NF$, és vonalos excentricitása $0{\cdot}845 \times 2{\cdot}220.NF$. A tavaszi nap-éjegyenlőség pontját az ekliptikában tetszólegesen 0-ban veszszük fel, s e pontból kiindulólag balfelé 360°-ra oszszuk e legnagyobb kört. Az oN kellőképen meghosszabbí-

tott egyenes a Föld pályáját III. 21-ben, azaz a Földnek tavasz kezdetén elfoglalt helyzetében találja. E pontból kiindulva ugyancsak az óramutatóval ellentett irányban oszszuk a Föld pályáját 365,25 részre; ábránkban minden osztási köz 14 napnak felel meg. E beosztás mellőzhető különben, ha ismerjük minden napra a Nap hosszúságát és meggondoljuk, hogy a Nap képe az ekliptikán N pontban mindig 180°-nyi szögletet képez a Földdel. Ez úton a Földnek nem teljesen egyenletes mozgása is jobban fejezhető ki. Az ekliptika és a földpálya helyes beosztása után megrajzolhatjuk a pályaellipszist nagyság és irányítás szerint olymódon, hogy az NF egyenes a perihélium hosszúsága 158°36′ vagy az NA egyenes az aphélium 338°36′ felé mutasson. Meghúzva még az ΩN egyenest Ω=334°39′ pontból nyerjük az $\Omega\sigma$ csomóvonalat, és az üstökösnek előrehaladó, azaz a Földével megegyező mozgásából tudjuk, hogy az $\sigma U\Omega$ felében az ekliptika alatt, az $\Omega A\sigma$ félben pedig a földpálya fölött kering.

Ezeket előkészítve meghatározzuk az üstökös anomáliáját. Tisztán kisérletileg eljárva megállapíthatjuk az UNP elliptikus sectort az NU egyenes alkalmas fektetése által úgy, hogy területe az ellipszis területének annyiad részét tegye, a hányad részét teszi a perihélium óta elfolyt $(t-t_0)$ idő az egész keringésnek (Keppler II. törvénye, a területek megtartásának elve). E számítás, azaz a Keppler-féle probléma megoldása mérlegeléssel pótolható, ha meghatározzuk a lehetőleg egyenletes vastagságú papirból kivágott ellipszis súlyát p, és azon a PN alapon álló sectort, melynek súlya $p\frac{t-t_0}{T}$ legyen. Ezen sector PN-re fektetve adja U pontban az üstökösnek helyét. $NU=r$ a heliocentrikus radius vector, $v=UNP$ a valódi anomália.

Vagy megoldhatjuk a Keppler-féle egyenletet pusztán próbálgatással is. Legyen E_1 az excentrikus anomáliának, E-nek valamely hypothetikus értéke, mely a Keppler-féle egyenletbe téve M helyett M_1 hamis értéket adja; ekkor

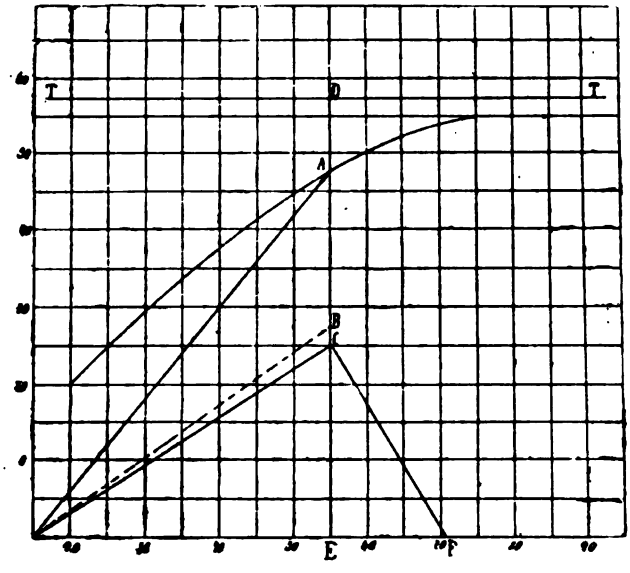
$$E_2=E_1+\frac{M-M_1}{1+e\cos. E_1}$$

az excentrikus anomáliának egy közelítőbb értékét adja. Ez eljárás ismétlendő, míg $M-M_n$ az n-ik helyettesítésnél a kivánt pontosságon belül marad. Ez eljárás ad a mi esetünkben M=15°24,4′ értékkel E=55°7,7′ és továbbá v=121°55,0′.

De tisztán graphikailag is járhatunk el.* Legyen MF (2-ik ábra) egyenes az $y=\frac{180°}{\pi}$ sin. M görbe abscissájának egy darabja, melyre 0°-tól 180°-ig

* Klinkerfues, Theor. Astronomie. (Braunschweig 1871.)

fel vannak rakva az egyes fokok. A teljes ábrának, mely egyszer megrajzolva természetesen minden pályameghatározásnál használható, mi csak az itt szereplő részét adjuk. Legyen továbbá TT e görbének $M=90°$-ban húzott, az abscissától $\frac{180°}{\pi}$ távolságra fekvő érintője, és $M = 15°24{,}4'$ az üstökös pillanatnyi közép anomáliájának helye. Rakjuk fel M pontban MF rányhoz az FMA szögletet oly módon, hogy



2. ábra.

$$\text{cotang.}\, FMA = e, \quad FMA = 49°48{,}2'$$

és bocsássunk A metszési pontból merőlegest az abscissatengelyre. A merőleges talppontja E az excentrikus anomália helye, mert könnyű belátni, hogy

$$\overline{ME} = E - M = \frac{180°}{\pi} e \sin. E.$$

Messünk továbbá $MB = \frac{180°}{\pi} e$ sugárral AE egyenesbe, mi a B pontot szolgáltatja. Nyilván áll:

$$BE = \sqrt{\left(\frac{180}{\pi} e\right)^2 - \left(\frac{180}{\pi} e\right)^2 \sin.^2 E} = \frac{180}{\pi} e \cos. E$$

és ezért

$$DB = \frac{180}{\pi}(1 - e \cos. E).$$

Ha

$e = \sin. \varphi$, tehát a mi esetünkben $\varphi = 57°40'.2$

az excentricitás szöglet, tegyük

$$FMC = 90° - \varphi$$

és messünk C pontból $CF = DB$ sugárral F pontban az abscissa vonalba. Ekkor CFE szöglet vagy mellékszöglete a valódi anomálja v, még pedig CFE maga, ha $E < 90° - \varphi$, mellékszöge, ha $E > 90° - \varphi$. Ugyanis:

$$\sin. CFE = \frac{EC}{CF} = \frac{ME \cotg. \varphi}{DB} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \cdot \frac{e \sin. E}{1 - e \cos. E}.$$

De a két test problémája értelmében

$$\frac{r}{a} \sin. v = \sqrt{1 - e^2} \sin. E \quad \text{és} \quad \frac{r}{a} = 1 - e \cos. E$$

a miből következik, hogy

$$CFE = v \text{ vagy } = 180° - v.$$

A mi példánkban az 1° hosszát 2 *mm*-nek választva $E = 55°.1$ és $v = 122°$, mi elég jól összevág a közvetlen számítás eredményével. Ez úton tehát még igen pontos számítás esetén E számára már kitűnő közelítést kapunk, mely az előbb mondottak értelmében könnyen javítható.

Meg lévén immár állapítva az üstökös pályahelye U'-ban, az FU egyenes megadná közvetlenül az üstökös helyét az égen is, ha a pálya tényleg az ekliptika síkjában feküdne. Hajlásának befolyását könnyen vehetjük tekintetbe. Világos ugyanis, hogy az ellipszisnek a $\Omega\sigma$ csomóvonal körül való hajlításánál minden e vonallal párhuzamos mérete változatlan marad, míg az ezen vonalra merőleges méretek $1 : \cos. i$ arányában rövidülnek. Ha tehát U pontból $\Omega\sigma$-ra merőlegest bocsátunk, az $UVW = i$ szögletet V pontban felrakjuk, $VW = VU$-nak veszszük és W pontból UV-re az WT merőlegest húzzuk, akkor T az üstökösnek az ekliptika síkjára való vetülete. Az FTU' vonal metszése az éggömbbel adja az üstökös helyét — feltéve, hogy az éggömb mérete a Föld pályájához képest végtelen nagy. E feltételnek ábránkban úgy felelünk meg, hogy a mondott egyeneshez N pontból az NU'' párhuzamos egyenest húzzuk, miáltal az üstökösnek geocentrikus hosszúságát nyerjük, mely nyilván U'' pont hosszúságával egyenlő.

Az üstökös szélességét is fáradság nélkül megszerkeszthetjük a már felírt

$$\rho \sin. \beta = r \sin. (\pi - \Omega + v) \sin. i$$

egyenlet alapján. Az üstökös szögtávolsága a felszálló csomótól, tehát $\pi - \Omega + v$ szöglet, a mozgás irányában számítva az ΩNU-nak megfelelő domború szöglet. Ennélfogva

$$VU = r \sin. (\pi - \Omega + v).$$

Ha tehát $XW = FU$ sugárral W pontból az UV egyenes folytatásába bemetszünk és WX-et meghúzzuk, akkor $XWVT$ kettős háromszögből:

$$WT = r \sin. (\pi - \Omega + v) \sin. i \text{ és } = \rho \sin. X,$$

a miből következik, hogy $X = \beta$, a bolygó szélességével egyenlő. És természetes, hogy e szöget mérő YZ ív, mely az $XZ = NU''$ sugarú körhez tartozik, közvetlenül a szélességnek ívmértéke. Ez déli lesz, ha az üstökös a mozgás irányában a $\mathfrak{S}$ és Ω pontok között van, északi, ha a Ω és $\mathfrak{S}$ között tartózkodik.

Nem szükséges az így levezetett ekliptikai koordinátákat æquatoriakra átszámítani, mert e művelet vagy ismét szerkesztés által, vagy az üstökösnek térképbe való rajzolása által pótolható. Első esetben keresendő graphikailag az U'' pont helye, ha az ekliptikát oN egyenes körül $23°27{,}2' = \varepsilon$ szög körül forgatjuk, még pedig úgy, hogy — most a papir síkját véve æquator sík gyanánt — az ekliptika téli felét ($180° - 270° - 360°$) lefelé hajlítjuk. A szerkesztés teljesen ugyanazos azzal, mely az U'' pontot és az YZ ívet szolgáltatta, és egyenesen az üstökös rectascensióját és declinatióját adja, mely azután vagy térképre rajzolható, vagy valamely parallaktikus távcső körei segítségével egyenesen beállítható.

Egyszerűbben úgy járunk el, hogy az ekliptika körét poláris ekliptikai æquidistáns térkép legnagyobb köre gyanánt tekintjük. Ekkor N az ekliptika pólusának képe, melyből a pólustávolsággal, mint sugárral közös középpontból æquidistáns köröket húzzunk és ezeket egyenlő szögtávolságú sugarakkal metszük. Ha az égi test szélessége északi, akkor N czélszerűen az északi, ha déli, akkor N az ekliptika déli pólusával azonosítható. Természetes, hogy ekkor $YZ = \beta$ szélesség közvetlenül NU'' látósugárra U'' pontból felrakva szolgáltatja 0 pontban az üstökös helyét a csillagok között. Megjegyzem, hogy az 1-ső ábrában a szerkesztés részleteinek kímélése szempontjából N gyanánt nem a déli, hanem az északi pólus van felvéve. Ennek folytán az ábrához függesztett térkép jobb és bal, azaz keleti és nyugoti oldala fel van cserélve. Az üstököst környező csillagok helyzete e térképbe könnyen berajzolható, ha valamelyik csillagtérképbe egyszersmindenkorra beszerkesztjük az ekliptika koordinátahálózatát is.

A számítás szerint az üstökösnek 1895. április 1-én éjfélkor elfoglalt helye $\lambda=322°38'$, $\beta=-7°49'$, vagy $\alpha=327°44'$, $\delta=-21°25'$, a mi a szerkesztéssel a rajzban egyáltalán elérhető pontosság keretén belül megegyezik. E szerint az üstökös a jelzett időben 33'-czel áll keletre és 5°14'-czel délre δ Capricorni csillagtól.

Ez az egész szerkesztés mechanikai modell alakjában is előállítható. Vágjuk ki kemény papirosból úgy az üstökös, mint a Föld pályáját, messük fel az előbbit σN, utóbbit $\Omega\sigma$ vonal mentén σ pontig és illeszszük össze úgy, hogy N pont mindkét pálya közös pontja legyen s az üstökös pálya $PU\Omega$ fele a kör alá kerüljön. Készítsünk egy $180°-i=167°7'$ élszöglettel biró prismát; tompa élét az $\Omega\sigma$ vonalba illesztve, erősítsük rá a két pályát ábrázoló lapot, és hajtsunk N ponton át egy tengelyt, mely a földpályához $90°-\varepsilon=66°33'$ szöglettel hajlik, még pedig azon pont felé, melyet a Föld deczember 22-ikén foglal el. E tengely tehát a világtengely képe. Irányítsuk e tengelyt az egész készülékkel együtt észak felé és hajlítsuk a vízszinteshez a hely geographiai szélességének megfelelő szöglettel. Ha most az egész készüléket tengelye körül addig forgatjuk, míg az FN vonal a Nap irányába esik, akkor az FU vonalnak az égig húzott folytatása szolgáltatja tüstént az üstökös helyét. Abban a két helyzetben, melyben az FU látásvonal (melyet esetleg valamely piros szállal láthatóvá is lehet tenni) vízszintesen áll, az üstökös kel és nyugszik.

A Napra való beállítás is elkerülhető, ha a tengelyre merőlegesen erősített s vele együtt forgó 24 órára beosztott kört alkalmazunk, mely ugyanazon szerepet fogja játszani, mint a glóbus tengelyén lévő órakör. Ha az FN egyenest a meridiánba állítjuk, úgy, hogy N délen, F északon legyen, akkor az óralapnak, valamely a forgásban részt nem vevő mutatón déli 12 órát kell mutatnia. Ha most az egész készüléket a kivánt óráig forgatjuk az FN vonal mindig a Napra marad beállítva és viszont megállapítható az idő is, melyben az üstökös kel és nyugszik. Természetes különben, hogy ez a modell nem fogja megadhatni azt a pontosságot, melyet a szerkesztés biztosít, de mindenesetre élénkebb képét adja annak a folyamatnak, mely a csillagasz képleteiben kifejeződik.

Kövesligethy Radó.

A PRIMITÍV-GYÖKÖK SZAKASZOSSÁGA.

A következő sorokban egy érdekes számelméleti tételt fogok bebizonyítani, a mely minden egyszerűsége mellett is eddigelé — ha nem csalódom — elkerülte a mathematikusok figyelmét.

Legyen p páratlan prímszám, a pedig (p-vel nem osztható) egész szám, és jelöljük a első, második, ..., i-dik hatványának p-vel való osztásából származó maradékokat rendre

$$a,\ a^2, \ldots, a^i$$

-vel, s a p és valamelyik maradéka közti különbséget rendre

$$-a,\ -a^2, \ldots, -a^i$$

jelképpel, akkor tételünk röviden így formulázható:

Ha $(-a^2)$ *primitív gyöke* p*-nek,* $(-a^4)$ *is az; ha ellenben* $(-a^2)$ *nem primitív gyöke* p*-nek, úgy* $(-a^4)$ *sem az.*

A tétel bizonyítását két részre osztom. Először azt veszem, hogy $p=4n+1$ alakú. Könnyű meggyőződni, hogy ez esetben $(-a^2)$ sohasem lehet primitív gyök; mert

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{2n} a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Föltéve ellenben, hogy $p=4n-1$ alakú, úgy $\frac{p-1}{2}$ páratlan szám és:

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Ebből azonban csak az következik, hogy $(-a^2)$ mindig quadratikus nem-maradéka p-nek; mert megtörténhetik, hogy a

$\frac{p-}{2}$-hatványnak már valamely egész számú hányadrészére, mondjuk $\frac{p-1}{2\delta}$-re is áll, hogy

$$(-a^2)^{\frac{p-1}{2\delta}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

De ekkor, minthogy $\frac{p-1}{2\delta}$ páratlan szám, szükségképen áll ez is:

$$(a^2)^{\frac{p-1}{2\delta}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

E két kongruenczia szorzatából következik, hogy

$$(-a^4)^{\frac{p-1}{2\delta}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

tehát: $(-a^4)$ *ugyanolyan rendű nem-maradék, mint a milyen* $(-a^2)$; vagyis ha $(-a^2)$ nem primitív gyök, úgy $(-a^4)$ sem az, ha ellenben $(-a^2)$ primitív gyök, úgy $(-a^4)$ is az.

A tétel utóbbi része önként következik a primitív gyököknek egy ismert sajátságából is. Ismeretes ugyanis, hogy a primitív gyöknek minden olyan hatványa, a melynél a hatványkitevő relatív prím $(p-1)$-hez képest, ugyancsak primitív gyök. Amde

$$-a^4 = -(-a^2)^2 = (-a^2)^{\frac{p-1}{2}+2}$$

itt pedig a hatványkitevő:

$$\frac{p-1}{2}+2,$$

az esetben mikor $\frac{p-1}{2}$ páratlan szám, okvetetlenül relatív prim $(p-1)$-hez képest; ha tehát $(-a^2)$ primitív gyök, úgy $(-a^4)$ is az; és viszont.

*

Tételünkből folytatólag az is következik, hogy a szerint, a mint $(-a^2)$ primitív gyök vagy nem primitív gyök, nem csak $(-a^4)$, hanem $(-a^8)$, $(-a^{16})$ . . . is primitív gyök vagy nem primitív gyök. Vagyis e sorozatnak

$$-a^{g^1},\ -a^{g^2},\ -a^{g^3},\ \ldots,\ -a^{g^k},\ -a^{g^{k+1}}\ \ldots \qquad (1)$$

tagjai vagy mind primitív gyökök, vagy egyikök sem az. A primitív gyökök számossága: $\varphi(p)$ azonban, valamint a nem primitív gyökéké is: $p-1-\varphi(p)$ véges szám. E sorozatnak tagjai tehát nem lehetnek egymástól mind különbözők, hanem kisebb-nagyobb intervallumokban, bizonyos szakaszokban ismétlődniök kell.

Határozzuk meg e szakaszok minőségét, tagszámát, dolgozatunk czímének megfelelőleg, először is arra az esetre, a mikor $p=4n-1$ alakú és $(-a^2)$ primitív gyök; vagyis kérdezzük, mikor lesz e sorozat $(i+1)$-dik és $(k+1)$-dik tagja kongruens, tehát:

$$a^{g^{i+1}} \equiv a^{g^{k+1}} (\text{mod.}\, p).$$

Minthogy a primitív gyök közönséges maradéksorozata $p-1$ tagból áll, nyilvánvaló, hogy akkor, a mikor

$$2^{i+1} \equiv 2^{k+1} (\text{mod.}\, p-1)$$

vagy pedig

$$2^i \equiv 2^k \left(\text{mod.}\, \frac{p-1}{2}\right),$$

s minthogy az utóbbi modulus páratlan

$$2^{k-i} \equiv 1 \left(\text{mod.}\, \frac{p-1}{2}\right) \qquad (2)$$

Föltevésünk szerint ez utóbbi modulus $R^r T^t S^s \ldots$ alakú, hol is $R, T, S, \ldots$ páratlan prímszámok, $r, t, s \ldots$ pedig tetszőleges pozitív egész számok.

Legyen már most $\rho, \tau, \sigma \ldots$ a legkisebb pozitív egész szám, a melyre nézve

$$2^\rho \equiv 1 \text{ mod. } R; \quad 2^\tau \equiv 1 \text{ mod. } T; \ldots$$

akkor, a mint ismeretes:

$$2^{\rho R^{r-1}} \equiv 1 \text{ (mod. } R^r); \quad 2^{\tau T^{t-1}} \equiv 1 \text{ (mod. } T^t); \ldots$$

A miből következik, hogy a 2. alatti kifejezésben előforduló $k-i$: legkisebb közös többszöröse lesz a

$$\rho \,.\, R^{r-1},\ \tau \,.\, T^{t-1},\ \sigma \,.\, S^{s-1} \ldots \qquad (3)$$

számoknak. E szerint $k-i$ csupán p-től függő állandó és teljesen független a k vagy i rendszám egyéni értékétől. Ha tehát a szakasz tagszámát λ-val, a föntebbi legkisebb közös többszörөst $\phi(p)$-vel jelöljük

$$\lambda=\phi(p)$$

és az (1) alatti sorozatban

$$\begin{aligned} -a^{g^{\lambda+1}} &= -a^{g^1} \\ -a^{g^{\lambda+2}} &= -a^{g^2} \\ &\vdots \\ -a^{g^{\lambda+i}} &= -a^{g^i} \end{aligned}$$

vagyis a sorozat szakasza mindjárt az *első taggal kezdődik*, s a szakasz tagszáma egyenlő a 3. alatti számok legkisebb közös többszörösével.

Megjegyzendő, hogy e sorozat vissza felé is folytatható; gyökvonás útján azt találjuk ugyanis, hogy

$$-a^{g^{\lambda}} \equiv \pm a$$

Ha tehát $-a^g$ primitív gyök, úgy vagy $+a$, vagy $-a$ szintén az.

Hasonlítsuk össze a primitív gyökök szakaszának tagszámát, $\phi(p)$-t a primitív gyökök összes számával: $\varphi(p)$-vel. Minthogy az utóbbi, mint ismeretes,

$$\varphi(p)=R^{r-1}(R-1)\,.\,T^{t-1}(T-1)\ldots$$

az előbbi pedig a (3) alatti számok *legkisebb* közös többszöröse, könnyű belátni, hogy $\phi(p)$ a legtöbb esetben egész számú hányadrésze $\varphi(p)$-nek és csak kivételesen lesz vele egyenlő. Csakis akkor lehet t. i. ez amazzal egyenlő, ha $(p-1)$ tényezőkre bontásában csak *egy* páratlan prímszám jő elő, ha tehát

$$p-1=2R^r$$

és azonfelül $\rho=R-1$, vagyis ha 2 primitív gyöke R-nek. 100-on alul csakis hat prímszám van, t. i. 3, 7, 11, 19, 23 és 59, a melyeknél a primitív gyökök egy szakasza valamennyi primitív gyököt magában foglal, a többieknél $\phi(p)$ mindig fele $\varphi(p)$-nek; 100-on

túl menve, péld. 127-nél a primitív gyökök száma: 36, holott a szakasz tagszáma: 6. Itt tehát a harminczhat primitív gyök hat csapatra, 211-nél a negyvennyolcz primitív gyök négy csapatra oszlik, míg 251-nél mind a száz egy csapatban vonul föl. A kiszámítás részleteit és egyes egyéneken való ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

*

Teljesség okáért egészítsük ki e meghatározást — noha itt már a sorozat tagjai nem lesznek primitív gyökök, — arra az esetre is, a mikor $p=4n+1$ alakú.

Legyen a ismét primitív gyöke p-nek, és kérdezzük, mikor lesz az (1) alatti sorozat $(i+1)$-dik és $(k+1)$-dik tagja kongruens; nyilvánvaló, hogy ugyanúgy mint előbb, ha

$$2^{k+1} \equiv 2^{i+1} (\text{mod.}\, p-1).$$

Mostani föltevésünk szerint

$$p-1 = 2^{\mu+1} R^r T^t S^s \ldots,$$

hol is μ tetszőleges pozitív egész szám. Lesz tehát:

$$2^{k-\mu} = 2^{i-\mu} \left(\text{mod.}\, \frac{p-1}{2^{\mu+1}}\right).$$

Ebből látjuk, hogy most a szakasz a sorozatnak $(\mu+1)$-dik tagjánál kezdődik s a tagszáma $(k-i)$, ugyanúgy mint előbb, a (3) alatti számok legkisebb közös többszörösével egyenlő. Itt tehát a szakasz nem tiszta, vagyis nem kezdődik a sorozat első tagjával, épen úgy mint a páros számok reciprók értékének tizedes törtre való átváltoztatásakor. A szakaszban előforduló számok valamennyien olyan tulajdonságúak, hogy a nekik megfelelő közönséges maradéksorozat

$$\frac{p-1}{2^{\mu}}$$

tagból áll. A $\mu=0$ eset visszavezet a $p=4n-1$ alakú prímszám primitív gyökeiből keletkező szakaszra.

Szily Kálmán.

A CZIKLIKUS DETERMINÁNSOK ELMÉLETÉHEZ.

A következőkben a

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-i+1} & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n-i+2} & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_i & a_{i+1} & \dots & a_n & \dots & a_{i-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-i} & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst, a melynek sorai az első sorból az

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ciklikus helyettesítés ismételt alkalmazása alapján nyerhetők, röviden ciklikus determinánsnak fogom nevezni. E ciklikus determinánsnak az algebrában és számelméletben való gyakori szereplése eléggé megokolja azt, hogy vele önállóan is foglalkozzunk és különösen determinánselméleti szerkezetét tanulmányozzuk. Ez a körülmény indított engem arra, hogy e ciklikus determinánsokra vonatkozó két oly kisebb tételt tegyek közzé, a melyek e determináns szerkezetére vonatkoznak.

Az a_k határozatlan az A determinánsnak minden sorában mint elem szerepel; legyen az i-dik sorban előforduló a_k elemnek aldeterminánsa

$$A_k^{(i)}$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, n).$$

E jelölés bevezetése után a szóban forgó két tételt a következőképen formulázhatom:

I. *Az A ciklikus determinánsnak legfeljebb n egymástól különböző* $(n-1)$*-edfokú aldeterminánsa lehet, ugyanis*

$$A_k^{(1)}=A_k^{(2)}=\cdots=A_k^{(n)}.$$
$$(k=1, 2, \ldots, n)$$

II. *Ha* $A=0$, *akkor A-nak összes* $(n-1)$*-edfokú aldeterminánsai egyenlők.*

*

I. Ha az A determináns i-dik sorához tartozó elemek aldeterminánsait rendre komponáljuk az

$$i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (i-1)\text{-}$$

dik sorokkal, az egyenlőségeknek következő rendszerét kapjuk:

$$\begin{aligned}
&a_iA_i^{(i)} +\cdots+a_nA_n^{(i)} \ +a_1A_1^{(i)}+\cdots+a_{i-1}A_{i-1}^{(i)}=A\\
&a_{i+1}A_i^{(i)}+\cdots+a_1A_n^{(i)} \ +a_2A_1^{(i)}+\cdots+a_i \ A_{i-1}^{(i)}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{i-1}A_i^{(i)}+\cdots+a_{n-1}A_n^{(i)}+a_nA_1^{(i)}+\cdots+a_{i-2}A_{i-1}^{(i)}=0.
\end{aligned}\tag{1}$$

Jelöljük ez egyenlőségek mindegyikében a baloldalon álló lineár kifejezések tagjait rendre:

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-i+1},\ t_{n-i+2},\ \ldots,\ t_n\text{-}$$

-nel. Ha most az (1) alatti egyenlőségek mindegyikére a

$$C=(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-i+1},\ t_{n-i+2},\ \ldots,\ t_n)$$

ciklikus helyettesítés $(n-i+1)$-dik hatványát, azaz a

$$C^{n-i+1}=\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_{i-1}, & t_i, & \ldots, & t_n\\ t_{n-i+2}, & t_{n-i+3}, & \ldots, & t_n, & t_1, & \ldots, & t_{n-i+1}\end{pmatrix}$$

helyettesítést alkalmazzuk, az egyenlőségek következő rendszerei fognak kiadódni:

$$\begin{aligned}
&a_1A_1^{(i)}+\cdots+a_{i-1}A_{i-1}^{(i)}+a_i \ A_i^{(i)}+\cdots+a_n \ A_n^{(i)}=A\\
&a_2A_1^{(i)}+\cdots+a_i \ A_{i-1}^{(i)}+a_{i+1}A_i^{(i)}+\cdots+a_1 \ A_n^{(i)}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_nA_1^{(i)}+\cdots+a_{i-2}A_{i-1}^{(i)}+a_{i-1}A_i^{(i)}+\cdots+a_{n-1}A_n^{(i)}= \ .
\end{aligned}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

De ez azt jelenti, hogy az

$$A_1^{(i)},\ A_2^{(i)},\ \ldots,\ A_k^{(i)},\ \ldots,\ A_n^{(i)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

értékrendszerek mindannyian az

$$\begin{aligned}
&a_1 z_1 + \cdots + a_{i-1} z_{i-1} + a_i \ \ z_i + \cdots + a_n \ \ z_n = A\\
&a_2 z_1 + \cdots + a_i \ \ z_{i-1} + a_i \ \ z_i + \cdots + a_1 \ \ z_n = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n z_1 + \cdots + a_{i-2} z_{i-1} + a_{i-1} z_i + \cdots + a_{n-1} z_n = 0
\end{aligned}$$

lineár egyenletrendszernek megoldásai; minthogy azonban az a_k-knak határozatlan választása mellett az egyenletrendszer determinánsa, a mely A-val egyenlő, nem azonosan zérus, ennek az egyenletrendszernek csak egyetlen egy megoldása lehet; de akkor kell, hogy

$$A_k^{(1)} = A_k^{(2)} = \cdots = A_k^{(n)} \qquad (2)$$
$$(k=1, 2 \ldots, n)$$

legyen; ha pedig a (2) alatti egyenlőségek az a_k határozatlanok mind amaz értékei mellett helyesek, a melyekre nézve $A \gtrless 0$, akkor azonos egyenlőségek, és így az a_k határozatlanok minden lehetséges értékei mellett is helyesek maradnak.

*

II. Ha

$$A = 0,$$

akkor az A determináns két tetszőleges sorának megfelelő elemeihez tartozó aldeterminánsok proporczionálisak. Így pl. az 1-sö és 2-dik sorhoz tartozó aldeterminánsok is proporczionálisak, ha ezt egyenletben fejezzük ki; a következőt kapjuk:

$$A_1^{(1)} = \rho A_2^{(2)},\ A_2^{(1)} = \rho A_3^{(2)},\ \ldots,\ A_n^{(1)} = \rho A_1^{(2)};$$

de I. tételénél fogva

$$A_2^{(2)} = A_2^{(1)},\ A_3^{(2)} = A_3^{(1)},\ \ldots,\ A_n^{(2)} = A_n^{(1)},$$

tehát

$$A_1^{(1)} = \rho A_2^{(1)},\ A_2^{(1)} = \rho A_2^{(1)},\ \ldots,\ A_n^{(1)} = \rho A_1^{(1)}. \qquad (3)$$

Ezeknek az egyenlőségeknek szorzása illetőleg összeadása a

$$A_1^{(1)} = \rho^n A_1^{(1)} \tag{4}$$

illetőleg

$$A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)} = \rho(A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)}) \tag{5}$$

egyenlőségre vezet.

Ha feltesszük, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ határozatlanoknak oly értékeik vannak, hogy

$$A_1^{(1)} \gtrless 0,$$

akkor az

$$A_1^{(1)2} = A_2^{(1)} A_2^{(1)}$$

egyenlőség következtében a

$$A_2^{(1)} \gtrless 0 \tag{6}$$

reláczió is érvényben lesz.

De az a_k határozatlanok ez értékrendszerei mellett (4)-ből következtethetjük, hogy

$$\rho^n = 1$$

és így a

$$\rho = \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}},$$

a mely a határozatlanoknak tekintetbe jövő értékrendszerei mellett az a-knak folytonos függvénye, csak oly számértéket vehet fel, a mely a

$$\rho^n = 1$$

egyenletet kielégíti, a miből következik, hogy ρ állandó.

Minthogy továbbá

$$A_1^{(1)} + A_2^{(1)} + \cdots + A_n^{(1)}$$

nem azonosan zérus, midőn $A=0$, (a mint azt számbeli példákon kimutathatjuk) (5)-ből következik, hogy

$$\rho = 1;$$

de akkor a (3) alatti relácziók az I. tétel figyelembe vétele mellett így írhatók:

$$A_1^{(i)}=A_2^{(i)}=\cdots=A_n^{(i)}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

s ezzel a második tétel is be van bizonyítva.

Ha $A_1^{(1)}=0$, akkor már a (3) alatti egyenlőségek mutatják, hogy az A determináns összes $(n-1)$-edfokú aldeterminánsai zérusok. Tételünk e speciális esetét KRONECKER bizonyította be legelőször «Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen» című értekezésében, a mely a Journal für die reine und angewandte Mathematik 99. kötetében jelent meg.

Végül legyen szabad a talált tételt számbeli példán is bemutatnom. Legyen.

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

akkor

$$A=0,\ A_1^{(i)}=A_2^{(i)}=A_3^{(i)}=A_5^{(i)}=-3.$$
$$(i=1, 2, 3.)$$

Rados Gusztáv.

IRODALOM.

A kinematikai geometria történeti fejlődése.

Mint önálló disciplina a *kinematika* fiatal tudomány. — A *kinematikai geometria* pedig csak a XIX. századnak a vívmánya. Ha tehát a kinematika és vele együtt a kinematikai geometria történeti fejlődésére óhajtunk egy pillantást vetni, akkor nem kell messzebbre visszatekintenünk, mint a mult század végére é. p. *Franciaországra*, mely akkoriban minden reformmozgalomnak színhelye volt.

A kinematika fejlődése szigorúan összefügg a gépszerkezettan fejlődésével.

Régebben minden gépet önálló egésznek tekintettek és így is írtak le. A gép részeire, azaz részeinek csoportozataira pedig, az úgynevezett mechanizmusokra nem igen ügyeltek, nem törődvén azzal, hogy milyen fontos volna e mechanizmusokat külön megfigyelni, azaz tudományosabb alapon tárgyalni és nem kutatták egy és ugyanannak a mechanizmusnak sokféle alkalmazását. Egyszóval régebben nem voltak képesek a *speciálison* az *általános* tulajdonságokat felismerni. És azért ha egy és ugyanaz a mechanizmus más-más gépen kissé más alakban fordult elő, mindannyiszor újból leírták, mert valóban új és a szóban forgó géptől elválaszthatatlan dolognak tekintették.

Különben általános hibája volt a régieknek, hogy általánosítás iránt nem igen volt érzékük.

Legjobban látjuk ezt a *geometriában* és azzal illusztrálhatjuk, ha csak futó pillanstát is vetünk a görögök geometriájára. Arra a geometriára, a mely Thales-, Pythagoras-, Archimedes- és Appolonius-tól ránk maradt, és a melyet Euklides rendszerbe foglalt. Bármennyire bámuljuk is benne a fogalmak tisztaságát és következetességét, mégis, ha ezt a geometriát kissé közelebbről tekintjük, szembetűlő az a körülmény, hogy a görögök határozott előszeretettel csüngtek a részleten, általános elvekkel és módszerekkel nem törődtek * és főleg annak tulajdo-

* Hankel, Projectivische Geometrie.

nítható az is, hogy, ha egy és ugyanazt a problémát más-más felvételben többféleképen oldották meg, mindannyiszor azt vélték, hogy ezzel új feladatot oldottak meg. (Appolonius egyik híres munkájában egy feladatot 80-féleképen oldott meg.) A görög tudós nem kutatta, hogy a látszólag különböző idomok között nincs-e általános összefüggés?

Kevés módosítással így maradt a dolog a geometriában, nemkülönben a mechanikában is körülbelül a XVII. század végéig. A XVIII. század eszméinek azonban nem felelhetett meg eme szűk látókör; nem felelhettek meg a régi hagyományok. Azok helyébe új elméletnek kellett lépnie, a mely eredményeit általános módszerekkel fejti ki. A geometriában, mely 2000 esztendeig jóformán bántatlanul hagyatott, megteremtették az általánosítás eszméjét, mely a modern analitikai és szinthetikai geométriában lelte megoldását; a mechanikában pedig ugyanez az általánosítás felé való törekvés abban nyilvánult, hogy a mozgási mechanizmusokra súlyt helyeztek. És valóban, az első műegyetem megalapításával (Páris 1794) már kétfelé vált az addigi gépleírástan és megoszlott a mechanizmusok tanára és az általános géptanra. Az utóbbi megmaradt ezután is a fizika mellett, hová kezdettől fogva tartozónak tekintették, a mozgási mechanizmusok tanát pedig az *ábrázoló geometriához* csatolták és annak alcsoportjául tekintették. Ez a szétválasztás Monge és Carnot nevéhez fűződik. Monge, a ki nagyszerű művével, a *Géométrie descriptive*-vel a tudományos alapon nyugvó rajzolásnak megalapítója, egyszersmind megteremtője az általánosítás eszméjének is, úgy a geometriában, mint a mechanikában.

Monge és Carnot nyomán még Hachette,[1] Lanz,[2] Bétancourt és mások dolgoztak az említett irányban és szellemben, de a mozgástan, mint önálló discziplina, az ábrázoló geometriából lassankint kivétetett és csak a legutolsó időben kezdik ismét a kinematikai tételeket az ábrázoló geometriával kapcsolatban tárgyalni.

A mechanizmusok tanának *tárgyalásmódjában* fontos fordulat állott be a jelen század harminczas éveiben, a mikor Ampère «*Essai sur la Philosophie des sciences*» című műve jelent meg, melyben ennek a discziplinának filozofiai alapvonalait veszi bonczolókés alá.

Ampère is sürgette a mozgástannak elválasztását az erő- és tömegtantól, és ő volt az, ki a mozgások tanát először *kinematikának* (Cinematique) nevezte, a görög *κινημα* = mozgás szó után.[3]

---

[1] Hachette, Traité élémentaire des machines. 1828. (4me édit.)

[2] Lauz et Bétancourt, Essai sur la composition des machines. 1808. 2me édit. 1819.

[3] Megjegyzendő, hogy, bár a *kinematika* szót Franczia-országon kívül, a hol különben legelőször terjedt el, azóta Olaszországban (Cinematico), Angolország-

Poncelet-nek erélyes fellépése folytán a kinematikát már 1838-ban tanították a Sorbonne-ban.

Térjünk át ezekután a kinematikának *geometriai* terére és vegyük ezt kissé közelebbről szemügyre.

«*Geometrie u. Geomechanik*» című értekezésében Fiedler[1] azt mondja: «Ha figyelemmel kisérjük a mechanika tudományos fejlődésének újabb irodalmát, akkor önkénytelenül is azt látjuk, hogy tárgyalásában egy idő óta új fordulat állott be. Tapasztalhatjuk ugyanis egyrészt azt az általános törekvést, mely a geometriai szempontok értékesítése felé irányul; másrészt pedig látjuk, hogy a mechanikának, illetőleg a kinematikának tulajdonképeni *geométriai részleteire* mindinkább nagyobb súlyt helyeznek.» A Fiedler hangsúlyozta ez újításoknak első eszméi nehány kiváló tudós nevéhez fűződnek.

Már Bernoulli János[2] kimutatta (1742-ben) a forgási középpontok létezését olyan mozgásoknál, melyek egy és ugyanazon síkban mennek végbe.

Giulio Mozzi[3] pedig (1763-ban) ezeket a háromméretű térre alkalmazta.

Euler[4] végre volt az, a ki az egy pontban rögzített háromméretű rendszereknek mozgását egy bizonyos tengely körül való momentán forgásra vezette vissza.

Az Euler-féle tételeknek akkoriban, a mikor azokat hírdette, nem nagy fontosságot tulajdonítottak és a német tudósok azokat csakis érdekes theoretikai fejtegetéseknek tartották. E tételekkel később a francziák kezdtek

---

ban (Kinematics), Németországban (Kinematik) stb. is használják, mindamellett ez a szó filologiai szempontból nem mondható helyesnek és sokan kifogásolták is. Többek között Reuleaux azt mondja, hogy Ampére jobban cselekedett volna, ha kinematika (Cinematique) helyett *kinetikát* (Cinetique) javasolt volna. Azonban a kinematika szó a tudományban már annyira meghonosodott, hogy kiküszöbölése most már nagyon bajos volna. Házi használatra Reuleaux különben a kinematikát «Getriebelehre»-nek mondja. Más tudósok, Herrmann, Kant, Wronski stb. a *phoronomia* szót (φέρειν = hordani) ajánlják. Schönflies pedig, és vele együtt a legujabb időben több német tudós, a *Geometrie der Bewegung* megnevezést használja, Cevá-nak *Geometria motus* után indulva.

[1] W. Fiedler: «Geometrie u. Geomechanik». Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 21. Jahrg. 1876, 186—288.

[2] J. Bernoulli: De centro spontaneo rotationis. Opera, t. IV. 1742.

[3] G. Mozzi: Discorso matematico sopra il rotamento momentanei dei corpi. 1763.

[4] Euler: Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. 1765. («Mechanik u. Theorie der Bewegung der festen Körper» cz. német ford. Wolfers-től. 1848—53.)

foglalkozni és különösen CHASLES[1 2 3] és POINSOT[4 5 6] az EULER-féle tételeket valóban alapvető elvekké alakították át. — A forgási középpont (pólus) geometriai tulajdonságait először CHASLES fejtette ki ([3] alatt felemlített dolgozatában), megmutatván benne, hogy a merev rendszer általános mozgása csavarmozgásra vezethető vissza. Bővebben fejtegette ezeket a [2] és [3] alatt felsorolt dolgozataiban.

CHASLES-től ered továbbá az az eszme, hogy az eredeti mozgással egyúttal a megfordított mozgás is figyelembe veendő. Ugyanis a pont mozgása révén keletkező görbéknek bizonyos «dualizmusá»-ra figyelmeztetvén, megmutatta, hogy, ha a Σ rendszernek A pontja Σ'-ben az a' görbét írja le, akkor a mozgás megfordításánál a' görbe keresztül halad A ponton. Ezt bemutatta szemléletileg is.

Felemlítendők továbbá MÖBIUS-nak[7] fontos dolgozata; nemkülönben JONQUIÈRES,[8] BRESSE,[9] LAMARLE,[10 11] RESAL[12] stb. tudósoknak nevezetes értekezései és munkái.

E tudósok tekinthetők tehát a kinematikai geometria megalapítóinak.

A különböző szerzőktől származó és különböző forrásokban lelhető ered-

---

[1] CHASLES: Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit d'un corps solide libre; communiquée à la soc. philom. 1831. (Bulletin des sciences math. par Férussac 1830.)

[2] Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace: Comptes rend. de l'Academie des Sciènces de Paris. T. XVI. 1843.

[3] Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable: Comptes rend. T. LI. 1860, továbbá T. LII. 1861.

[4] POINSOT: Théorie nouvelle de la rotation des corps. (Journ. des. Mathém. p. Liouville T. XVI.) Német fordításban Schellbachtól 1851.

[5] Theorie des cônes circulaires roulants.

[6] Élément de statique.

[7] MÖBIUS: Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. (Crelle Jour. XVIII. 1836.)

[8] JONQUIÈRES: Mélange de géométrie pure. 1856.

[9] BRESSE: A *térítő körök* (Wendekreise) feltalálója. Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans, et sur l'application de la cinématique à la détermination des rayons de courbure: Journal de l'Ecole politechnique 1853.

[10] LAMARLE: Théorie géométrique des rayons et centres de courbure: Bulletin de l'Academie royale des sciences etc. Belgique 1857—59. Ugyanott továbbá:

[11] Théorie des centres et axes instantanés de rotation.

[12] RESAL: Traité de cinématique pure. 1862.

ményeket azonban először Aronhold gyűjtötte össze és azokat egy következetes egésszé kikerekítve és saját kutatásaival bővítve előadta a berlini Gewerbeakademien. Híres előadásaiban fejtegette a mozgás megfordításának elvi fontosságát, melyről már Chasles is szólt.

Ezen előadásoknak a síkban végbenmenő mozgásokat tárgyaló részét pedig «Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen» című folyóiratban *Grundzüge der kinematischen Geometrie*[1] cím alatt ki is adta.

Ugyane folyóiratban F. Reuleaux közli a már előbb említett *Grundzüge der theoretischen Maschinen-Getriebelehre*[2] cz. dolgozatait, melynek elején — kapcsolatban az elméleti géptan történeti fejlődésének felemlítésével — a geometriai alapfogalmakat röviden összefoglalja.

Aronhold módszerét Buka fejtette ki bővebben «*Das sphärische Kurbelgetriebe*» című értekezésében. *Göttingen* 1876-ban.

Ha az elméleti mechanika legújabb irodalmára tekintünk, azt a meggyőződést szerezhetjük, hogy már Chasles dolgozatainak megjelenése óta a geometriai részletekre mindig nagyobb súlyt helyeznek. Ez a körülmény, melyre különben Fiedler már 1876-ban figyelmeztet, fokozódott mértékben tapasztalható az utolsó két évtizedben, úgy hogy most már, néhány nagybecsű értekezés és munka megjelenése óta, a *kinematikai geometriának legfontosabb része*, t. i. az, mely a *merev rendszerek* mozgásának geometriáját tárgyalja, befejezést nyert és így bátran mondhatjuk, hogy a *kinematikai geometriában önálló discziplinát* is birunk.

Ennek igazolására szabad legyen még e discziplina irodalmának nehány devágó és fontos jelenségére hivatkoznom.

Első helyen Schell-nek[3] munkáját kell felemlítenem. A szerző ebben egy 100 lapra terjedő részt bocsát előre, a melyben a mozgás geometriáját egészen függetlenül tárgyalja, megmutatván benne, hogy a mozgások elmélete e geometriai rokonságok elméletével azonos, ha a mozgást létesítő okokat s a mozgó tárgyak anyagát nem tekintjük.

Burmester[4] nagyszabású könyvében szintén nagy súlyt helyez a geometriai álláspontra.

---

[1] 51. évfolyamban.

[2] 50. és 51. évfolyamban.

[3] Schell: «Theorie der Bewegung u. der Kräfte.»

[4] Burmester: Lehrbuch der Kinematik. I. Bd. Die ebene Bewegung. 1888. (Sajnos, hogy a második kötet mindeddig nem jelent meg, és — mint értesültünk — nem is fog megjelenni, a mi talán a kissé túlszigorú bírálatnak tulajdonítható, melylyel a szakkörök ezt a művet fogadták.)

Ugyanezen tudósnak a «Zeitschrift für Math. u. Phys.»[1 2 3 4] nemkülönben «Civilingenieur»[5 6 7] és a «Mathematische Annalen»[8] köteteiben megjelent dolgozatai pedig kiváló fontossággal biró geometriai kutatások.

Ide számítandók továbbá Rittershaus-nak kitünő dolgozatai, melyeket szintén a «Civilingenieur»-ben közölt,[9 10 11 12 13 14] stb.

Mielőtt azonban az idevágó legjelesebb dolgozatok felsorolását folytatnám, kénytelen vagyok még egy másik fontos körülményre röviden figyelmeztetni.

Vannak tudósok, a kik a kinematika geometriai részeinek tárgyalásánál az analitikai módszert használják. Ezek kutatásaikban többnyire a sebesség és gyorsulás fogalmából indulnak ki. Mások különös előszeretettel a szinthetikai módszert használják, nevezetesen azok, a kik az analitikait mellőzik, mert abban nem lelik természetes kútforrását a tiszta geometriai eredményeknek.

Vannak végre olyanok is, a kik a kinematikai geometriai részleteket analitikailag tárgyalják ugyan, de a szinthetikai módszereket sem vetik meg, hanem azoknak is nagy fontosságot tulajdonítanak; szem előtt tartva, hogy csak mind a két módszernek együttes alkalmazása emelheti az elméleti mechanikát arra a színvonalra, melyen az mai nap áll.

---

[1] Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme: Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1874. 19. Bd.

[2] Ugyanott: Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher u. collinear-veränderlicher ebener Systeme.

[3] Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Bd.

[4] Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 23. Bd.

[5] Über die Geradführung durch das Kurbelgetriebe: Civilingenieur 22. Bd. 1876.

[6] Über den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme: Civilingenieur 24. Bd.

[7] Über die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten. 26. Bd.

[8] Über das bifocal-veränderliche System: Mathem. Annalen 16. Bd.

[9] Ritterhaus: Zur heutigen Schule der Kinematik 21. Bd.

[10] Die kinematische Kette 22. Bd.

[11] Das Kurbelgetriebe u. seine Anwendungen 24. Bd.

[12] Kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung. 24. Bd.

[13] Construction der Beschleunigung am Kurbelgetriebe 25. Bd.

[14] Die Interferenzkurbelkette 26. Bd.

Könnyű belátni, hogy már az a körülmény is, hogy a problémák megoldásánál mind a két módszer alkalmazást talált, csak jótékony hatással lehetett a geometria fejlődésére. De különösen a modern szinthetikai geometria húzott belőle nagy hasznot, mert számos geometriai vonatkozás nagyon előnyösen tárgyalható kinematikai alapon és a dolgok ilyen tárgyalás mellett egészen új világításban tűnnek fel. — Erre vonatkozólag első sorban DARBOUX munkájára[1] kell hivatkoznom; nemkülönben MANNHEIM-nek kitűnő dolgozataira,[2 3 4] melyek közül csak néhányat sorolok fel. Ezek közül különös fontossággal bir a [4] alatt felsorolt dolgozat, melyben nagy alapossággal a végtelenül vékony sugárpontnak geometriai elméletét adja, t. i. a sugár-kongruenciát tárgyalja, a mely az egyenesnek egyszerűen végtelen határozatlan mozgásából származik.

Itt kell továbbá felemlítenem MANNHEIM-nek 1880-ban kiadott nagyobbszabású művét is, t. i. a *Géométrie descriptive*-jét.[5]

Ez a mű, mely egyrészt áttekintést nyújt az ábrázoló geometria anyagán, különös becsesel bir azon körülménynél fogva is, hogy a «Deuxième partie»-ban a «courbes et surfaces: Complément théorique et applications»-ban több helyütt a kinematika elemeit tárgyalja. Szerző ezeket azután a torzfelületekre, különösen pedig a torzcsavarfelületekre és a görbék és felületek görbületére alkalmazza. A 20e leçon-ban pedig a «Normalies. — Courbure des surfaces. (Appl. de Géométrie cinematique)»-ot tárgyalja. A hol a normál felületeket úgy keletkezteti, hogy egy felületnek a normálisa a felületen fekvő iránygörbén tova halad. Ezen «normalies»-eknek alkalmazását tetszésszerinti felületek görbületének meghatározásával mutatja be.

Azok a tudósok, a kik a fősúlyt a tiszta geometriai szempontra helyezik — mint említém — úgy okoskodnak, hogy a mozgás alapján keletkező térbeli alakzatoknak geometriai tulajdonságai nem függnek sem a mozgás sebességétől, sem pedig annak gyorsulásától, hanem pusztán csak attól, hogy a mozgó pont, vonal vagy szilárd rendszer milyen helyzeteket foglal el egymásután a térben; tehát első sorban a mozgás törvényétől. Ilyen szempont-

[1] DARBOUX: Leçons sur la theorie générale des surfaces 1887—89.

[2] MANNHEIM: Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable: Journ. de l'école polyt. 43.

[3] Sur les surfaces trajectoires stb.... Liouville Jour. de Math. III. I. kötet.

[4] Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces. Journ. de Mathém. t. XVII. 1872.

[5] A munkának teljes címe: «*Cours de Géométrie descriptive de l'école polytechnique, comprenant les elements de la Géométrie cinematique*, par A. MANNHEIM.» Paris 1880.

ből a kinematikai geometriát összefüggő egészben A. Schoenflies tárgyalja, a ki a szinthetikai kinematikai geometria keretébe vágó föntemlített irodalom felhasználásával és saját kutatásaival bővítve «*Geometrie der Bewegung*»* című művét adta ki. Minthogy a kinematikát a modern synthetikai geometria egyik ágának tekinti, azért azt tisztán geometriai alapra fekteti és segédeszközül a projektiv geometriának alapelveit használja. Művében pusztán csak merev rendszerek mozgására szorítkozik és mindenütt tekintettel van a testek kölcsönös vagyis relativ mozgására.

Ezekben jeleztem volna röviden, nehány halvány vonással a kinematika, nevezetesen pedig a kinematikai geometria történeti fejlődésének főbb és nevezetesebb mozzanatait.

Természetes, hogy az itt felsoroltak távolról sem merítik ki e disciplinának összes irodalmi forrásait, ezt bizonyítja az a körülmény is, hogy folyóíratokban *legújabban*, azaz *jelenleg* megjelenő termékekre nem terjeszkedtem ki és nem szóltam a legmodernebb geometriai kutatásoknak legujabban mívelt teréről, t. i. a *törvényszerüen-változó* rendszerek kinematikai geometriájáról.

Teljesebb lenne a kép, ha felsoroltam volna még Brocard, Mannheim, Schönemann, Grouard, Geisenheimer, Schuhmann, Mehmke, Grebe, Hossard, L'Huilier, Lemoine, Touker, Stoll stb. hírneves tudósoknak idetartozó fontos dolgozatait.

Mielőtt azonban czikkemet befejezném, kénytelen vagyok még csak egy munkáról megemlékezni, mely minket közelebbről érdekel. Értem ez alatt Fröhlich Izidor egyetemi tanárnak «Kinematikáját» — elméleti physikájának I. kötetét —, mely nagyszabású munka 1891-ben jelent meg. E mű megjelenése után most már bátran mondhatjuk, hogy nekünk is van kinematikánk, mely nemcsak hogy a tudomány színvonalán áll, hanem a legkitünőbb külföldi művek mellé is sorozható.

Hornischek Henrik.

---

* A munkának teljes czíme: «Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung von Dr. Arthur Schoenflies. Teubner 1886.»

ÉRTESÍTŐ A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1895. ÉVBELI

ELŐADÁSAIRÓL.

Április hó 4-én: Dr. SUTÁK JÓZSEF: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokról.

BARTONIEK GÉZA: A víz és gázvezeték elektromos áramáról.

Április hó 18-án: Dr. SUTÁK JÓZSEF: Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokról.

*

Az ajaksípok hangtüneményei.*

Különös tekintettel a derékszögű keresztmetszetű sípokra.

Minthogy a sípok hangjelenségeinek magyarázatára jelenleg általán elfogadott elméleteket igen hiányos, sőt — nézetem szerint — téves alapra fektetve találtam: megkisérlettem önálló és beható kutatás utján tisztába jönni a dologgal. Azt hiszem, fáradságom nem vész kárba, és sikerül oly nézetet megállapítanom, melyből eme hangtünemények egységes, pontos és világos magyarázatát lehet adni.

Vizsgálódásaimat a sípok mindkét válfajára, t. i. az ajak- és a nyelvsípokra egyaránt, terjesztettem ki és sikerül elméletemmel nemcsak mindkét sípnem ismertebb, főbb jelenségeiről beszámolnom és azoknak közös alapon nyugvó magyarázatát adnom, hanem az abból folyó következtetések biztonsága az itt föllépő hangtünemények nem egy oly rejtélyéhez is szolgáltatja a kulcsot, melyek eddigelé a legkevésbbé kideritett esetek közé soroltattak.

Betartva az akusztikai szakirodalomban követett sorrendet, elsőben az ajaksípokat veszem tárgyalás alá, annál is inkább, mert elméletem a sorrendet bizonyos tekintetben még rendszerileg is helyesnek igazolja.

Hogy ha az ajaksípok hangjelenségeinek teljes magyarázatát akarjuk adni, figyelmünket a következő körülményekre kell irányítanunk: *a)* mi okozza a hang keletkezését a sípokban? *b)* mely alaphangban szólalhatnak meg? és *c)* erősebb befuvásra mely felhangok juthatnak bennök érvényre?

---

* Előadatott a f. évi márczius 7-én tartott rendes ülésen.

1. A hangébresztés az ajaksípokban. A hang keletkezését az ajaksípokban ez idő szerint kétféle nézetből magyarázzák; az egyik, a sokkal elterjedtebb nézet Helmholtz-tól, a másik pedig Sonreck-től származik. Helmholtz szerint a sípfejből kinyomuló vékony légszalag a felső ajak élébe ütközvén, ott megtörik, s ez gyengébb zúgást okoz, mely annál magasabb jelleget ölt, minél erősebb a befuvás; e zúgás pedig igen sok, magasságra nézve egymáshoz lehetőleg közel fekvő hangokból összetettnek képzelhető, mely hangok közül a síp levegőoszlopa resonantia utján azt a hangot erősíti legjobban, mely a síp levegő oszlopának saját hangja.

Nem tekintve azt a körülményt, hogy néhány levegőrészecskének rezgő mozgásában rejlő eleven erő egyátalán nem is hozhatja a megszólalt síp légoszlopát a tapasztalt, felette erős hangnak megfelelő erősségű rezgésbe, midőn pl. a jelentékenyen nagyobb tömegű és ugyanazon hangra hangolt hangvilla közeledtére annak rezgései jóval gyengébb hangban resonáltatnak, Helmholtz nézetének már az a körülmény is ellene mond, hogy a köbös sípok igen erős befuvásra mind mélyebb hangot adnak, mint ugyanoly hosszuságú vékonyabb síp jóval gyengébb megfuvásra, a midőn pedig Helmholtz szerint a köbös sípokba épen gyengébb, a vékonyabb sípokba pedig erősebb légáramot kellett volna vezetni, minthogy szerinte a mélyebb hangjellegű zúgás létesítésére mindenkor gyengébb, a magasabb jellegű zúgás előállítására pedig erősebb befuvást kell alkalmazni. Továbbá az a körülmény, hogy kellő mensura mellett egy és ugyanazon, mérsékelt erősségű befuvással az egész zenészeti hangterjedelemre szóló összes sípokat megszólaltathatom, szükségessé teszi Helmholtz nézetéből kifolyólag azt a föltevést is, hogy ama bizonyos gyengébb zúgást, melyet a sípfejből kivonuló légszalagnak a felső ajakba való ütközése okoz, nem sok, egymáshoz igen közel fekvő hangokból, hanem számtalan, az összes rezgésszámokat is magasságra nézve egymástól a lehető legtávolabb álló hangokból alakultnak tekintsük, a mit képtelenségnek tartok és véleményem szerint ez az egy föltevés már önmagában véve czáfolja Helmholtz említett nézetét, annál is inkább, mert teljes következetességgel felvethető utóbbi esetben a kérdés, hogy miért nem szólal meg akkor a síp valamennyi felső hangjaival egyidőben, és miért kell mégis előállításuk végett fokozatosabban erősebb és erősebb befuvást alkalmaznunk?

Sokkal szerencsésebbnek tünik fel előttem az az út, a melyen Sonreck halad, midőn a sípok megszólalását az ajaknyilás előtt elvonuló légszalagnak lökésekre való felbontásából magyarázza olyképen, hogy a légszalag szivóképességénél fogva a sípcső alsó részében légritkítást okozván, a külső légnyomástól a sípcsőbe irányíttatik, mely alkalommal egyszersmind kívülről ragadván magával levegőt, a létesített ritkítást csakhamar sűrűsítéssel váltja fel stb. E felfogás helyességét a felső ajakra erősített és az

alsó ajak felé irányított papirszeletkékkel igyekszik igazolni, melyek élénk keresztrezgésbe jutnak, valahányszor a síp megszólal. Ez a kisérlet azonban legkevésbbé hivatott SONRECK nézetének igazolására, a mennyiben az ily szeletkék nemcsak a sípok ajaknyilásai elé alkalmazva, hanem egyik végükkel bárhova is erősítve, a feléjük irányított légáram, illetőleg annak a szeletkének mindkét oldalára változó erősséggel ható dynamikai nyomása a legélénkebb keresztrezgésbe jutnak, a mint erről mindenki a legegyszerűbb kisérlet útján könnyen meggyőződhetik.

Ép oly kevéssé mérvadók e tekintetben BROCKMANN* stroboskopikus kisérletei, melyek a légáram váltakozó be- és kihatolásáról az ajaknyilás elé helyezett kis gázláng segélyével csak abban az esetben tesznek tanuságot, midőn a síp már megszólalt, nem vevén figyelembe, hogy a gázláng pislogását az ajaknyilás előtt rezgő légrétegek sűrűsítési és ritkulási változatai is előidézhetik. A mit pedig BROCKMANN a sípcső légoszlopának, valamint a külső levegőnek a légszalagtól okozott ki- és beszivásáról az említett értekezésben mond, nem új, a mennyiben 1880-ban «Természettudományi tanulmányok» című értekezésemben,** majd pedig két évvel későbben más helyütt*** e tüneményekről bőven beszámoltam.

Hogy csakugyan a légszalagnak kellő számú lökésekre való felbontása szólaltatja meg a sípot, azt a következő kisérlet igazolja. Egy SEEBECK-féle korongra fujtatóból erősebb légsugarat irányítunk és a korong fölé körülbelül $^1/_2$ *cm*-nyi távolságra, egymásután különböző sípokat állítunk úgy, hogy a korong forgatása közben a nyilásain áttörő léglökések egyszersmind a sípfejbe és innét az ajaknyilás elé kerülhessenek. Csakhamar tapasztaljuk, hogy mindezen sípok csak akkor szólalnak meg alaphangjaikon, vagy pedig partiális hangjait egyikén, midőn hangjuk a korongtól előidézett hang magasságával teljesen megegyezik, *vagyis a mikor a lökések az ott ébreszthető álló léghullám rezgéscivel megegyező számban kerülnek a sipcsőbe;* a korongnak valamivel lassubb vagy gyorsabb forgatására pedig a sípok teljesen némák maradnak, holott HELMHOLTZ szerint most is elég ok forogna fönn megszólalásukra. Szükséges azonban, hogy e kisérletben a légszalagnak valamivel tágabb nyilása legyen a kiömlésre, nehogy a sürün egymásután tóduló légáramok a sípfejben a levegőt megsürüsítvén, a síp állandó — habár gyengébb — megszólalását idézzék elő.

A mi már most a lökések számát illeti, melyekre a légáram a síp ajkai közt bizonyos idő alatt — pl. 1 mpercz alatt — felbomlik, könnyü belátni. hogy az csak két tényezőtől függ; u. m. *a)* a sebességtól, melylyel a lég-

* L. Poggendorfs Annalen XXXI. Bd. 1887.

** L. A pécsi főreáliskola értesitőjében, az 1880—81. tanévről.

*** L. Zeitschrift f. d. Realschulwesen 1882.

részecskék az ajaknyílás előtt elvonulnak, vagyis a befuvás erősségétől és *b)* az ajaknyílás területének a sípcső keresztmetszetéhez mért viszonyától.

a) Tudjuk ugyanis, hogy a légsugár bizonyos sebességet már elnyervén, dynamikai nyomása nagyobb arányban fogy, mint a minő arányban fokozódik sebessége; azaz a légsugár szivóképessége és ezzel együtt a sípcsőben létesített ritkítások nagyobb arányban növekednek, mint a hogyan növekszik a sebessége. Ennek természetes folyománya pedig, hogy a létesített nagyobb ritkítások mellett egyszersmind a lökések száma is szaporodik. Igy pl. ha valamely esetben azt találjuk, hogy a sebességet 3-szor akkorára fokozván, a légsugár a sípcső fenekén 6-szor akkora ritkítást okoz, akkor szem előtt tartva azt, hogy a 3-szor akkora sebességgel haladó részecskék félretolására minden bizonynyal 3-szor akkora erő is kivántatik, a légsugár a sípcső fenekén létesített 3-szor akkora ritkítási fok mellett, ugyanazon idő alatt kétszerannyi lökésre is fog felbontatni. Egy szóval tehát: *erősebb befuvás nemcsak hogy a légszalagot egymást sürübben követő lökésekre bontja fel, hanem egyszersmind a síp alsó részében mindinkább fokozódó ritkitásokat és sürüsítéseket is előidéz.*

b) A lökések száma azonban az ajaknyílás területének (t) a sípcső keresztmetszetéhez (T) mért viszonyától, $\frac{t}{T}$-től is függ.

Képzeljük ugyanis, hogy egy szükebb és egy tágabb keresztmetszetű sípcső előtt ugyanoly szélességű és magasságú légszalag ugyanakkora sebességgel vonul el, akkor a szükebb csőből jóval rövidebb idő alatt szívja be a levegőt a ritkulás ugyanezen fokára, mint a terjedelmesebb keresztmetszetű sípcsőből, tehát maga a légszalag is hamarabb kerül az előbbi síp szárába, mint az utóbbiéba, illetőleg gyorsabban és több lökésre fog ugyanazon idő alatt fölbontatni, mint a tágasabb sípcsőben. Ebből azonban egyszersmind az is következik, hogy minél kisebbre szabjuk egy és ugyanazon síp ajaknyilását — az ajak nyilását részben elfödvén, — annál lassabban képződnek itt is a lökések, miután az ugyanazon mérvű ritkítás a keskenyebbre szabott légszalag segélyével most már csak később érhető el. Hogy pedig a lökéseknek ily módon való késleltetésére inkább csak az ajaknyilás szélességének (*b*) és nem egyszersmind magasságának (*a*) vagyis az ajkak egymástól való távolának kisebbítése hat, magától érthetővé teszi az a körülmény, hogy a légszalag szivóképessége majdnem kizárólag csak a tövénél jut érvényre.* Ha tehát valamely síp ajaknyilását szélessége irányában egyre kisebbítjük, a síp hangjának folyton mélyebbre kell szállania, míg az ajkak egymástól való távolságának csökkentése, a hang mélyedésére ilyen hatással nem lehet. Ha tehát a síp szélességét

* L. L. A. Zellner: Vorträge über Akustik I. Bd. pag. 283.

b_1-el, mélységét pedig d-vel jelöljük, akkor a lökések száma $\frac{b}{b_1 d}$ hányadossal jut függő viszonyba, és ha az ajaknyilás szélessége a síp szélességével egyezik, mely körülmény a derékszögű átmetszetű sípoknál majdnem kizárólag fennforog, akkor az előbbi hányados $\frac{1}{d}$ alakra vezethető vissza, azaz: a *lökések számára az előbbi pontban említett tényezőn kívül még a sípcső mélységének is van hatása, melynek arányát később fogjuk megállapítani.* A tapasztalat ezen következtetéseket a hang keletkezésének okáról mondottakkal a legszebb összhangzatba hozza.

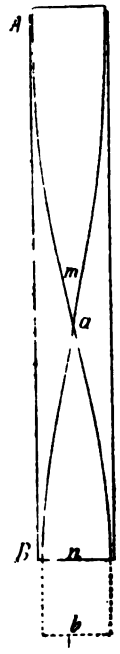
Megemlítjük még, hogy a lökések számára a légsugár irányának nincsen hatása, mert ha csak csekélylyel is elirányítjuk a légsugarat a felső ajaktól, sem erősebb, sem gyengébb befuvásra nem fogjuk többé a sípcsőbe vagy az elé irányíthatni, miután mindkét componens t. i. a sebesség és a tőle okozott oldalnyomás mindenkor egyenlő arányban változván, az új eredő iránya a régivel többé össze nem eshet, hanem vagy a felső ajakba fog ütközni, vagy pedig állandóan annak belső vagy külső oldala mellett vonul el és a lökésekre való fölbontása megszünt. Innét magyarázható meg, miért szükséges a felső ajkat élesebb ékalakra idomítani és miért maradt néma a síp a légsugár csekély elirányítása esetében is.

2. *Az alaphang megalakulása és a magassága.* Az ajkak előtt elvonuló légáram az előbbi pontban említett módon a lökések sűrű sorozatára bontatván föl, utóbbiak a sípcső légoszlopát álló rezgésre is indíthatják, minek pedig — nézetem szerint — első és legfőbb föltétele, hogy *a légáramtól a légoszlopban mechanikailag előidézett sűrűsítési és ritkulási állapotok az állóhullám sűrűsítési és ritkulási phasisaival teljesen egybeessenek. Minthogy pedig a légszalag előidézte ritkulásban a légrészecskék a sípcsőben mind lefelé tereltetnek, a sűrűsítésben pedig fölfelé irányittatnak, következik, hogy a sípcsőben csak oly hullám keletkezhetik, melyben — a fenéktől fölfelé haladva — legelőbb rezgési csomóval találkozunk, illetőleg a melyet a sípcső fenekén alul képzeleti rezgési maximum jellemez.*

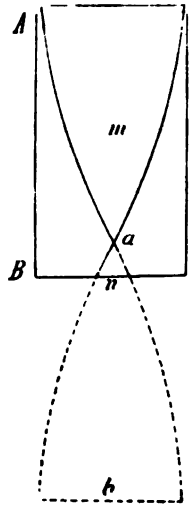
Hogy az álló hullámnak ily módon való keletkezéséről most elmondott nézetem helyes, illetőleg hogy ama föltevésem, mely szerint a síp csak akkor szólalhat meg, midőn az álló hullám rezgési phasisai a légáram okozta mechanikai hatásokkal (sűrűségváltozások és mozgásirány) teljesen egybevágnak, egy igen egyszerű kisérlet útján győződhetünk meg. Ugyanis ha egymásután különböző sípokat megszólaltatunk és kautsukcsővön keresztül a nyitott sípba felülről irányítva egy mérsékeltebb erősségű légsugarat fuvunk be, a legerősebben hangzó síp is azonnal elnémul, illetőleg a képződött álló hullám szerkezete rögtön megbontatik. Hasonló eset áll

elő akkor is, midőn a sípcső fenekét valamivel tágabb nyilással átfurjuk és így fujjuk meg a sípot.

Kutassuk már most a nyilt ajaksípokban ébredt alaphangok magasságát. Ha *AB* nyilt sípcsövet, melynek mértani középpontja *m*-ben van, meg akarjuk szólaltatni, a fennebbiek szerint a befuvás erősségét addig kell fokoznunk, míg a légszalag lökései oly álló hullám előteremtésére nem elégségesek, melynek csomója *m* középpont és a síp feneke közé esik. Nagyon természetes azonban, hogy magában *m* pontban a csomó sohasem jöhet létre, mert ugyanekkor *n*-ben rezgési maximumnak kellene alakulnia, a mi a légszalagtól e helyen okozott periodikus légritkulások és sűrűsítések miatt lehetetlen. Másrészt azonban be kell látni, hogy a csomó mindenesetre annál közelebb huzódik *m*-hez, vagyis a felső határponthoz, minél csekélyebb változásokat idéz elő a légszalag a síp légoszlopának természetes sűrűségében *n* helyen, és viszont minél erősebb a befúvás, annál közelebbre fog a csomó *n*-hez t. i. az alsó határponthoz esni, minthogy a fennebb mondottak szerint a légszalag erősebb befuvásra nemcsak hogy ugyanazon idő alatt nagyobbszámú lökésekre bomlik, hanem egyszersmind a síp fenekén jelentékenyebb sűrűsítési és ritkulási állapotok is fognak fejlődni. Minthogy pedig az igen vékony sípoknál az ajaknyilás előtt elvonuló légszalag részecskéi kisebb sebesség esetében is igen gyorsan képesek ritkítást előidézni, de meg a kisebb sebességű légrészecskék félretolására csak igen csekélymérvű ritkítás szükséges, következik, hogy az igen vékony sípoknál a képzeleti hullámrész hossza csak igen csekély lehet és így az álló hullám csomója majdnem a sípcső tengelyének középpontjába, t. i. *m*-be esik; ellenben az igen tág és rövid sípok — mint tudjuk — csak igen erős befuvásra szólamlanak meg és így ezen sípoknál a fentebb említett körülménynél fogva a csomó csakis *n*-hez közel fejlődhetik (2. ábra). Nézetemből tehát önként folyik a tapasztalattól igazolt azon nevezetes következtetés, hogy *bármely köbös síp az ugyanoly hosszuságú*



1. ábra.



2. ábra.

igen vékony síp alaphangjánál legfölebb egy oktávával, vagy ezen oktávánál igen csekélylyel mélyebb hangot képes kiadni, az álló hullámoknak a sípcső felső vége előtt terjedő, habár csekélyebb részeit is számításba vevén.

Hogy tehát valamely ajaksíp alaphangját meghatározhassuk, mindenekelőtt az álló hullám képzeleti részének hosszát (x) kell ismernünk. Azonban ezen képzeleti hullámrész hosszát számítás utján megállapítani teljes lehetetlen, miután oly tényezők ismeretét veszi igénybe, melyeknek habár szerepkörét az álló hullám alakulásában ismerjük ugyan, mindamellett azok mennyileges befolyását a léghullám képzeleti részének hosszára képletileg meg nem állapíthatjuk; ezen tényezőket az előbbi fejezet *a* és *b* alatti pontjaiban tanultuk ismerni. A képzeleti hullámrész hosszát valamely ajaksípra nézve tehát csakis gyakorlati uton, közelítőleg határozhatjuk meg, mire WERTHEIM empirikus képlete

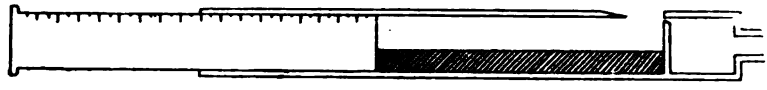
$$x = c\,(B+D)\left(1-\sqrt{\frac{s}{S}}+\sqrt{\frac{S}{s}}\right)$$

szolgálhat, mely kifejezésben B a síp szélességét, D a mélységét, s az ajaknyílás területét, S a síp keresztmetszetét és végre $c=0{\cdot}129$ állandó mennyiséget jelent.

Miután azonban a fentebb mondottak szerint az ajaknyilás magassága a síp hangjának magasságára semmi hatással nincsen, nemkülönben pedig a derékszögű átmetszetű sípoknál az ajaknyílás szélessége a sípcső szélességével mindenkor egyezni is szokott, iparkodtam e körülmények tekintetbevételével, önálló kutatással ezen képzeleti hullámrész, illetőleg tehát a síp kiigazított hosszára nézve magamnak tájékoztatást szerezni.

E czélból egy 40·5 *cm* hosszú, 3·5 *cm* mély és 3 *cm* széles sípot, egy e síp keresztmetszetével egyező és a sípcsőben ide-oda tolható, jól záró faoszloppal láttam el, melylyel mindenkor a síp hosszát, a sípcsőbe öntött higany segélyével pedig annak mélységét tetszőlegesen változtathattam. (3. ábra). E síp segélyével azután a hangok bizonyos sorát állítottam elő, a sípcső hosszát vagy mélységét az előbb említett módon addig változtatván míg ezen hangok igen pontosan hangolt egyéb sípok hangjaival teljesen meg nem egyeztek.* Ez az eljárás azután igen könnyen tette lehetővé a síp mélységének a hangmagasságra való befolyását megállapítani és pedig olyképen, hogy előbb az $n = \frac{c}{4(l+x)}$ képletből n, l és c ($34000\,cm\,sec^{-1}$) adott értékeiből x-et meghatároztam és azután utóbbit, hol a síp mélységé-

* E sípokat ANGSZTER J. jó hírnevű pécsi orgonaépítő műhelyéből szereztem be.



3. ábra.

hez, hol annak mensurájához stb. viszonyítottam. A következő táblázat a kisérleti sorozat eredményét mutatja be:

A hang neve	A rezgések száma	A sípcső hossza (*l*) *cm*-ben	A sípcső mélysége (*d*) *cm*-ben	A mensura nagysága	A kiszámított kiigazítás *s*	A kiszámított kiigazítás kifejezve *d* értékeiben	A síp mélységéből (*d*) és hosszából (*l*) kiszámított kiigazítás *s*
$C^{\sharp}$	279·7	26	3·5	0·135	4·39	1·254 *d*	4·39
D	296·3	26	2·6	0·100	2·62	1·008 *d*	2·78
$D^{\sharp}$	313·9	26	1·7	0·065	1·08	0·635 *d*	1·16
D	296·3	24	3·5	0·146	4·68	1·337 *d*	4·54
$D^{\sharp}$	313·9	24	2·7	0·112	3·08	1·141 *d*	3·10
E	332·6	24	1·8	0·075	1·55	0·878 *d*	1·49
$D^{\sharp}$	313·9	22·2	3·5	0·158	4·87	1·363 *d*	4·66
E	332·6	22·2	2·7	0·122	3·35	1·240 *d*	3·23
F	352·4	22·2	2	0·091	1·92	0·960 *d*	1·98
E	332·6	20·5	3·5	0·170	5·05	1·443 *d*	4·79
F	352·4	20·5	2·8	0·136	3·62	1·293 *d*	3·35
$F^{\sharp}$	373·4	20·5	2·1	0·101	2·26	1·076 *d*	2·28
B	470·4	13	3·5	0·269	5·07	1·448 *d*	5·32
H	498·3	13	2·9	0·223	4·06	1·400 *d*	4·25
e	528	13	2·2	0·169	3·09	1·410 *d*	3·00

E táblázat 3-ik és 6-ik rovataiban foglalt számadatok egybehasonlításától kitünik, hogy az *n*, *l* és *c* adatokból kiszámított *x* hosszabb sípokra nézve nagyobb értékű, mint rövidebb sípokra nézve; a 4-ik és 6-ik rovat ily egybevetése pedig kimutatja, hogy ugyanazon hosszuság mellett a síp mélységének növekedtével a kiigazítás is növekszik. De figyelmetessé tesz ezen táblázat egyszersmind ama körülményre is, hogy *tévedés a kiigazítást kizárólag csak a síp mélységéhez vagy mensurájához viszonyítani*; mert míg pl. a 26 *cm* hosszú és 2·6 *cm* mély sípra nézve a kiigazítás 2·62, addig a 13 *cm* hosszú és csak 2·2 *cm* mély sípra nézve a correctura 3·09, vagy míg pl. a 0·1 mensurának 2·62, addig a valamivel nagyobb 0·101 mensurának csak 2·26 kiigazítás felel meg. A táblázat 7-ik rovata a kiszámított *x* kiigazítást a síp mélységéhez viszonyítja, a mint pl. Cavaillé-Coll tette, de az itt foglalt adatokat ép azon okból, mert a kiigazítás nemcsak a síp mélységétől, hanem annak hosszától is függ, megbizhatlanok és igen ingadozók. Sikerült azonban a fönnebbi táblázat

adatainak egybevetése nyomán x számára oly kifejezést megállapítanom, mely az eddigieknél jóval pontosabb eredményeket ad. Ugyanis ha $x=1{\cdot}79\,d-0{\cdot}0721\,l$ kifejezésbe d helyére a síp mélységének és l a síp hosszának megfelelő méretszámokat tesszük, oly értékeket nyerünk, melyek a rezgésszámból és síp hosszából kiszámított kiigazítás értékeitől csak igen keveset térnek el, mint arról a 6-ik és 8-ik rovatban foglalt adatok egybehasonlításából könnyen meggyőződhetünk. Különben, hogy mennyire pontos és megbízható eredményre vezet a fentebbi kifejezés, egy még feltűnőbb példával akarom igazolni. Ugyanis határozzuk meg egyszer, hogy egy 228 *cm* hosszú és 12 *cm* mély síp, mely alap- és mely felhangokban szólalhat meg? Ha x fentebbi kifejezésében d helyébe 12-őt és l helyébe az előbb mondottak szerint mindenkor 228-annyiad részét tesszük, mint a hányadik felhangot keressük, majd pedig az x számára talált értékeket egymás után az $n=\frac{c}{4(l+x)}$ képletbe behelyettesítjük, az alábbi táblázat második rovatában foglalt számokkal kifejezett hangsort nyerjük.

A hang rendszáma	A kiszámított rezgésszám	A kisérletileg meghatározott rezgésszám
1	36·4	—
3	104·4	—
5	172·5	166
7	240·1	238
9	308·9	310
11	377·1	384
13	444·6	—
15	514·5	524
17	583·2	594

Ha már most ezen számokat König-nek ugyanezen síppal előállított hangoknak * kisérletileg meghatározott és a táblázat 3-ik rovatában közölt rezgésszámaival összehasonlítjuk, oly csekély eltéréseket tapasztalunk a megfelelő számadatok között, hogy azokat kizárólag csak a kisérleti és megfigyelési hibák határain belől esőknek tekinthetjük. Ily pontos eredményekhez sem Wertheim ** empirikus képlete sem Cavaillé-Coll gyakorlati szabálya nyomán még megközelítőleg sem jutunk. Megjegyzem még, hogy a 3-ik rovatban az alap, a 3-ik és 16-ik felhangra nézve a számadatok azért hiányoznak, mert König-nek nem sikerült, a sípba vezetett lég-

* Violle, Cours de Physique. Tome II. 1. 138.

** Wüllner, Lehrbuch der Exp. Physik. 3. Ausgabe I. Bd. pag. 610.

áram erősségének még oly óvatos szabályozása daczára sem, ezen partiális hangokat előállítania.

Az x kiigazítás számára talált fentebbi kifejezés még egy nevezetes körülményre tesz minket figyelmessé; arra t. i., hogy míg egyrészt a kiigazítás a $1{\cdot}79\,d$ maximumot soha sem érheti el, addig csak oly sípokra nézve tünik el a kiigazítás, melyekre nézve $1{\cdot}79\,d = 0{\cdot}0722\,l$, vagyis $l = 25{\cdot}1\,d$, más szóval: *csak az oly sípok hangmagasságának meghatározásánál maradhat el teljesen a mélységből eredő kiigazitás, melyek hossza legalább 25-ször fölülmulja a mélységöket.*

Ha a síp nyitott, akkor az alaphang magasságát $n = \frac{c}{2(l+x+y)}$ kifejezésből határozzuk meg, hol y a sípcső felső végére vonatkozó kiigazítást jelzi, melynek értékét mindenkor úgy határozzuk meg, hogy a sípot födöttté tévén, a különbséget keressük a födött síp hangja és a nyitott síp hangjának legközelebbi mélyebb oktávája között. E czélra a 3. ábrában lerajzolt sípot pontosan hangolt sípok segélyével chromatikusan calibráltam és a megfelelő hangokat az ide-oda tolható faoszlopra rávezettem. Azután több födött és szintén igen pontosan hangolt síp hangját megfigyelvén, a födőlapot elfűrészeltem, s ezzel nyitottá tettem és újra meghatároztam a calibrált síp segélyével nyert új hang rezgésszámait. A két rezgésszámból könnyen volt meghatározható y értéke. Ugyanis míg a födött sípra $n_1 = \frac{c}{4(l+x)}$, addig a nyitottra nézve $n_2 = \frac{c}{2(l+x+y)}$, miből következik, hogy $2n_1(l+x) = n_2(l+x+y)$ és ebből $y = \frac{(2n_1 - n_2)}{n_2}(l+x)$.

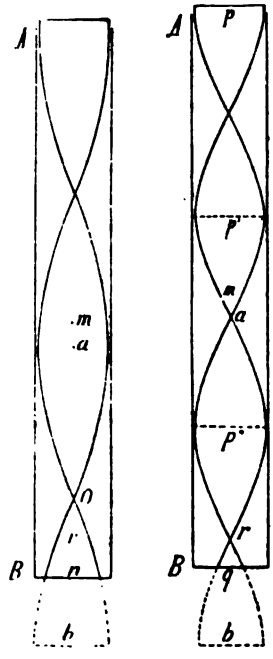
Ha tehát y kifejezésében n_1 és n_2 helyébe a fentebb közölt eljárás nyomán megfigyelt értékeket tesszük, y számára mindig az $(l+x)$ kiigazított hosszúsággal kifejezhető értéket fogunk nyerni. Igy pl. egy 25·2 *cm* hosszú és 3·9 *cm* mély födött sípot megszólaltatván, a $C\sharp$ hangot 279·9 rezgéssel nyertem. A födő eltávolítása után a c-nél valamivel magasabb, t. i. 536 rezgésből álló hangon szólalt meg. Igy tehát ez esetben $\frac{2n_1 - n_2}{n_2} = 0{\cdot}0444$. Két más ily kisérlet alapján y cœfficiensét 0·0381 és 0·040-nek találtam; tehát y értéke általában 0·041 $(l+x)$-nek vehető. Igy pl. számítsuk ki, hogy egy 233 *cm* hosszú és 12 *cm* mély nyitott síp 5-ik felhangjának hány rezgés felel meg. Ez esetben $x = 1{\cdot}79 \times 12 - 0{\cdot}0721 \times 46{\cdot}6 = 18{\cdot}13$, tehát $l+x = 251{\cdot}13$ és $y = 0{\cdot}041 \times 251{\cdot}13 = 10{\cdot}29$; ha már most $n = 5\,\frac{c}{2(l+x+y)}$ képletbe ezen értékeket helyettesítjük, lesz $n = 5\,\frac{34000}{2 \times 261{\cdot}42} = 325{\cdot}15$, mely érték Kőnig-nek ugyanazon síppal előállított hang kisérletileg meghatározott rezgésszámától (328) csak 2·85 rezgéssel tér el.*

---

* Violle, Cours de Physique l. c.

3. *A felhangok magassága és száma.* A midőn az ajaksíp alaphangján már megszólalt és a befuvás erősségét még tovább is fokozzuk, a síp hangja egy ideig változatlan marad, vagy csak igen csekély mértékben — legfeljebb egy secunddal — magasabbra hajtható, miután a már létesített álló hullám, az ajaknyílás helyén váltakozó sűrűsítések és ritkulások révén, a légszalag lökéseire ép oly szabályozó hatással van, mint akár a lágy nyelvű sípokban rezgő légoszlop magára a nyelvre.

Mihelyt azonban a befuvás már akkora erősséget ért el, hogy a légszalag ugyanannyi idő alatt kétszer annyi lökésre bomolhat föl, a síp azonnal alaphangjának oktaváján szólal meg. De miért épen az oktávában? Erre könnyű felelni, ha ismerjük az *a)* pont alatt mondottakat; t. i. hogy erősebb befuvásra nemcsak a lökések szaporodnak, hanem a sípcső alsó részében erősebb sűrítések és ritkulások is jönnek létre, mely körülmény egy ujabb és egyszersmind a sípcső fenekéhez közelebb eső csomó alakulását teszi lehetségessé és szükségessé.



4. ábra. 5. ábra.

Ha ugyanis a 4-ik ábrában lerajzolt és a síp alaphangjára vonatkozó álló hullámban a csomó *a*-ban létrejött, akkor ugyanazon síp csak azon egyetlenegy esetben szólalhat meg egyszersmind az oktávában is, hogy ha az ily hullám csomója *O*-ba, t. i. *ab* felezési pontjába esik, mert akár *O* fölé, akár *O* alá esnék az új csomó, mindig más hangot, még pedig az első esetben az oktávánál magasabb, az utóbbi esetben pedig mélyebb hangot nyernénk. Hogy ha pedig az oktáva csak úgy képződhetik, hogy a 2-ik csomó épen *O*-ba kerüljön, akkor az alaphangra legközelebb más új, magasabb zönge egyátalában nem is következhetik, mint épen az oktáva; ugyanis, ha a síp 2-ik hangnak, egy az oktávánál magasabb hangot mutatna be, akkor a 2-ik csomónak okvetlenül *O*-nál magasabbra is kellene jutnia és így a síp fenekén alakuló sűrűsítési és ritkulási phasisokat összehasonlítva, úgy vennők észre, hogy míg gyengébb megfuvásra az oktávánál magasabb hangot nyerünk, maga az oktáva csak ennél erősebb befuvásra jelennék meg, mi úgy a tapasztalattal, mint azon indokolt nézetemmel, homlokegyenest ellenkezik, hogy erősebb befuvásra jelentékenyebb ritkulási és sűrűsítési állapotok is jönnek létre az ajaknyilás közelében és ennek

megfelelőleg a csomóknak is kell, hogy közelebb vándoroljanak a síp fenekéhez. És ily módon bebizonyítható az is, hogy a sípban 2-ik hangnak az alaphang oktávájánál mélyebb hang sem jelentkezhetik.

Ha most még inkább fokozzuk a befuvás erősségét, illetőleg még nagyobb számú lökésekre bontjuk föl a légszalagot, az előbbihez egészen hasonló okoskodás szerint kimutatható, hogy az oktávát ismét csak oly hang követheti, melynek álló hullámában a síp alapjától számított legelső csomója *ab* (4. ábra) félhullámnak $^1/_3$ részébe, t. i. *r*-be esik, ezen hang pedig nem más, mint a síp alaphangjának duodecimja; ezt a hangot pedig még erősebb befuvás esetében az alaphang 2-ik oktávája fogja követni, stb. *Általában tehát minden nyilt ajaksípban folytonosan erősebben gyakorolt befuvásra a hangok olyan sorát csalhatjuk elő, melynek tagjai rezgésszámra nézve úgy állanak egymáshoz, mint a közönséges egész számok.* Hasonló módon bizonyíthatjuk, hogy a födött sípok csak a páratlan számok viszonyában álló hangokban szólalhatnak meg.

A felhangok képződésére vonatkozólag eddig előadott nézetemből négy nevezetes következtetés származtatható le:

a) Egy és ugyanazon síp minden hangjára nézve a képzeleti hullámrész hossza állandó mennyiség. Igaz ugyan, hogy az x kiigazítás számára talált kifejezés az állítást czáfolni látszik, a mennyiben a kiigazítást nemcsak a síp mélységétől, hanem a hosszától, illetőleg a felhangokra nézve a hullámhossznak megfelelő hányadrészétől függőnek jelzi, a mint ezt a többi közt a fennebb említett 2·28 *m* hosszú és 0·12 *m* mély sípban egymásután előállított felhangok sorozata is igazolja, mely hangok — habár csak igen csekély különbséggel — mind magasabbak a megfelelő harmonikus felhangoknál, úgy hogy a 7-ik felhang kb. már egy secunddal magasabb a síp 7-ik harmonikus felhangjánál, minek megfelelően valamennyi ezen felhangra nézve a képzeleti hullámrészt is csekélylyel rövidebbnek találjuk az alaphangra nézve meghatározott ezen hullámrésznél. De ha meggondoljuk, hogy az alaphangot igen könnyen sikerül kellő erősségű befuvásra egy secunddal magasabbra emelni (felhajszolni), míg a felhangokra nézve ezt keresztül nem vihetjük, a mennyiben csakhamar a legközelebbi felhangra átcsapnak, König sípjánál a 7-iknek megszólalt felhangot szintén csak a harmonikus felhangjával teljesen egybeesőnek mondhatjuk.

b) Különböző hosszúságú sípokra nézve is, melyeknek ajakberendezése és keresztmetszete teljesen megegyező, a képzeleti hullámrész hossza is teljesen ugyanaz. Ha pl. az 5. ábrában lerajzolt sípot, mely egyszersmind az alaphang duodecimáját kifejező rezgési állapotot is szemlélteti, *p'*-nél átmetszük, *p'q* sípot nyerjük, mely az abba rajzolt hullám képe szerint épen most alaphangjának oktávájában szólalt meg és mely hangra nézve a képzeleti hullámrész *qb* ugyanaz, mint az egész *pq* síp bármely hangjára

nézve; ha pedig a sípot p''-nél vágjuk el, $p''q$ sípot alaphangjában megszólamolva nyerjük ugyanazon qb képzeleti hullámrészszel. Ezen $p'q$, $p''q$ . . . stb. sípokat pedig akár alaphangjuk, akár pedig valamely felhangjukra vonatkozó hullámnak egyik rezgési maximumán átszelvén és új meg új sípokra bontván, ezekre is hasonló módon indokolhatjuk a képzeleti hullámrészeknek egymás közti egyenlőségét. Egyszerű magyarázatát sikerült tehát adnom ama tüneménynek, melyre nézve WERTHEIM már régebben kisérleti úton, de minden közelebbi megokolás nélkül számbeli értékeket megállapított, midőn ugyanazon sípfejre egymásután alkalmazott különböző hosszúságú, de ugyanazon átmérőjű sípcsövek mindegyikére nézve ugyanazon hosszuságú képzeleti hullámrészt számított ki.

c) Minden sípra nézve egyszersmind meg van határozva a felléphető felhangok száma is.

Ugyanis legyen l a síp hossza és x az ezen síphoz tartozó képzeleti hullámrész, akkor az alaphangnak megfelelő álló hullám hossza $\lambda = l + x$, és minden felhangra nézve $\frac{\lambda}{m} = \frac{l+x}{m}$, hol m bármely egész számot jelent. Miután pedig $\frac{\lambda}{2m}$-nek mindig nagyobbnak kell lennie x-nél, mert ellenkező esetben az álló hullámot nem képzeleti rezgési maximum, hanem képzeleti csomó jellemezné, következik, hogy $\frac{l+x}{2m} > x$-nél legyen, illetőleg m értékét csak úgy választhatjuk, hogy $m < \frac{l+x}{2x}$-nél legyen; miután pedig x minden sípra nézve annak mélységéből és hosszából meghatározható, evvel együtt a felhangok száma is meg van állapítva.

A fentebbi kifejezésből látjuk, hogy valamely sípban annál több felhangot lehet előállítani, minél kisebb mélységű, míg a mélyebb sípokban a felhangok száma nagyon is meg van szorítva. Igy pl. egy 30 *cm* hosszú és 4 *cm* mély síp csak legfölebb $m < \frac{30 + 1{\cdot}79 \times 4 - 0{\cdot}0721 \times 30}{2(1{\cdot}79 \times 4 - 0{\cdot}0721 \times 30)} = 3{\cdot}5$, azaz 3 felhangot adhat, míg ha ugyanazon hosszúsággal a síp mélysége csak 2 *cm*-nyi, már $m < \frac{30 + 1{\cdot}79 \times 2 - 0{\cdot}0721 \times 30}{2(1{\cdot}79 \times 2 - 0{\cdot}0721 \times 30)} = 11{\cdot}06$, azaz már 11 félhang is támadhat.

A köbös sípokra nézve pedig hasonló módon találjuk, hogy a felhangok száma $m < \frac{l+x}{x}$ kifejezéssel van meghatározva, hol m természetesen csak páratlan egész számot jelenthet.

d) Hogy egy köbös síp csak igen erős befuvásra szólalhat meg, és hogy az ezen hangnak megfelelő álló hullám rezgési csomója csak közel a sípcső fenekéhez foglalhat helyet, más szóval, hogy a köbös síp az ugyanoly hosz-

szúságú szűkebb sípnak még mélyebb oktávájában is megszólalhat, szintén az 5-ik ábrából nyerheti magyarázatát, a mennyiben t. i. a *pq* sípot *p''*-nél vagy egy még magasabb felhangjának a sípcső fenekéhez legközelebb álló rezgési maximumán képzelvén átszelve, a visszamaradt hullámrész közvetlenül szemlélteti az ekkép megrövidített (köbös) síp alaphangjának megfelelő hullamalakot.

Helmholtz a sípok hangtüneményeit a resonantiából iparkodik kimagyarázni. Én azonban a sípokban befuvás által előidézett hangjelenségek és ezen sípcsövek resonantia tüneményei közti összefüggést korán sem tartom oly szorosnak, mint azt Helmholtz fölveszi — még pedig két oknál fogva is:

Helmholtz a sípok befuvással ébresztett hangjait, vagyis a sípok sajátos hangjait legerősebben resonált hangoknak jelzi. Már pedig egy és ugyanazon sípcső a legkülönbözőbb hangokat ugyanazon erősséggel resonáltatja, miután a többi között a resonantia erőssége a hangvilla azon oldalfelületeinek terjedelmétől is függ, melylyel a sípcső nyilásához közelítünk. Különben, hogy egy és ugyanazon sípcsőben a legkülönbözőbb alaphangokat és nem kizárólag csak egy a sípcsövet illető sajátos hangot idézhetünk elő, már onnét is kitünik, hogy egy és ugyanazon lágy nyelvű sípban két — még pedig magasságra igen jelentékenyen eltérő — hangot állíthatunk elő a szerint, a mint azt fuvás vagy szívás által megszólaltatjuk. Mindkét esetben pedig a sípcsőben foglalt levegő álló rezgésbe kerül és egymástól teljesen elütő alaphangot szolgáltatott. Sőt ha egy és ugyanazon sípcsőre különböző lágy nyelveket alkalmazunk, a legkülönbözőbb hangoknak megfelelő hullámalakokra idomíthatjuk a sípcsőben foglalt légoszlopot is. Tehát mint látjuk, kizárólag csak egy, a légoszlop alakjától és terjedelmétől meghatározott hang nem létezik, hanem a síp mindannyiszor más és más alaphangot ad, valahányszor légtömege azt rezgésre indító más és más külső okkal egybevágó hullámzásba kerül; *a sípok befuvás által előidézett alaphangja csakis egy lehetséges ezen számtalan alaphangok közül.*

Helmholtz szerint csak a vékonyabb sípok felhangjai állanak harmonikus viszonyban az alaphanghoz, a terjedelmesebb keresztmetszetű sípok felhangjai pedig a harmonikus fehangoktól többé-kevésbbé elütnek; innét magyarázza aztán Helmholtz, hogy miért oly szegény a terjedelmesebb keresztmetszetű sípok hangjellege felhangokban. Erre nézve pedig észrevételem, hogy a fentebbiek nyomán nagyon könnyen érthető okokból marad az ily sípok hangjellege üres és nem szólalhatnak meg felhangjaikban, mert azok — mint sikerült kimutatnom — egyáltalán nem is léteznek. Oly sípokban pedig, melyek kisebb keresztmetszet mellett a felhangok bizonyos sorozatát adják, a kellő erősségü befuvásra előállított (felhajszolt) alaphang mellett a felhangok is megszólalnak, a mint ezt különben

Helmholtz * maga is beismeri és a minek okáról a fönnebbi *a)* pontban kellően be is számoltam.

Dischka Győző.

*

A víz- és gázvezeték elektromos áramáról.**

Maréchal, a párisi közvilágítás mérnöke a *La Nature* című népszerű folyóiratban a következő érdekes tapasztalatát adja elő: A gáz- és vízvezeték két csapja közé kapcsolt galvanometer áramot jelez. Az áram meglepően állandónak mutatkozott, a mennyiben a galvanometer kitérített tűjén 1 év leforgása alatt naponként alig 1—2 foknyi ingadozás volt észrevehető. A két vezeték között a potential-különbség 0,25 *volt*.

Maréchal úgy vélekedett, hogy a két vezeték mintegy igen nagy felületű galvánelemet alkot, melynek pozitiv sarka a vízvezeték csőhálózata, negativ elektrom-indítója a gázvezeték, a talaj pedig az elem másodrendű vezetője. Az áram eredetét a két vezeték chemiailag különböző állapotából törekszik megmagyarázni.

A dolgot elég érdekesnek találtam arra, hogy magam is megvizsgáljam. A két vezeték között tényleg találtam áramot, mely Maréchal tapasztalatával egyezőleg, elég állandó volt s a vízvezeték alkotta a pozitiv sarkot. Előzetes méréseim szerint a potentialkülömbség 0,077—0,081 *volt* között ingadozik s az elektromos forrás ellenállása igen közel 3 *ohm*. A különböző időben ismételt mérések alig $^1/_{100}$-résznyi eltéréseket árultak el.

Az áram márczius elején — hideg, száraz időben — igen állandónak mutatkozott; de később, a mikor az idő enyhére s nagyon esősre fordult, meglehetősen ingadozott. Esti 6—8 óra között mindig hullámzik az áram intenzitása olyannyira, hogy néha egy-egy pillanatra a kitérés majdnem 0-ra száll alá.

A méréseket majd ismert állandójú galvanometerrel, majd pedig az általánosan ismeretes compensatio-módszerekkel végeztem. Az ellenállás mérésére a Mancz módszerét alkalmaztam; eredményeit azonban mindenkor galvanometeres méréssel is ellenőriztem. A kétféle eredetű adatok igen jól egyeztek.

A vezetékek ezen árama számbamenő chemiai munka végzésére is felhasználható. Ólomacetat, rézgálicz és ezüst nitrát telített oldataiból — természetesen mindenkor az illető fémekből vett elektródok között — kiválasztottam e fémeket. Gyenge lévén az áram, a fémek szép kristályosan váltak ki; különösen az «ólomfa» igen szép, nagy levelű volt. — Márczius

---

* Helmholtz, Tonempfindungen. 3-te Ausgabe, pag. 151.

** Előterjesztve a f. é. április hó 4-én tartott rendes ülésen

23-án 78 600 *mp* alatt 0,7721 *gr* ezüst vált ki a gázvezetékkel közlekedő platina tégely falán, mely tömegből az áram átlagos intenzitása $8{,}787.10^{-6}$ *ampère*-nek adódik ki.

Az elektromosság ezen különös forrása a legkedvezőbben kihasználva, azaz 3 *ohm*-nyi ellenállással zárva, 24 óra alatt mintegy 8,5 méterkilogramnyi munkát szállít.

Ha az áramzárás helyétől távolabb levő csapok között vezető összeköttetés állíttatott elő, a galvanometer az áram tetemes gyengülését jelzé; annál nagyobbat, mennél közelebb történt az elágaztatás és mennél kisebb volt a közbekapcsolt ellenállás. Hosszabb időn keresztül tartó rövid zárlat a polarisatio gyenge nyomaira utalt, mely azonban az elektrom-indító erőnek 0,01-részénél mindenesetre kisebb volt.

Mi már most ennek az áramnak az eredete? Legegyszerűbbnek tetszik Maréchal-lal azt feltételezni, hogy óriási felületű galvánelemmel van dolgunk, melynek áramát a vashálózat felületén végbemenő chemiai folyamatok szolgáltatják. Mindkét hálózat vasból van ugyan, de az egyik a benne áramló víznek, a másik pedig a világító gáznak hatása alatt, a mi elég ok arra, hogy chemiailag igen különbözőképen viselkedjenek. Ebben az irányban kísérletet kell tenni a vezetékből kivett kisebb csődarabokkal.

De addig is, míg ez a kisérlet megtétetnék, igen kivánatosnak tartottam, hogy ezt az áramot lehetőleg sok helyen megfigyeljék. Ez okból a társulat több tagjához fordultam azzal a kéréssel, hogy ennek az ingyen forrásnak áramát kutassák s ha van, meg is mérjék.

Élénk tudományos érdeklődésnek jele, hogy a kinek csak módjában volt, a legrövidebb idő alatt közlé velem kisérleteinek eredményeit.

Elsőnek Dohnányi Frigyes tagtárs úr, pozsonyi főgymn. tanár felelete érkezett, a felszólítás elküldése után negyednapra. Szives beleegyezésével közlöm levelének a tárgyra vonatkozó főbb részeit:

«... Valóban, igen érdekes tünemény! Gaugin-féle galvanometeremet bekapcsoltam a víz- és gázvezeték közé és meglepetésemre állandó áramot kaptam, mely a vízvezetékből a galvanometeren át a gázvezeték felé keringett. A galvanometer 2°-nyi eltérést mutatott. Minthogy a galvanometer állandóját 11 év előtt vízbontó készülék segítségével 16 észlelés alapján meghatároztam, tudtam, hogy ez a kitérés 0,016 *ampère*nyi áramot jelez. A busszola fél fokokra van felosztva, s $^1/_{10}$ fok becsléssel elég biztosan meghatározható. Az állandót jó lenne újra meghatározni, mert hisz a H megváltozhatott; de tájékoztató adatnak ez is elég megbizható.»

Ezután nagy gonddal végzett mérések végeredményeként azt közli, hogy a kisérletei helyén a vezetékek potential-különbsége 0,0478 *volt*, a belső ellenállás pedig 2,95 *ohm*.

Nyomban Dohnányi úr levele után Molnár József tagtárs úr értesítése

érkezett kezemhez. A győri főreáliskola épületében ugyanarra az eredményre jutott: áram van, iránya a vízvezetéktől a gázvezeték felé. Nem bizván meg eléggé galvanometerében, mely tényleg csak tükörleolvasással lenne ezekre a mérésekre alkalmas, réz-voltameterrel végzett méréseket. Az igen nagy körültekintéssel végzett kisérletsorozatok arra vallanak, hogy eredményei a két előbbitől alig térnek el.

Ugyanoly eredményekre jutott Ábrahám János tagtárs úr is, ki a győri Szt.-Benedek-rendi főgymnasium laboratoriumában kisérletezett.

Dischka Győző tagtárs úr a pécsi főreáliskola physikai laboratoriumában áramot nem talált, de a chemiai laboratoriumban igen; a vízvezeték pozitiv. A physikai szertárban a gázvezeték a vas-traverzekre van rá erősítve: ezt mint valószinű zavaró körülményt hozza fel t. tagtársunk, a mi csakugyan rövid zárlat lehetőségére utal.

Fiumében Dr Salcher Péter tagtárs úr a cs. és kir. tengerészeti akadémiában szintén konstatálta az áramot, vízvezetéktől a gázvezeték felé. Riegler Sándor tagtárs úrral együtt méréseket fognak tenni.

Igen érdekes eredményeket küldött Honor István tagtárs úr Szegedről Beküldött dolgozatának lényeges része a következő:

1. A reáliskola laboratoriumában végzett kisérletek.

Új épületben vagyunk és a vízvezetékünk ólomcsöveit e héten rakták le s hozták összeköttetésbe az u. n. kisebb vízvezetékkel, mely a város északkeleti részét látja el. Vezetékünk elkészült, de a viztartó gyakran megtagadja a szolgálatot s így a hónak több olyan napja van, melyben vezetékünk nem ád vizet, azonkívül a nap bizonyos óráiban szintén hasztalan várjuk a vizet. A gázcsövek lerakása most van folyamatban; a második és első emelet-, földszint- és pinczehelyiségben a csövek már a falba vannak rakva, de a földbe rakott csőhálózattal még nincsenek összeköttetésben; a földszinten elhelyezett vegytani helyiségek pedig az épület összes vezetékével még nincsenek összeköttetésben. Így állván a dolgok, kezdetben nem is mertem arra gondolni, hogy a kivánt kisérleteket az intézet helyiségében, nevezetesen a physikai laboratoriumban végrehajthassam és már arról tanakodtam, hogy mely épületek lennének a varosban legalkalmasabbak a kisérletek megejtésére, midőn mégis a laboratoriumban levő vízvezetéki csapot a multiplicatornak egyik, a gázvezető csőbe illesztett bütykőt pedig a másik sarkával elszigetelt rézsodrony segélyével kötöttem össze s nagy meglepetésemre a tűnek oly rohamos kitérését észleltem, mely a selyemgubószálat majd elszakította, míg végre hosszas lengés után a tű nyúgalomba tért s 70 (hetven) foknál megállapodott. Ez időben, márczius 28-án egész napon a vízvezeték csapja nyitva állott, de vizet nem adott; a gázvezetékben gáz még csak két hó mulva lesz, de csőhálózatunk még a földbe helyezett csővezettel nincs is összeköttetésben s így a tünemények lánczo-

lata, melyet elsorolandó vagyok, a Maréchal-féle s a titkár úr kisérletezéseitől annyiban eltérő, hogy azoknál működésben levő víz- és gázvezeték, nálam pedig még működésben nem lévő víz- és gázvezeték szolgál eszközül és alapul. Az áram a vízvezetékből megy a gázvezeték felé.

A rendelkezésre álló igen érzékeny multiplicator állandója nem levén pontosan meghatározva, az intenzitás megmérésére a szintén birtokban levő tangens-galvanometert kellett használnom, melynek állandóját durranó gáz-voltaméterrel 0,0919 C. G. S. értékűnek találtam. Minthogy a galvanometer tűje 2°-nyi kitérést adott, a vezetékek áramának intezitása 0,034 *amp.*

A Hughes-féle mikrofont becsatoltam egy régi szerkezetű Siemens-féle telefonnal együtt az áramkörbe s a mikrofonba mint hangfelvevőbe; hegedűvel előidézett hangokat négy szobán keresztül huzott vezetéken épen úgy hallottam, mint akkor, midőn a mikrofon és telefon oly áramkörbe csatoltatott, mely tíz voltos lámpát izzásba hoz.

A vegytani teremben, hol a mondottak szerint, a négy szobában befalazott gázvezeték még nincs összeköttetésben az egész épület gázvezetékével, a már emlitett multiplicator tűje csak 25° kitérést mutatott.

Vegybontást is végeztem az árammal és pedig elektrodokul tiszta ólom lapokat, elektrolit gyanánt pedig ólomacetat vizes oldatát használtam s a negativ elektrod tíz óra alatt szabad szemmel látható váladékot mutatott.

A telegraf írókészülékét az áramkörbe iktatva, a patkókat gyengén mágnesítve találtam.

A kisérletek márcz. 28—31. napjain történtek s daczára annak, hogy 29-én az esti órákban Szeged fölött mennydörgés- és villámlással egybekötött zápor vonult át, a tű eltérésében változás nem mutatkozott.

2. *A város különböző pontjain végrehajtott kisérletek.*

a) A kir. tábla palotájának vezetékei között a tű semmi eltérést sem mutatott. Itt mindkét vezeték vascsövekből van lerakva.

b) Egy magánházban szintén nem volt eltérés; itt is mindkét vezeték csövezetének vas az anyaga.

c) A Tisza-szálló saját elkülönített vízvezetékkel bir, melyet az udvarban levő artézi kút táplál; csövezete ólom. A gázvezeték városi. Itt a multiplicator eltérése 36°. A vízvezeték csapja pozitiv.

d) A városházán kétfelé vízvezeték van, a mennyiben a városi vizvezetékből a pinczehelyiségben felállított viztartóba ólomcsövön gyűjtik a vizet. E helyről a padláson elhelyezett víztartóba nyomják fel s onnan jut el az épület összes ólomcsöveibe. Az utóbbi ólomcsövezet a nagy vízvezetékkel nincs összekötve.

A nagy vezetéken a vízvezetéket pozitivnek, a kitérést 70 foknak, szóval egészen olyannak találtam, mint a reáliskola csövezeténél, a mi azt bizonyítja, hogy az áramhoz a csőben levő víz- és gáznak semmi köze.

A kis vezetéken az elhajlás iránya ugyanaz, de a kitérés csak 5°.

e) A sváb-konviktusban az irány ismét ugyanaz, a kitérés pedig 6°, noha vezetéke a nagy vízvezetékhez közlekedik, de a csőhálózat csak kis részben ólom.

f) A távirdaépületben, értesülésem szerint, szintén tettek kisérletet s az eltérést 50 fokúnak találták — saját galvanometerükön.

A legtöbb helyre kiterjedő kisérletezésről dr. KÁROLY IRÉN tagtárs úr küldött be értesítést Nagy-Váradról. Igen sok helyen tett mérései arra vallanak, hogy egy és ugyanazon a helyen a potential-különbség állandó, de helyről-helyre változik és pedig nemcsak értékére, hanem irányára nézve is. A gymnasiumban a gázvezeték pozitiv, a vele szemben levő utczák házaiban ellenben negativ. A gázgyárban a gázvezeték az egyik szobában pozitiv, a szomszéd szobában pedig állandóan negativ. Erről azonban utólag kideríttette t. tagtársunk, hogy vezetéke az előbbiétől elütő. Potentiált három helyen mért; az egyik helyen 0,434 *volt*, a másodikon 0,360 *volt*, a harmadikon pedig 0,25 *volt* a két vezeték potential-különbségének az értéke.

Dr. PFEIFFER PÉTER tagtárs úr Kolozsvárott tett megfigyeléseket, az egyetemi chemiai intézet vezetékén. Áramot talált, mely a vízvezetéktől a gázvezeték felé tart. A potential-különbség a mérés helyén 0,01 *volt*nál kisebbnek mutatkozott.* Az áramot a physikai intézetben is megtalálta, melynek vizvezetéke a nagy vezetékkel nincsen közlekedésben.

Aradról FÉNYES DEZSŐ tagtárs úr küldött adatokat. Minthogy a város vízvezetéke még nem kész, az arad-csanádi vasút palotájának vízvezetékén s a városi gázvezetéken kisérletezett. Arra az eredményre jutott, hogy a vízvezeték a pozitiv sark; a potential-különbség 0,095 *volt*, a belső ellenállás 1,39 *ohm*.

Dr SZEKERES KÁLMÁN a soproni főreáliskola épületében nem talált vezetéki áramot. Más helyütt teendő méréseket helyez kilátásba.

SZONTAGH GUSZTÁV tagtárs úr, a ki MARÉCHAL hivatkozott czikkére figyelmeztetni szives volt, még nem kisérletezhetett, mert a brassói főreáliskola szertárában, melynek ő az őre, a vízvezeték még nincsen bevezetve.

Végre még néhány adat Budapest különböző helyeiről. Dr KOVÁCS JÁNOS a budai Pædagogiumban igen gyenge potential-különbséget talál: a gázvezeték pozitiv. A budai főgymnasium épületében MIALOVICS MÓR tagtárs úr körülbelől 0,02 *v.* potential-különbséget talált; a gázvezeték pozitiv.

A várbeli felsőbb leányiskola épületében GRUBER NÁNDOR áramot nem talált. A VI. ker. állami főreáliskolában BALOGH MÓR t. társ úr kisérletez;

---

* A forrás ellenállását a velem közölt adatokból 1—2 ohm közé esőnek becsülöm. *B. G.*

áram van a gázvezeték pozitiv. A földmivelési miniszterium palotájában KALECSINSZKY SÁNDOR t. társ úr gyenge áramot talált; iránya gáz-víz. Az egyetem physikai-intézetében nincsen áram.

Az összes itt közölt kisérletezésekre vonatkozólag megjegyzendő, hogy aránylag igen rövid időközben, kb. 10 napon belül, egy időben végeztettek s az összes megfigyelők — magamat is beleértve — méréseiket csak előleges tájékozódás czéljából végezték s adataikat csak közelítóknek tekintik.

Az esetek többségében az áram egyformán jelentkezik; iránya ugyanaz (t. i. a víz-gáz) s a forrás ellenállása egyrendű mennyiség; sőt a pozsonyi s a budapesti mérésekben szinte meglepően egyező. Tekintettel arra, hogy az elektrolitikusan vezető közegbe merülő elsőrendű vezetők között, ha felületök igen nagy, az ellenállás csupán csak a közeg ellenállásától függ, az utóbbi mérések eredményét csakugyan úgy lehetne tekinteni, mint a talaj vezetőképességét jellemző állandót, s az áramot MARÉCHAL szerint a vezetékek alkotta elemnek tulajdonítani. Igaz ugyan, hogy a nagy hálózatok egy anyagból, t. i. vasból vannak, de az egyik a benne áramló víznek, a másik pedig a gáznak hatása alatt lévén; ezek az anyagok a csövezet falait meglehetősen áthatják, a mi elég ok chemiailag különböző viselkedésökre. Ámde a szegedi, az aradi és a kolozsvári észlelések tanusága szerint a nagy vezetékkel egyáltalában nem közlekedő, egyetlen egy épületre szorítkozó, tehát aránylag kis terjedelmű vízvezetékek is adnak a nagyobb kiterjedésű gázvezeték felé áramot, akkor is, ha vezetéki czélokra még nem is használtattak. Ez esetben tehát tartalmuknak imént feltételezett hatása még nem lehetett. De talán épen az ily körülmények között létrejövő áramok magyarázhatók meg a legkönnyebben. Hiszen a közösen befalazott két csőhálózat (kivált ha az egyik vas, a másik pedig ólom) igen jól tekinthető együtt oly galvánelemnek, melyben a csöveket beburkoló vakolat (lassanként átalakuló mészsók keveréke) a hálózatok felületén chemiai folyamatokat indít, melyek a galvánáramot létrehozzák. Sőt igen valószínűnek látszik, hogy a nagy vezetékek között észlelt áramok is így jönnek létre. Hiszen alig lehetséges, hogy az egymás mellett futó, gyakran kereszteződő csőrendszerek helyenként fémileg ne érintkezzenek; sok esetben az épületek vas bordáihoz kötik a kétféle vezetéket s így az áramok, melyeket mértünk, s melyekkel fémeket választottunk ki, a nagy vezetékeknek csak igen kis kiterjedésű részén végbemenő chemiai folyamatokból táplálkoznának.

A kérdés tisztázása végett talajba, vakolatba ágyazott csődarabokból összeállított elemekkel kell kisérletezni. Kivánatos továbbá, hogy a vezetéket, a melyből az áramot veszszük, a mennyire csak lehetséges, részletesen leírjuk. Ismervén a csövezet anyagát, kiterjedését, a burkolat minősé-

gét — különösen az áram elvezetésének közelében — könnyebben fogjuk megérthetni és magyarázhatni a lemért állandókat.

Reménylem, hogy az ezentúl is közösen, lehetőleg sok helyen tett észlelések biztos feleletet adnak a szóban forgó kérdésre, melyre nézve egyelőre csupán többé-kevésbbé valószínű gyanításokra vagyunk utalva.

Bartoniek Géza.

TÁRSULATI ÜGYEK.

Értesítő a választmány üléseiről.

Első ülés, április hó 4-én.

1. *A Math. Phys. Társ. harmadik közgyűlése.* Br. Eötvös L. elnök az ülést megnyitván, a f. é. közgyűlésre vonatkozólag tesz előterjesztést. Minthogy a választmánynak 1894 október hó 18-án tartott ülésén hozott határozata szerint a harmadik közgyűlés Szombathelyen lesz megtartandó, idejére nézve az ottani tagtársakkal értekezett. Előzetes megállapodás az, hogy a közgyűlés április hó 29- és 30-dik napján tartassék meg. Ezen terminus mellett az szól, hogy 28-ka vasárnapra esik, május 1-én pedig iskolai szünet van s így teljes 4 nap áll rendelkezésre. Ellene szól azonban az, hogy ez időben a tagtársak egy része — a M. T. Akadémia nagy gyűlését megelőző fontos ülések miatt — nem távozhat el Budapestről; május második felében pedig kezdetöket veszik az érettségi vizsgálatok, a mi a tagtársak még nagyobb számát köti helyhez. Másrészt arról értesül, hogy szombathelyi tagtársaink, kik a közgyűlés rendezésével járó nagy terhet magukra vették, igen szivesen vennék, ha a közgyűlés későbbre, esetleg őszre elhalasztatnék. Mindezeket megfontolva, azt ajánlja, hogy az április 28—29-ki terminust csak mint esetlegest vegyük kilátásba, végleges határozatot a legközelebb megtartandó ülésnek tartván fen. A javaslathoz a választmány egyhangúlag hozzájárul.

2. *A társulat első mathematikai tanuló-versenye.* Ügyvivő titkár hivatalos jelentést tesz az első mathematikai tanuló-verseny eredményéről. A választmány örvendetes tudomást vesz az eredményről s azt határozza, hogy az az elismerés, melylyel elnök a díjak kiosztásakor a verseny győzteseinek VIII. osztálybeli mathematika tanárairól megemlékezett, a választmány jegyzőkönyvében is megörökíttessék. E szerint a Math. Phys. Társulat választmánya Winter József losonczi áll. főgymn. tanárnak, társulatunk tagjának, továbbá Ellend József sárospataki ev. ref. főgymn. tanárnak sikeres működésökért elismerést és köszönetet szavaz, mely határozatról a

nevezett urak jegyzőkönyvi kivonattal értesítendők. A határozat meghozatala után elnök közli a választmánynyal, hogy egy emlékérmet rendelt meg, melyet úgy a verseny győzteseinek, mint VIII. osztálybeli mathematika tanáraiknak kiván kiadatni; az éremnek az legyen a rendeltetése, hogy a versenyen elért sikernek állandó emlékét megőrizze. Az érem metszésének és veretésének költségeit ő maga kívánja fedözni s csak azt sajnálja, hogy az érem még nem készült el. A választmány legnagyobb örömmel és hálával fogadja az elnök ajánlatát.

A választmány felhatalmazza az ügyvivő titkárt a f. é. szeptember hó elején megtartandó *második mathematikai tanuló-verseny* előkészítésére.

3. Elnök bemutatja dr. Dobszay Antal pécsi kanonok és egyházmegyei főesperes úr, tagtársunk levelét, melynek kiséretében társulatunknak 100 arany-koronás értékpapirt, szelvényivével együtt küldött. Elnök indítványozza, hogy a választmány nagys. és ft. dr. Dobszay Antal kanonok úrnak, mélyen tisztelt tagtársunknak, ki áldozó papságának 50 éves fordulóját sokfelé kiterjedő jótékonysággal ünnepelte meg s életének ezen nagy napján társulatunkra is gondolt, a küldött nagylelkű adományért hálás köszönetet mondjon. Az indítvány éljenzéssel elfogadtatott. Az adomány az alaptőkéhez csatoltatik; kamatai a rendes bevételeket gyarapítják.

4. Schmidt Ágoston alelnök jelenti, hogy a nmélt. vallás- és közoktatásügyi miniszterium megbizásából a milléniumi kiállításra összeállítandó physikai normális gyűjtemény költségeire megajánlott összegnek első részleteül 2000 frt kiutalványoztatott. A pénztárnok utasíttatott az összeg átvételére. Felhasználásáról az elnök intézkedik.

5. Végül az új tagokul ajánlottak a Mathematikai és Physikai Társulat rendes tagjainak megválasztattak.

Második ülés, április 18-án.

Elnök felolvastatja a szombathelyi tagtársak egy átiratát, mely így hangzik:

Tekintetes Választmány!

A tek. választmány szives elhatározásának eredménye ama határozat, mely szerint a Math. Phys. Társulat ez évi közgyülésének színhelye Szombathely legyen. Alulirottak, kiknek meghivására a tek. választmány e határozatát hozta, azon tiszteletteljes kéréssel járulunk a tek. választmány elé, hogy a rendes közgyülés megtartásának idejét szeptember hó végére elhalasztani sziveskedjék. A mellett, hogy vidékünkön az őszi időjárás a legmegbízhatóbb, a főokot eme kérelmünk előterjesztésére az adja, hogy Szombathelyen, illetve Ikervárott egy nagyobb szabású elektromos mű

létesítése van folyamatban, melynek megtekintése a közgyűlés egyik igen érdekes pontja lehetne.

Tiszteletteljes kérésünket megújítva, vagyunk szives üdvözlettel

Szombathelyen, 1895 április 8.

a társulat hű tagjai

Dr. Kunc Adolf prælatus. *Dr. Edelmann Sebő.* *Módly Krizsó.*

A választmány több tagjának egyértelmű nyilatkozata szerint a szombathelyi tagtárs urak kívánságának teljesítése csak annyiban eshetnék kifogás alá, hogy az alapszabályok a közgyűlés idejéül husvét táját határozzák meg; ámde az alapszabályok emez intézkedését nem tartják oly lényegesnek, hogy e miatt a közgyűlést szeptemberre kitűzni nem lehetne. Hiszen az alapszabályok hivatkozott pontjának fogalmazásánál csak az az intentio volt irányadó, hogy a választmány keze a közgyűlés idejének meghatározásában tulságosan meg ne köttessék, s így lehetővé váljon annak az időpontnak megválasztása, melyben a legtöbb tagnak megjelenése remélhető. Ezt szemelőtt tartva a választmány elhatározza, hogy a harmadik rendes közgyűlés Szombathelyen f. é. szeptember hó végén fog megtartatni.

*

A Mathematikai és Physikai Társulat új tagjai.

A választmány 1895 április hó 4-én tartott ülésén a Mathematikai és Physikai Társulat új tagjaiúl a következőket választotta meg: *Püschl Imre* műegyet. assistens Bpest (aj. *Bartoniek* és *Hoór*); *Dr Schwicker Alfréd* főreálisk. tanár Pozsonyban (aj. *Bozóky* és *Bartoniek*); *Pizzetti Rókus* áll. főgymn. tanár Fiume (aj. *Angheben* és *Riegler*); *Kalecsinszky Sándor* geol. int. vegyész Bpest (aj. *Klupathy* és *Bartoniek*); *Möller Árpád* prem. rendi tanár Jászó (*Fábry* és *Berkes*); Dr *Németh Antal* kir. főigazgató Győr (aj. *Edelmann* és *Bartoniek*); *Nagy Vazul Pál* Szt. Benedekrendi tanár (aj. *Tangl* és *Rados G.*); *Oszlaczky Szilárd* tanárjelölt Bpesten (aj. *Mikola* és *Karvázy*); *Privorszky Alajos, Péch Aladár, Bauer Mihály, Csajkás Mihály, Benda Jenő* és *Grosz Ferencz* tanárjelöltek Bpesten (aj. *Rados* és *Tötössy*); *Váncza Mihály* ref. főgymn. tanár Mező-Túron (aj. *Fröhlich* és *Rados G.*); *Schenk Arthur* orv. növendék Bpesten (aj. *Klupathy* és *Tangl*); Dr *Steécz György* cz. kanonok és plébános Apatinban (aj. *Bartoniek* és *Rados*); *Dr Iszlay József* orvos Bpesten (aj. *b. Eötvös* és *Klupathy*); Ifj. *Szily Kálmán* tanárjelölt Bpesten (aj. *Szily K.* és *Rados G.*); *Schimanek Emil* műegyet. assistens Bpest (aj. *Rados* és *Réthy*).

VEGYESEK.

CAYLEY ARTHUR †

Cayley Arthur, a mathematikusok Nestora halt meg Cambridgeben 1895 jan. 26-án.

Cayley 1821 aug. 16-án született Richmondban. Már mint cambridgei tanuló nagy előszeretettel foglalkozott a mathematikával, mindazonáltal 1859-ben jogi pályára lépett és 1863-ig ügyvédeskedett. Ez évben a cambridgei egyetemen a mathematika tanára lett és ezen időtől haláláig híven megfelelt tanszéke kötelezettségeinek: «a tiszta mathematika szabályait magyarázni és tanítani és magát a tudomány fejlesztésének szentelni».

A milyen egyszerű, eseményekben szegény e tudós külső élete, oly gazdag tudományos működése. Egy könyvén kívül (*Elementary treatise on elliptic fonctions* 1878.) majdnem ezer értekezés jelent meg tőle különböző folyóiratokban: ezek mindazon kérdésekre vonatkoznak, a melyekkel egy felszázadon keresztül a mathematikusok foglalkoztak. Első mathematikai értekezése 1841-ben jelent meg a Cambridge Mathematical Journalban és már 1852-ben megválasztotta a Royal Society egy értekezése alapján tagjául.

A geometria, az algebra, a számelmélet, az integrálszámítás, az elliptikus függvények elmélete és az égi testek mehanikája egyaránt oly alapvető jelentőségű eredményeket köszönnek neki, a melyek örök emléket biztosítanak számára.

Sylvester-rel együtt ő alapította meg az algebrai alakok elméletét, kutatta az invariánsokat és kovariánsokat hosszadalmas, fárasztó számításokkal. Foglalkozott a magasabb rendű görbékkel, kettős érintőikkel és többszörös pontjaikkal, térbeli görbék és felületek elméletével.

1889-ben indult meg Cayley összegyűjtött műveinek kiadása, melyből eddig hét kötet, több mint 2000 czikkel jelent meg. Remélhető, hogy a nagy mathematikus műveinek e jeles kiadása nem marad csonkán. Befejezve e munkák hirdetni fogják az angol mathematika Cayley-korszakának örök dicsőségét.

Kopp Lajos.

A TÉRBELI GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.*

A legegyszerűbb infinitezimális megfontolozások beláthatóvá teszik a következő tétel helyességét:

Valamely térbeli görbe simuló síkjaitól beburkolt kifejthető felületnek visszatérő éle maga a megadott térbeli görbe.

Minthogy azonban ily hozzávetőleges infinitezimális megfontolások gyakran a szükséges mathematikai szigorúságnak hiányában vannak, talán nem lesz felesleges e tétel pontos analitikai bebizonyítását is közölni.

Mielőtt erre áttérnék, a következőket bocsátom előre:

Ha a

$$\Phi(t) \equiv A(t)\,\xi + B(t)\,\eta + C(t)\,\zeta + D(t) = 0$$

egyenlet együtthatói a t parameter megadott függvényei, akkor a

$$\Phi(t) = 0$$

egyenlet a t minden egyes számértéke mellett egy-egy síkot határoz meg; az ekként keletkező síkok kifejthető felületet burkolnak be. E kifejthető felület visszatérő élének (arête de rebroussement) egyenleteit megkapjuk, ha a

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &\equiv A(t)\,\xi + B(t)\,\eta + C(t)\,\zeta + D(t) = 0^{**} \\
\Phi'(t) &\equiv A'(t)\,\xi + B'(t)\,\eta + C'(t)\,\zeta + D'(t) = 0 \\
\Phi''(t) &\equiv A''(t)\,\xi + B''(t)\,\eta + C''(t)\,\zeta + D''(t) = 0
\end{aligned}$$

---

* E czikkben foglalt bebizonyítás alapvonásait Rados Gusztáv tanár úr a műegyetemen tartott mathematikai gyakorlatokban közölte.

** A differenciálhányadosok jelölésére a Lagrange-féle jelzési módot használom, úgy, hogy pl.:

$$A''(t) = \frac{d^2 A(t)}{dt^2}.$$

lineár egyenletrendszert ξ, η, ζ szerint megoldjuk; a nyerendő megoldások:

$$\xi=\varphi_1(t), \quad y=\varphi_2(t), \quad z=\varphi_3(t)$$

szolgáltatják a visszatérő él parameteres egyenleteit.

Ezeknek alapján a fönt kimondott tétel minden nehézség nélkül bizonyítható be.

Legyenek

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

a megadott térbeli görbe parameteres egyenletei. Ha valódi térbeli görbéről (és nem síkgörbéről) van szó, akkor a

$$\Delta=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

determináns nem lehet azonosan zérus. Az (x, y, z) ponthoz tartozó simuló sík egyenlete:

$$\Phi(t)\equiv A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)=0,$$

hol

$$A=\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

E simuló síkoktól beburkolt kifejthető felület visszatérő élét a

$$\Phi(t)=0, \quad \Phi'(t)=0, \quad \Phi''(t)=0$$

egyenletek határozzák meg. Irjuk ki ezeket az egyenleteket részletesen:

$$\Phi'(t)\equiv A'(\xi-x)+B'(\eta-y)+C'(\zeta-z)-(Ax'+By'+Cz')=0;$$

de minthogy

$$Ax'+By'+Cz'=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}\equiv 0,$$

$$\Phi'(t)\equiv A'(\xi-x)+B'(\eta-y)+C'(\zeta-z)=0;$$

ennek alapján

$$\Phi''(t)\equiv A''(\xi-x)+B''(\eta-y)+C''(\zeta-z)-(A'x'+B'y'+C'z')=0,$$

de mivel

$$A'x'+B'y'+C'z'=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$\Phi''(t)\equiv A''(\xi-x)+B''(\eta-y)+C''(\zeta-z)=0.$$

Tehát a simuló síkoktól beburkolt kifejthető felület visszatérő élének egyenleteit megkapjuk, ha a

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\equiv A\ (\xi-x)+B\ (\eta-y)+C\ (\zeta-z)=0 \\ \Phi'(t) &\equiv A'\ (\xi-x)+B'\ (\eta-y)+C'\ (\zeta-z)=0 \\ \Phi''(t) &\equiv A''(\xi-x)+B''(\eta-y)+C''(\zeta-z)=0 \end{aligned} \qquad 1)$$

lineár egyenletrendszert ξ, η, ζ szerint megoldjuk. Ez az egyenletrendszer a

$$\xi-x, \quad \eta-y, \quad \zeta-z$$

ismeretlenekre nézve homogén. Ha determinánsáról, azaz a

$$D=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

determinánsról sikerül kimutatni azt, hogy nem azonosan zérus, úgy hogy

$$\xi-x=0, \quad \eta-y=0, \quad \zeta-z=0$$

a homogén lineár egyenletrendszer egyetlen megoldása: akkor kimondhatjuk, hogy a visszatérő él egyenletei mások mint a

$$\xi=x=f_1(t), \quad \eta=y=f_2(t), \quad \zeta=z=f_3(t)$$

egyenletek nem lehetnek és így ezzel egyszersmind be lesz bizonyítva az is, hogy a simuló síkoktól beburkolt kifejthető felület visszatérő éle azonos a megadott térbeli görbével.

A további tárgyalás tehát a D determináns tüzetesebb vizsgálatát teszi szükségessé. Azért írjuk ki D elemeit részletesen:

$$\begin{aligned} A &= y'z''-y''z' & A' &= y'z'''-y'''z' \\ B &= z'x''-z''x' & B' &= z'x'''-z'''x' \\ C &= x'y''-x''y' & C' &= x'y'''-x'''y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'' &= (y''z'''-y'''z'')+(y'z^{IV}-y^{IV}z') \\ B'' &= (z''x'''-z'''x'')+(z'x^{IV}-z^{IV}x') \\ C'' &= (x''y'''-x'''y'')+(x'y^{IV}-x^{IV}y'). \end{aligned}$$

A D felbontható két determináns összegére:

$$D=D_1+D_2, \qquad 2)$$

hol

$$D_1=\begin{vmatrix} y' & z''-y''z' & z' & x''-z''x' & x' & y''-x''y' \\ y' & z'''-y'''z' & z' & x'''-z'''x' & x' & y'''-x'''y' \\ y'' & z'''-y'''z'' & z'' & x'''-z'''x'' & x'' & y'''-x'''y'' \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} y'' & z'''-y'''z'' & z'' & x'''-z'''x'' & x'' & y'''-x'''y'' \\ y''' & z'-y'z''' & z''' & x'-z'x''' & x''' & y'-x'y''' \\ y' & z''-y''z' & z' & x''-z''x' & x' & y''-x''y' \end{vmatrix} = \Delta^2,$$

minthogy D_1 a Δ adjungált rendszerének determinánsa; továbbá

$$D_2=\begin{vmatrix} y'z''-y''z' & z'x''-z''x' & x'y''-x''y' \\ y'z'''-y'''z' & z'x'''-z'''x' & x'y'''-x'''y' \\ y'z^{IV}-y^{IV}z' & z'x^{IV}-z^{IV}x' & x'y^{IV}-x^{IV}y' \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} y' & z' & 0 \\ -x' & 0 & z' \\ 0 & -x' & -y' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z'' & -y'' & x'' \\ z''' & -y''' & x''' \\ z^{IV} & -y^{IV} & y''' \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & z' & y' \\ -z' & 0 & x' \\ -y' & -x' & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z'' & -y'' & x'' \\ z''' & -y''' & x''' \\ z^{IV} & -y^{IV} & x^{IV} \end{vmatrix} \equiv 0$$

mert az utoljára talált szorzat első tényezője páratlan fokú ferdén szimmetrikus determináns. Ha D_1 és D_2 talált értékeit a 2) alatti képletbe helyettesítjük, lesz:

$$D=\Delta^2;$$

és minthogy Δ valódi térgörbe esetében nem tűnhetik el azonosan, azért D sem lehet azonosan zérus és így az 1) alatti egyenletrendszerből valóban a

$$\xi=f_1(t), \quad \eta=f_2(t), \quad \zeta=f_3(t)$$

egyenleteket kapjuk a visszatérő él meghatározására. De ezzel a bevezetésben kimondott tétel teljesen be van bizonyítva.

Privorszky Alajos.

A CSAVART OSZLOP SAJÁT ÁRNYÉKHATÁR-VONALÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

(Második közlemény.)

II.

Az imént tárgyalt meghatározási módok mindegyikénél szerepel a T' középponttal biró sugársor. E sugársornak mint projekciónak azonban megfelel egy határozott geometriai téralakzat, a melynek felismerésére legegyszerűbben rávezet az első szerkesztési mód.

Az ott kifejtettek szerint minden alkotó körön az árnyékhatárvonal pontjait oly körátmérő metszi ki, a melynek első projekciója a T' ponton halad át. Mivel e körátmérők parallel síkokban — az alkotó körök síkjaiban — fekűsznek, és mindannyian a középponti csavarvonalat átmetszik, kimondhatjuk, hogy:

A T' középponttal biró sugársornak, mint projekciónak, a térben oly egyenes konoid felel meg, a melynek egyik vezérvonala felületünk középponti csavarvonala, második vezérvonala pedig egy ennek tengelyével parallel egyenes, T'-nek első projicziáló sugara; iránysíkja pedig egy erre az egyenesre merőleges sík, az első projekczió-lap.

A véges térben levő egyenes vezérvonal helyzete kizárólagosan a fénysugár irányától függ, a mely azt egyértelműen meghatározza. A középponti csavarvonal és ez egyenes között a következő reláczió áll fenn:

$$d=\mu \,.\, \text{tg}.\, \alpha,$$

hol d e vezérvonal távolságát a felület tengelyétől, α a fénysugár

hajlásszögét a tengelylyel, μ pedig a csavarvonal redukált menetmagasságát jelenti. Megjegyzendő még, hogy ama síkok, a melyeket egyrészt a fénysugár iránya másrészt pedig e vezérvonal a felület tengelyével alkotnak, egymásra merőlegesek.

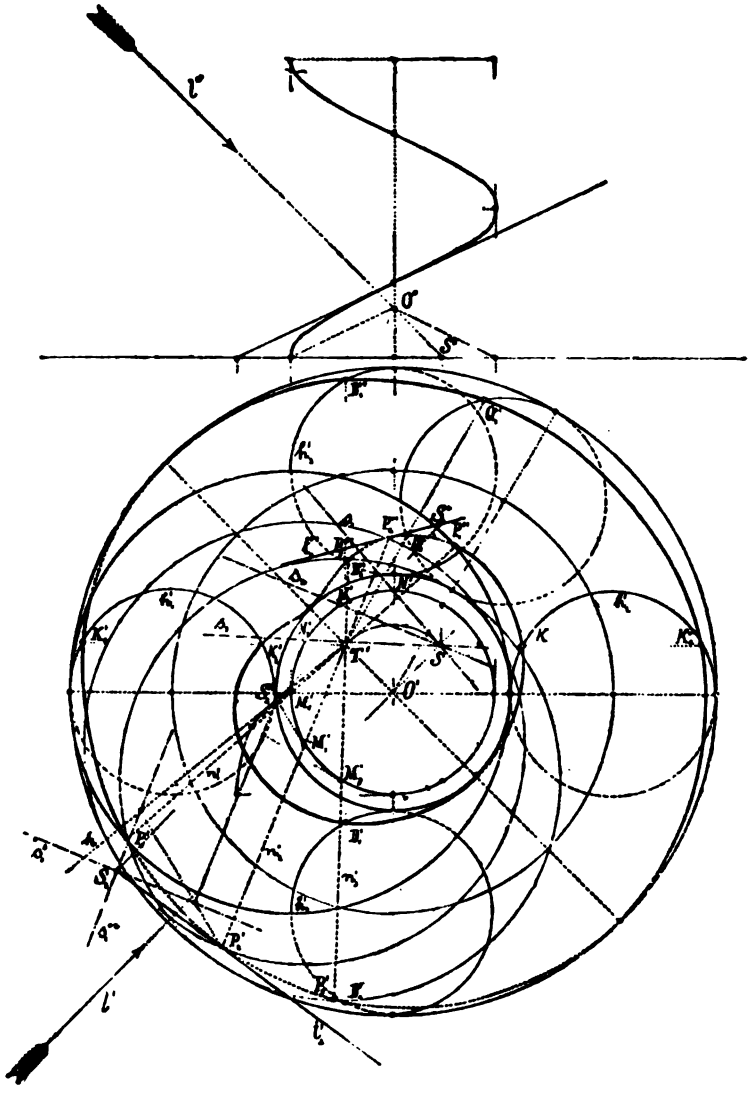
Ha rövidség kedveért a fénysugarat l-lel, adott felületünket F-fel, a szereplő konoid felületet pedig Φ-vel jelöljük, akkor a fénysugár irányához tartozó Φ felület F felületünkön az árnyékhatárvonalat metszi ki.

Ezzel a fénysugáriránynyal, — mondhatnám — konjugált Φ felület ugyanoly szerepet játszik F-re nézve, mint a milyen szerepe jutott a másodrendű felület hasonló problémájában a fénysugáriránynyal konjugált átmérősíknak. Változó fénysugárirány mellett a Φ felületek egy kétszeresen végtelen (két-dimenziós) felületsort alkotnak. E felületsorban az iránysík és az egyik vezérvonal, a csavarvonal állandó; változó ellenben a véges térben levő egyenes vezérvonal, mely utóbbi összes helyzeteiben egy az F felület tengelyével parallel sugárpontot alkot. Konoid felületsorunkban azonban csak egyszerűen végtelen sok egymástól alakra is eltérő felület foglaltatik, mert a többiek ezekből csavarmozgás utján származtathatók. Az összes eseteknek megfelelően a d távolság értéke 0 és ∞ határok között változik, a minek következtében e sorozat a d távolság határértékeinek megfelelően, ∞ sok hengerfelületet és egy lapos csavarfelületet tartalmaz, ha a változó vezérvonal a ∞-be távozik ($d=\infty$), illetőleg az F felület tengelyével összeesik ($d=0$).

Érintő szerkesztése.

Az árnyékhatárvonal szerkesztésének ily módon való interpretációja módot nyujt érintőjének szerkesztésére is tetszőlegesen megadott pontjában. Ugyanis az érintő nem más, mint a felületek amaz érintősikjainak metszésvonala, a melyek választott pontunkhoz tartoznak.

Foglalkozzunk először is a csavart körhengerfelület érintősíkjával. Szerkeszszük (l. 1. ábra) pl. az érintősikot felületünk P_1 pontjában.



3. ábra.

Képzeljük e ponton keresztül az alkotó kört meghúzva, és legyen ennek középpontja M_i, akkor a keresett sik első nyomvonala merőleges P_iM_i sugárra, mivel ez, az alkotó kör P_i-hez tartozó érin-

tőjét magán tartalmazza. Felületünket ez alkotó kör hosszában burkoló elliptikus hengerfelület P_i pontján áthaladó alkotója szolgáltatja érintősikunk egy másik egyenesét. Mivel ez az alkotó a középponti csavarvonal M_i-hez tartozó érintőjével parallel fekvésű, érintősikunk első nyomvonalát abban az egyenesben nyerjük, a melyet az M_i'. a középponti csavarvonal M_i-beni érintőjének első nyompontja S_i^M és a P_i' pontoktól megállapított parallelogramma negyedik csúcspontjából $P_i'M_i'$ egyenesre merőlegesen húzunk.

A Φ konoidfelület érintősíkjának meghatározására legyenek a 3-dik ábrában, a meghatározására szükséges adatok két projekcióban megadva; legyen továbbá g a felület egy alkotója, P pedig a szerkesztendő érintősik érintési pontja.

Ha figyelembe vesszük, hogy az egy alkotón keresztül menő érintősikok megállapította síksor, az érintési pontoktól képezett pontsorral projektiv,* törekvésünk első sorban e projektiv alakzatok három megfelelő elempárjának megszerkesztésére irányul.

Konoidfelületünk g alkotója a csavarvonalalakú vezérvonalat $M'M''$ pontban metszi, és e pontban lévő érintősikját meghatározza e g alkotó és a vezérvonal M-hez tartozó érintője úgy, hogy első nyomvonala, s_1^I, az érintő első nyompontján S^M-en át g'-vel párhuzamosan meghúzható. A g alkotó és a t vezérvonal megállapította sík érintési pontját megadja a $T'T''$ pont, első nyomvonala s_1^{II} összeesik az alkotó első projekciójával. Az alkotón keresztül az iránysíkkal (első projekció lap) párhuzamosan fektetett sik a felületet az alkotó ∞-ben fekvő pontjában P_∞-ben érinti, első nyomvonala összeesik az első projekciólap végtelenben fekvő egyenesével, s_∞-nel.

Az érintősikok és érintési pontok projektivitása most már a következő: föltéve, hogy az érintősikok helyére azok első nyomvonalait tettük:

$$(M'T'P_\infty P \ldots) \overline{\wedge} (s_1^I s_1^{II} s_\infty s_1 \ldots).$$

---

* Fieder, Darst. Geometrie, II. köt. p. 416.

A mint látható a nyomvonalak sora egy a g' egyenes irányával biró parallel sugársor.

Egyneműsités czéljából czélszerű e sugársort egy vele perspektiv fekvésű pontsorral helyettesiteni. Metsző egyenesnek igen alkalmas, bármely T' ponton áthaladó egyenes, mivel rajta a nyomvonalsor egy az érintési pontok sorával nemcsak projektiv hasonló, hanem még perspektiv fekvésű pontsort is kimetsz. Legelőnyösebben használható e czélra a $T'S^M \equiv h$ egyenes; projektiv pontsoraink ekkor a következők:

$$(T'M'P_\infty P' \ldots) \overline{\wedge} (T'S^M H_\infty H \ldots),$$

ha H_∞-nel a h egyenes végtelenben fekvő pontját jelöljük.

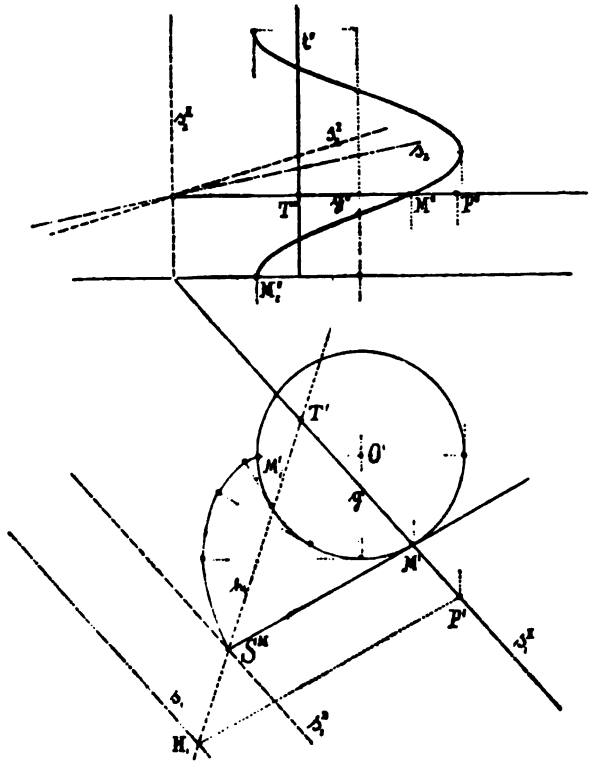
A pontsorok megfelelő pontpárjainak összeköttetései párhuzamosak $M'S^M$-mel, s igy megtalálhatjuk a Φ felület P pontjához tartozó érintősik első nyomvonalát s_1-et a síksor nyomvonalsorozatának ama sugarában, a mely a P'-nek megfelelő H ponton áthalad.

Az előbbiekben elmondottak figyelembe vételével történt az érintő megszerkesztése 1-sö ábránkban is. Az F és Φ felületekhez P_2 pontban szerkesztett érintősikok első nyomvonalai s_1^2 és s_1^{+2} az S_2 pontban metszik egymást, úgy, hogy az érintő első projekcziója $S_2P_2' \equiv l_2'$-ben húzható meg.

E szerkesztés követhető általában az árnyékhatárvonal bármely pontjára nézve, és csak néhány igen kivételes eset fordulhat elő, midőn eredményre nem vezet, vagy egész terjedelmében alkalmazása fölösleges.

Az eljárás kétszeres alkalmazására válnék szükségessé, az árnyékhatárvonal oly pontjaira nézve, a melyek a felület ugyanazon parallelkörén fekűsznek. Egy ily pontpár érintőinek helyzetére vonatkozó egyszerű meggondolás meg fogja mutatni, hogy az egyik pont érintőjének ismeretéből, a másik pont érintője az általános szerkesztés mellőzésével, azonnal megtalálható. Jelöljük az árnyékhatárvonal egy ily pontpárját P_i, P_i^+-vel, az alkotó kör középpontját M_i-vel és a középponti csavarvonal ehhez tartozó érintőjének első nyompontját S_i^M-mel, akkor egyrészt az F felület, másrészt pedig

a Φ felület e pontokhoz tartozó érintősíkjainak első nyomvonalai könnyen felismerhető okoknál fogva S_i^M-hez, mint középponthoz



1. ábra.

szimmetrikus fekvésűek lesznek. Következésképen szimmetrikusok egyszersmind a t_i és t_i^* érintők első nyompontjai S_i és S_i^* is, S_i^M pontot szimmetria középpontnak véve.

Szépréthy Béla.

EGY TÉTEL A HOMOGÉN LINEÁR DIFFERENCZIÁLEGYENLETEK ALGEBRAI INTEGRÁLJAIRÓL.

Heine figyelmeztette Schwarz-ot* arra, hogy ha a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy + 0 \qquad 1)$$

másodrendű homogén lineár differenciálegyenlet két partikuláris megoldásának, y_1 és y_2-nek hányadosa az x független változó algebrai függvénye és e mellett

$$e^{-\int p dx} \qquad 2)$$

is x-nek algebrai függvénye, akkor az 1) alatti differenciálegyenlet általános megoldása is az x algebrai függvénye lesz.

Ennek a tételnek egy közel fekvő általánosítását akarom közölni. Ez az általánosítás a következő:

Ha az

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0 \qquad 3)$$

homogén lineár differenciálegyenlet n független partikuláris megoldása

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \qquad 4)$$

és az

$$\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{y_n}, \qquad 5)$$

n—1 hányados az x független változónak algebrai függvényei, továbbá a

$$e^{-\int p_1 dx} \qquad 6)$$

* Schwarz: Über diejenigen Fälle in welchen die Gauss'sche hypegeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt. Journ. f. r. ü. ang. Math. 75. kötet. v. Gesammelte Werke II. p. 218.

is x-nek algebrai függvénye, akkor a 3) alatti differenciálegyenlet általános megoldása is algebrai függvénye az x-nek.

A lineár differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, hogy a 6) alatti kifejezés (egy állandó szorzótól eltekintve) nem más, mint a 4) alatti partikuláris integrálrendszer determinánsa, vagyis

$$e^{-\int p dx} = C \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad 7)$$

Legyen már most a feltételünk szerint:

$$\frac{y_1}{y_n} = f_1(x), \quad \frac{y_2}{y_n} = f_2(x), \dots \frac{y_{n-1}}{y_n} = f_{n-1}(x), \qquad 8)$$

a hol

$$f_1(x), \ f_2(x), \dots, f_{n-1}(x) \qquad 9)$$

az x független változó algebrai függvényei. A 7) alatti determinánsban a 8) alatti egyenletek alapján tegyük:

$$y_i^{(k)} = f_i^{(k)} y_n + \binom{k}{1} f_i^{(k-1)} y_n^{(1)} + \binom{k}{2} f_i^{(k-2)} y_n^{(2)} + \dots + f_i y_n^{(k)}. \qquad 10)$$

Ha most a 7) alatti determinánst átalakítjuk és az utolsó oszlopot rendre a (9) alatti kifejezésekkel megszorozva az egyes oszlopokból kivonjuk, akkor az a következő alakot ölti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & y_n \\ f_1' y_n & f_2' y_n & \dots & y_n' \\ f_1'' y_n + 2 f_1' y_n' & f_2'' y_n + 2 f_2' y_n' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} y_n + \dots & f_2^{(n-1)} y_n + \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad 11)$$

az i-dik oszlop $(R+1)$-dik eleme részletesen kiírva a következő

$$f_i^{(k)} y_n + \binom{k}{1} f_i^{(k-1)} y_n' + \dots + \binom{k}{k-1} f_i' y_n^{k-1}$$

A 11) alatti determináns most már $(n-1)$-edrendű determinánsra redukálódik:

$$\Delta = y_n \Delta_1, \qquad 12)$$

a hol a Δ_1 determináns megint átalakítható úgy, hogy az első sorból y_n-et kiemeljük és azután az első sort $2y'_n$-al szorozva, a második sorból levonjuk. Ha most a második sorból kiemeljük az y_n-et és az első ort $3y''_n$-sel, a második sort $3y'_n$-sel szorozva a harmadik sorból kivonjuk és ez eljárást folytatva végre az egyes sorokat rendre

$$\binom{n-1}{n-2} y_n^{(n-2)}, \binom{n-1}{n-3} y_n^{n-3}, \ldots, \binom{n-1}{1} y'_n$$

szorozzuk és az utolsó sorból kivonjuk, akkor a Δ determináns a következőre redukálódik:

$$\Delta = y_n^n \cdot \begin{vmatrix} f'_n & f'_2 & \ldots & f'_{n-1} \\ f''_1 & f''_2 & \ldots & f''_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = y_n^n \cdot D \qquad 13)$$

A D determinánsról tudjuk, hogy x algebrai függvénye, mert hiszen mindenik f algebrai függvény. A D nem lehet identikusan 0, mert ez esetben, miként az ilyen alakú determinánsokról ismeretes, az

$$f'_1, \quad f'_2, \ldots, f'_{n-1}$$

nem volnának egymástól lineárisan függetlenek, hanem fennállana közöttük egy

$$c_1 f'_1 + c_2 f'_2 + \cdots + c_{n-1} f'_{n-1} = 0 \qquad 14)$$

reláczió, a melyben a c együtthatók állandók. E relációból pedig következnék, hogy

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_{n-1} f_{n-1} = c_n$$

és ha az f függvények helyett a 8) alatti egyenletekből a 3) alatti egyenlet partikuláris megoldásait helyettesítjük, akkor a

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_{n-1} y_{n-1} = c_n y_n$$

reláczióra jutnánk, a mi ellenkezik azzal a föltevésünkkel, hogy a 4) alatti rendszer n egymástól független megoldást tartalmaz.

Ebből következik, hogy a 13) alatti egyenlet y_n szerint megoldható és így y_n és a 8) alatti relációk alapján vele együtt az összes y_i-k *is algebrai függvényei az* x*-nek.* Ezzel a jelzett tétel be van bizonyítva; mert az általános integrál:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

is, az $y_1, y_2, \ldots y_n$-nel egyidejűleg algebrai függvénye az x-nek.

Beke Manó.

ADALÉK A TÖBB VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.*

Ha adva van az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független változóknak valamely

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

n változós függvénye, fontos kérdés, hogy miképen transzformálódnak a z függvény differenciálhányadosai új, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ változórendszer behozatalánál. Ismeretes, hogy a z függvénynek a régi változók szerint képezett első-, második stb. differenciálhányadosai egy-egy lineár egyenletrendszerből számíthatók ki, ha már az alacsonyabbrendűek ismeretesek.

Ezeknek az egyenletrendszereknek megoldhatóságával akarok e sorokban foglalkozni. Mivel bennük a z függvény differenciálhányadosai mint tetszőleges mennyiségek szerepelnek, azért megoldhatóságuknak feltétele, hogy a mindenkori determinánsuk a zérustól különböző legyen.

Kérdés már most, hogyha a magasabbrendű differenciálhányadosokat egymásután akarjuk kiszámítani, a fellépő determinánsok el nem tűnése mindig új meg új megszorításképen lép-e be a tárgyalásba? A kérdés pontosabb megvizsgálása mutatja, hogy ama feltételek valóban nem függetlennek egymástól és a döntő szerepet az elsőrendű differenciálhányadosok számításánál fellépő determináns vagyis a

---

* E dolgozatban tárgyalt tétel bebizonyítását Rados tanár úr a műegyetemen tartott mathematikai gyakorlatokban feladatul tűzte ki. Ugyancsak ő figyelmeztetett arra is, hogy e tétel az invariáns-elméletnek alább idézett tétele segítségével bizonyítható be. A tétel egyes egészen speczialis esetekben már tárgyaltatott (l. Scholtz Műegyetemi Lapok III. köt. 93. l.)

$$D_1 = D\left(\frac{x_1, \ldots, x_n}{y_1, \ldots, y_n}\right)$$

függvénydeterminánsjátssza.

Ki fogjuk ugyanis mutatni, hogy az m-edrendű differenciálhányadosok kiszámításánál fellépő D_m determináns mindig ennek a determinánsnak valamely hatványa, még pedig:

$$D_m = D_1^{\binom{n+m-1}{n}}$$

*

Egyelőre két független változó körében maradva, legyen

$$z = f(x_1, x_2)$$

az x_1, x_2 változóknak adott függvénye és hozzuk be az

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2) \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2) \end{aligned} \qquad (s)$$

transzformáczió-képletek segítségével az (y_1, y_2) független változórendszert, akkor az

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial z}{\partial y_1} &= \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{aligned} \qquad (1)$$

egyenletrendszer megadja a régi $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right)$ differenciálhányadosokat kifejezve az újak segítségével, ha az egyenletrendszer determinánsa

$$D_1 = D\left(\frac{x_1, x_2}{y_1, y_2}\right) = D\left(\frac{\varphi_1, \varphi_2}{y_1, y_2}\right) \gtrless 0$$

azaz a függvény-determinánsa zérustól különböző.

Az (1) egyenletek további differenciálása által a másodrendű differenciálhányadosokra vonatkozó egyenletrendszert nyerjük:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)^2 + Z_{20}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + Z_{11} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right)^2 + Z_{02}$$

Itt a Z_{ik} mennyiségek az (x_1, x_2)-nek az (y_1, y_2) szerinti differenciálhányadosain kivül z-nek csak elsőrendű, már (1)-ből kiszámítható differenciálhányadosait tartalmazzák.

Hozzuk be

$$\frac{\partial x_1}{dy_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}$$

helyébe az

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \beta_1, \quad \beta_2$$

jeleket, akkor

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = (\alpha\beta),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_1 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{vmatrix}^*$$

és nem fog nehézséggel járni a D_2 determinánsnak tényleges redukciója a D_1^2 alakra.

Ha ugyanis mindegyik sor utolsó elemét kiemeljük, akkor:

---

* A determináns második illetőleg harmadik sora az első sornak első illetőleg második polárja a β polus szerint; hogy D_m az általános esetben is ilyen természetű, azt nem nehéz kimutatni pl. teljes indukcióval, de a későbbiekből ez önként következni fog.

$$D_2 = \alpha_2^3\beta_2^3\begin{vmatrix} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 & 2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_2} & \frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\beta_1}{\beta_2} & 1 \\ \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 & 2\frac{\beta_1}{\beta_2} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_2^3\beta_2^3\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_2}-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 & \frac{\beta_1}{\beta_2}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 & 2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_2^3\beta_2^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \\ \frac{\beta_1}{\beta_2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\alpha_2^3\beta_2^3\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^3 = (\alpha\beta)^3 = D_1^3$$

Ezzel (2) alatti egyenletrendszer determinánsát a D_2-t már kifejeztük a D_1 segítségével. E redukció alapul szolgálhatna már a teljes indukcióra.* Az e czélra végzendő számítások egészen gépiesek és e mellett kevéssé áttekinthetők, úgy hogy több változó esetében ez az út alig vezet czélhoz.

A szóban forgó D_m determináns azonban az invariánselméletben is fellép és ez a körülmény a tételnek egyszerű, akárhány változóra érvényes és minden számítás nélküli bebizonyítására vezet.

Ha ugyanis a transzformációnk homogén lineár transzformáczió, akkor az (α, β) mennyiségek állandók, úgy hogy a Z_{ik} kifejezések, a melyeknek minden egyes tagja az (α, β) elsőrendű differenciálhányadosainak valamelyikét szorzó gyanánt tartalmazza, kiesnek. Ha továbbá a z függvények m-edrendű algebrai alakok, akkor egészen az invariánselmélet körében vagyunk. Az m-edrendű differenciálhányadosok az m-edrendű algebrai alakoknak együtthatóivá lesznek; a differenciálhányadosok transzformálásának megfelel

* Az idevonatkozó számítást elvégeztem, bonyolódottságánál fogva azonban annak közlésétől e helyen eltekintek.

az együtthatók transzformálása és — mint látni fogjuk — az invariáns-elmélet kiinduló pontját képező egyik tételből, a czikk elején kimondott tétel helyessége azonnal következik.

Az idézendő tétel a következő: *

Ha valamely alakrendszer együtthatóinak és változóinak homogén raczionális egész függvénye lineár transzformáczió következtében egy az alakrendszer együtthatóitól és változóitól független, állandó szorzóval változik meg, szóval ama függvény az alakrendszernek invariánsa, akkor e tényező nem lehet más, mint a transzformáczió determinánsának (modulusának) valamely hatványa.

A mint ennek a tételnek bebizonyítása, úgy a szóban forgó tételé is, mint ennek folyományáé, független a változók számától; mégis kényelmesebb lesz a kiírás, ha a binár alakok körében maradunk.

Legyen tehát f valamely m-edrendű algebrai alak:

$$f=a_0x_1^m+\binom{m}{1}a_1x_1^{m-1}x_2+\cdots+a_mx_2^m=a_x^m;\quad a_x=a_1x_1+a_2x_2$$

Ha ezen az

$$x_1=\alpha_1y_1+\beta_1y_1$$
$$x_2=\alpha_2y_1+\beta_2y_2$$

helyettesitést végezzük, akkor menjen át F-be, hol

$$F=A_0y_1^m+\binom{m}{1}A_1y_1^{m-1}y_2+\cdots+A_my_2^m=(a_\alpha y_1+a_\beta y_2)^m.$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}A_iy_1^{m-i}y_2^i=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}a_\alpha^{m-i}a_\beta^iy_1^{m-i}y_2^i$$

úgy hogy az (s) lineár transzformáczió az együtthatóknak (S) lineár transzformációját vonja maga után, a mely a következő:

---

* L. erre vonatkozólag pl. KOPP LAJOS úrnak a «Math. és Phys. Lapok» I. kötetében levő első közleményét: «Az invariánselmélet alapjairól» 1893. 69. l.

$$\begin{aligned} A_0 &= a_\alpha^m \quad = a_{00}a_0 + a_{01}a_1 + \cdots + a_{0m}a_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_i &= a_\alpha^{m-1}a_\beta^i = a_{i0}a_0 + a_{i1}a_1 + \cdots + a_{im}a_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m &= a_\beta^m \quad = a_{m0}a_0 + a_{m1}a_1 + \cdots + a_{mm}a_m \end{aligned} \qquad (S)$$

hol pl.

$$A_0 = a_\alpha^m \quad = a_1^m a_0 + \binom{m}{1} a_1^{m-1} a_2 a_1 + \cdots + a_2^m a_m$$

és azonnal látható hogy az (S)-nek determinánsa nem egyéb mint D_m.

Vegyük már most fel a szimultán alakoknak

$$(f) = (f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(j)}, \ldots, f^{(m)})$$

rendszerét, mely (s) folytán átmegy az

$$(F) = (F^{(0)}, F^{(1)}, \ldots, F^{(j)}, \ldots, F^{(m)})$$

alakrendszerbe, hol

$$f^{(j)} = a_0^{(j)}x_1^m + \binom{m}{1} a_1^{(j)} x_1^{m-1}x_2 + \cdots + \binom{m}{i} a_i^{(j)}x_1^{m-1}x_2^i + a_m^{(j)}x_2^m = a_x^{(j)m}$$

$$F^{(j)} = A_0^{(j)}y_1^m + \binom{m}{1} A_1^{(j)} y_1^{m-1} y_2 + \cdots + A_m^{(j)} y_2^m = A_y^{(j)m}$$

úgy hogy

$$\begin{aligned} (a^{(0)}) &= (a_0^{(0)}, \ a_1^{(0)}, \ldots, a_i^{(0)}, \ldots, a_m^{(0)}) \\ (a^{(1)}) &= (a_0^{(1)}, \ a_1^{(1)}, \ldots, a_i^{(1)}, \ldots, a_m^{(1)}) \\ (a^{(j)}) &= (a_0^{(j)}, \ a_1^{(j)}, \ldots, a_i^{(j)}, \ldots, a_m^{(j)}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a^{(m)}) &= (a_0^{(m)}, \ a_1^{(m)}, \ldots, a_i^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}) \end{aligned}$$

a S helyettesítésre nézve kogrediens változórendszerek, akkor a determinánsok szorzási tételénél fogva:

$$|A_i^{(j)}| = |a_{ij}| \cdot |a_i^{(j)}| \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

azaz az $|a_i^{(j)}|$ determináns, mely az (f) alakrendszer együtthatóinak homogén raczionális egész függvénye az (s) transformáczió folytán

az $|a_{ij}|$ állandó tényezővel változik meg. Mivel (s) determinánsa nem egyéb mint

$$D_1 = (\alpha\beta),$$

azért az idézett tételnél fogva, kell lenni oly μ számnak, hogy

$$D_m = |a_{ij}| = (\alpha\beta)^\mu = D^\mu.$$

μ értékét a két oldalon levő függvények fokszámainak összehasonlítása alapján kapjuk. Tekintetbe véve ugyanis, hogy az $|a_{ij}|$ $(m+1)$-edfokú determináns, és hogy elemei (α, β)-ban m-edfokúak, míg $(\alpha\beta)$ ugyanezen mennyiségekben másodfokú, kell, hogy:

$$2\mu = m(m+1);$$

tehát

$$D_m = D_1^{\frac{m(m+1)}{2}} = D_1^{\binom{m+1}{2}}$$

legyen. Tökéletesen ugyanily gondolatmenet alapján belátható, hogy n független változó esetében az

$$n\mu = m\binom{n+m-1}{m}$$

egyenletnek kell fennállani, tehát

$$\mu = \frac{m}{n}\binom{n+m-1}{m} = \frac{m}{n}\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{n},$$

és így valóban találjuk, hogy

$$D_m = D_1^{\binom{n+m-1}{n}}$$

Breuer Mór.

PHYSIKAI SZEMLE.

A dörzsölési elektromosság eredete. C. Christiansen, Experimentale Untersuchungen über den Ursprung der Reibungselectricität. *Ann. d. Phys.* LIII. k. 401. l.

A dörzsölési elektromosság eredete után fürkészvén, legtermészetesebb utra térünk, ha az ismeretes forrásokat veszszük szemügyre. Azt találjuk, hogy a thermo-elektromosság eredete nagyon homályos, az inductio a dörzsölési elektromossággal eredetre nézve alig hasonlítható össze, az ütés, ütközés a dörzsöléstől alig választhatók el s így külön forrásokul nem tekinthetők; csupán az érintési elektromosság áll közel a dörzsölésihez.

Ezen analogiából indult ki Helmholtz, midőn az elektromos kettős rétegekről (el. Doppelschicht) értekezett.

Ha t. i. két különböző test érintkezik, $V_1 - V_2$ potentiál-különbség keletkezik közöttük. Ha az elektromos rétegek töltései felületegységenként $+\sigma$ és $-\sigma$, egymástól való távolságuk pedig a, akkor

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi a}.$$

Ha a testeket kisülés vagy kiegyenlítődés nélkül lehetne egymástól elválasztani, a felületeknek a töltéseket meg kellene tartaniok. Mivel azonban ez tényleg nem igen létesíthető, főleg pedig vezető testek esetében nem, a töltések csökkennek, de annál kisebb mértékben, mennél jobb szigetelők az egymástól eltávolított testek.

Christiansen ebből a felfogásból indult ki, midőn a dörzsölési elektromosság eredetét kutatva, nagyjelentőségű kisérleteit kigondolta. — Alapkisérlete a következő.

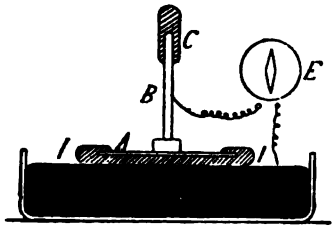
Legyen A (1. ábra) fémlemez, B fémpálcza és C szigetelő fogantyú. Az A fémlemez megömlesztett szurokba vagy gyantába mártva, JJ szigetelő réteggel vonódik be. D higanynyal megtöltött üvegtál, E galvanométer, melynek egyik sarka a higanynyal, másik sarka az (AB) fémtesttel van összekapcsolva. Ha a szurokfelület a higanynyal érintkezik, a galvanométeren nincs kiütés; mihelyt elválasztatnak, jelentékeny kiütés látható

még akkor is, ha az érintkező felületek csak néhány cm² nagyságúak. Az áram a higanytól a galvanométeren át a fémlemezhez tart.

A kisérlet Helmholtz szerint következőleg értelmezhető.

Érintkezéskor a higany felülete V_1, a szuroké V_2 potenciált vesz fel. A galvanométeren át tehát elektromosság áramlik a fémlemez felé, mely ezáltal V_1 potenciált kap. Ha a szurok vastagsága a', dielektromos állandója k, akkor az A és JJ közötti érintkezési felület σ elektromos sűrűsége közelítőleg így fejezhető ki:

$$\sigma' = \frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi a'}.$$



1. ábra.

Itt $V_1 - V_2$ bizonyára csekély értékű, a' véges mennyiség és így σ' jelentéktelen és a rendes mérőeszközökkel nem mutatható ki. Állíthatni tehát, hogy szigetelő és vezető érintkeztetésekor elektromos áram nem keletkezik.

Ha azonban a lemezt a higanyról leemeljük, a szurok negativ elektromossá lesz. A felületi sűrűség

$$\sigma = \frac{V_1 - V_2}{4\pi a}$$

volna, ha az ellentétes elektromosságok nem egyesülnének. Ez esetben az elektromosság bizonyos mennyisége áramlanék a higanytól a galvanométeren át a lemezhez és az érintkezési meg szétválasztási áramok úgy aránylanának, mint

$$\sigma' : \sigma,$$

vagy mint

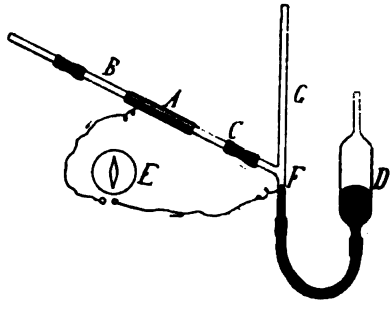
$$ka : a'.$$

Minthogy a valóságban némi kiegyenlítődés ki nem kerülhető, s az arány $\sigma' : \lambda\sigma$ alakban írható, hol λ igen kicsi szám.

Ha most a szurok ismét érintkezik a higanynyal, a galvanométer újra kitérül, az áram azonban sokkal gyengébb és az előbbivel ellenkező irányú. Ha ezt a csekély áramot zárási áramnak nevezzük, a lemez leemelésekor keletkezőt pedig nyitási áramnak, akkor az első zárási áram 0, az első nyitási pl. Q, a második zárási áram pl. Q' (hol $Q' < Q$ és ellenkező jelű). Ezentul az áramokat mindig Q, és Q'-val jelezzük. A zárási áram ismét zérussá lesz, ha a szurok borszeszláng fölött kissé melegíttetik. Ha a melegítés világító gázláng fölött történik, szénrészecskék rakódnak a szurokrétegre, mitől ez vezetővé lesz és áram ekkor egyáltalában nem mutatható ki.

Christiansen eleinte ilyen berendezést használt kisérleteihez, de mivel gyakran eltérő eredményekhez jutott, más berendezéshez folyamodott.

A készüléket a 2. ábra mutatja. *BC* 10—15 cm hosszú, 3—6 mm belső átmérőjű üvegcső. Belső falazatát a vizsgálandó szigetelővel vonta be. Chr. ezt úgy tette, hogy az anyagot megolvasztotta és így vonta be a cső belsejét vékony réteggel; vagy pedig úgy, hogy benzólban, szénkénegben oldotta föl az anyagot, az oldatot a csőbe fölszívta s az oldószert elpárologtatta. A cső közepét 4—6 cm hosszú ónlemez veszi körül (*A*). A csövet rövid kaucsukcső köti össze a ⊤ alaku *FG* csővel, míg ezt egy másik kaucsukcső a *D* higanytartóval helyezi közlekedésbe. *F*-ben platina-drót van be-



2. ábra.

forrasztva, mely az *E* galvanométer egyik sarkához vezet. A másik sarkot szintén drót köti össze az *A* ónlemezzel. Ha már most a *D* higanytartót emelik, a higany érintkezik a *BC* cső belső bevonatával, ha lejebb eresztik, az érintkezés megszünik. Látható, hogy ily módon a föntebb említett alapkisérlet különböző szigetelőkre nézve végezhető. Christiansen kisérleteit olyformán változtatta, hogy a *BC* csövön át, *FG*-n keresztül levegőt, hidrogént vagy szénsavat engedett áramlani. Az oxigéntől egyéb gázakat úgy szabadított meg, hogy azokat vörös izzó rézdróthálót tartalmazó csövcken bocsátotta keresztül s aztán még tömény kénsavval szárította. Kisérleteinek lényege és a belőlük vont következtetések röviden a következők.

1. *Kisérletek tiszta higanynyal és szigetelőkkel.*

Ha szurok, pecsétviasz, gyanta, selyem, kámfor, paraffin és egyéb éghető szigetelők légköri levegőben érintkeznek tiszta higanynyal, *negativ* elektromosaknak bizonyulnak. Oxigéntől teljesen mentes hidrogénban *positiv* elektromosak. Ha a dörzsölési elektromosságot Helmholtz szerint az érintésivel azonosnak tartjuk, az a körülmény, hogy valamely test egy másikkal dörzsölve, negativ is, meg pozitiv is lehet, abból volna magyarázható, hogy az oxigén a dörzsölésnél jelen volt-e, vagy sem. Ugyanerre az okra

vezethető vissza az is, hogy látszólag azonos testek ellenkező elektromos állapotot mutatnak a dörzsölésnél. Christiansen azt hiszi, hogy itt az éghető szigetelők vegyi rokonsága az oxigénhez is van befolyással az eredményre, a mennyiben valószínű, hogy felületükön oxigén sűrítteti meg. Szerinte a higanynak és valamely szigetelőnek érintkezésekor a levegőben csekély mennyiségű higany egyesül az oxigénnel HgO, vagy Hg_2O vegyületté. Az elektropozitiv Hg mint kation a higanyhoz csatlakozik, az elektronegativ O mint anion a szurokra tapad és így a szurok azért mutat negativ elektromosságot, mert oxigénnel van borítva, míg a higany pozitiv elektromossága a hozzácsatlakozó higanykationtól ered. Képletileg a vegyi folyamat ez volna: érintkezéskor (zárás)

$$higany\ \dot{H}g\bar{O}\ szurok,$$

az érintkezés megszüntekor (nyitás) pedig

$$higany\ \dot{H}g,\ \bar{O}\ szurok.$$

Szabad elektromosság itt épp úgy nincsen, mint más elektromosság-gerjesztésnél.

2. *Kisérletek czinkfoncsorral és szigetelőkkel.*

A dörzsölési elektromos gép bőrpárnáit czink- vagy ónfoncsorral vonják be s az ezekkel dörzsölt üvegkorong pozitiv elektromossá lesz. Ugyanazon elektromosságot kapják ily módon a kaucsuk és egyéb szigetelők is. Közelfekvő dolog volt tehát a főntebbi kisérleteket tiszta higany helyett czinkfoncsorral ismételni. A kisérletekhez elektrolitikai úton előállított, tiszta foncsor használtatott. A szurok és spanyolviasz a foncsorral való érintkezés következtében pozitiv elektromossá lett és pedig oxigénmentes hidrogénben éppen úgy, mint a tiszta higanynyal való érintkezéskor. Ha bármi csekély oxigén van jelen, a foncsorral érintkező szigetelő eleinte még erősebben lesz pozitivvá, mint a tiszta higany esetében, később azonban negativvá lesz.

Christiansen ezt így magyarázza: A czinkfoncsor igen könnyen oxidálódik; ha kevés oxigén van jelen, akkor — az oxigén molekulát $\bar{O}\dot{O}$ összetételűnek tekintvén — ilyen csoportosulás van:

$$czinkfoncsor\ \bar{Z}n\dot{Z}n,\ \bar{O}\dot{O},\ szurok.$$

Midőn nyitáskor a foncsor a szuroktól elválik, az oxigénmolekula szétválik és akkor ily csoportosulás keletkezik:

$$czinkfoncsor\ \bar{Z}n,\ \dot{Z}n\bar{O},\ \dot{O}\ szurok.$$

Az oxigénkation a szurkot pozitiv elektromossá teszi, a czinkanion pedig a foncsort negativvá. Ha már czinkoxid képződött, a folyamat ez lehet:

foncsor, $\overset{+}{Zn}\bar{O}$, *szurok,*

nyitáskor pedig:

foncsor $\overset{+}{Zn}$, $\bar{O}$ *szurok.*

A szurok ekkor ismét negativ elektromossá lesz.

3. *Kisérlelek másféle foncsorokkal.*

Másféle foncsorokkal végzett kisérletek arról tanuskodtak, hogy a szigetelőket, ha az oxigén el van távolítva pozitiv elektromosakká teszik. Erős amalgamok azonban az elektromosság megváltoztatását eredményezték. Az oxigén jelenléte t. i. a szigetelőt negativvá teszi, ha tiszta higany van alkalmazva, ellenben pozitivvá, ha erős ólom- vagy ónamalgam szerepel. Rézamalgam esetében a szigetelők mindig negativokká lesznek, ha bármi csekély oxigén van jelen.

4. *A légnyomás hatása.*

Higanyfelülettől elválasztott szigetelő elektromos töltést tart meg, melynek nagysága főleg attól függ, mily könnyen egyesülhetnek az elektromos kettős rétegek. Várható volt tehát, hogy a nyomás csökkenése a kisülést elősegíti és a nyitási áramok gyengülnek. Az ez irányban végzett kisérletek ezt a föltevést igazolták; a galvanometer tűjének kitérülése kisebbé lett, midőn a csöveken átvezetett gázok nyomása körülbelül 10 mm-ig csökkent; a nyomásnak még további csökkentése esetében azonban a kitérések ismét nagyobbodtak, s így az ellenállásnak fokozódnia kell. Ez jól egyezik azzal, a mit az erősen ritkított gáz viselkedéséről tudunk, midőn elektromos áram halad rajtok keresztül.

5. *Galvan-combinatió.*

Annak kiderítése végett, hogy milyen összefüggés van a dörzsölési és érintési elektromosság között, CHRISTIANSEN ezüst- vagy sárgarézcsövet használt, melybe két végén egy-egy üvegcső volt illesztve és spanyolviasszal megerősítve. Belül valami anyaggal vonattak be. A fölhasznált anyagok voltak: vízüveg, zselatin, halenyv; továbbá a kolofonium, a kollodium megszáradt étheres oldatai sat.

Ez anyagok többé-kevésbbé vezetők voltak a szerint, a mint rövidebb vagy hosszabb ideig száradtak. A cső belsejében tiszta higany vagy czinkamalgam volt. Midőn a cső pl. ezüstből való volt, belül zselatinnal bevonva s a cső belsejében czinkamalgam foglalt helyet, a galvanométer tűjének első kitérése erős áramot jelzett a foncsortól zselatinon át az ezüsthöz. A tű aztán megállapodik s ugyanoly irányú áramot jelez. Ha a czinkfoncsor a csőből kifolyik, ismét keletkezik ugyanoly irányú kiütés. Ez a nyi-

tási áram onnét van, hogy a zselatin czinkionokat vett fel, melyek a zselatinon át az ezüsthöz vándorolnak. A mint a zselatin szárad, a viszonyok ellenkezőre fordulnak: a kitérés ellenkező irányúvá lesz, az áram iránya tehát változott. Ilyenkor a nyitás alkalmával nagy feszültség is észlelhető, a mennyiben az ezüstcső elektroszkópon nagy kiütést idéz elő.

A kisérletek azt mutatják, hogy az elektromosság első *galvángerjesztése* az elektrolitek megszáradása után, vezetőképességök elvesztésével, a másodikba megy át.

6. *Kisérletek üvegcsövekkel.*

A kálioldattal, tömény kénsavval és desztillált vízzel megtisztított s melegítés által szárított üvegcsövek tiszta higanynyal érintkezve majdnem mindig negativ elektromosságot mutatnak, míg czinkfoncsorral pozitivot, ha az átvonuló hidrogén vagy széndioxidgáz nincs teljesen megszabadítva az oxigéntől. A tisztított és melegített cső negativ elektromossága kihülés után gyengült, de előbbi erősségét ismét eléri, ha a csövet alkohollángon melegítették. Ez akárhányszor ismételhető.

Christiansen azt hiszi, hogy a negativ elektromosságot az üvegből kiváló nátriumkationok a tiszta higanyhoz való vándorlása idézte elő s ezek számának csökkenése miatt gyengül az elektromosság is. Az üvegcső melegítése ismét helyreállítja az egyensúlyi állapotot.

Különböző üvegcsövek alkalmazása révén kiderült, hogy míg a tisztított és melegített üvegcsövek tiszta higanynyal érintkezve mindig negativ elektromosokká lesznek, a czinkamalgámmal érintkezők elektromossága egyéb körülményektől függ, melyek miatt az eredményt nem is lehet előre megmondani. Hatása van az üvegcső felületének és az oxigén jelenlétének is. Az első zárási áram gyengébb a jó vezető thüringiai üveg használatánál, de erős a rosszul vezető cseh üveg esetében.

Következtetések. A felsorolt kisérletek alapján Christiansen azt hiszi, hogy a dörzsölés egymagában még nem idéz elő elektromosságot. A dörzsölésnek tulajdonított hatások chemiai bomlásoktól erednek, melyek az érintkezéskor kezdődnek és a szétválasztáskor befejeztetnek. A Helmholtz föltételezte kettős rétegek képződése a kettős atómok vagy molekulák rendezkedésének tekintendő, a midőn is a kationok a pozitiv réteget alkotják, az anionok pedig negativot. A testek szétválasztásakor a kationok az egyik testen tapadva maradnak, az anionok a másikon; ez okozza a testek elektromos töltését. Az elektromosság tehát mindig az ionokkal karöltve jár. Ez a felfogás is Helmholtz-nak ama nézetére támaszkodik, mely szerint minden atómnak nagyságához mért töltése van, mely pozitiv vagy negativ a szerint, a mint kation vagy anion gyanánt szerepel. A kettőnek egyesülése adja az elektromosan közömbös molekulát. Azzal az ellenvetéssel szemben, hogy ez esetben az elektromos testnek, pl. az elektromos gép

pozitiv gyűjtőjének súlyban növekednie kellene, számítással kimutatható, hogy az ily növekedés (vagy veszteség) oly rendkivüli csekély, hogy jóformán sohasem lesz észlelhető.

Kiinduló pontul tehát most azt kellene venni, hogy az elektromosság sohasem létezhetik az atómokon kivül. Még a fémekben is csak az ionok közvetíthetik az elektromosság mozgását. Ily föltevés segélyével talán meg lehet majd magyarázni azt az összefüggést, meiy az elektromosság és a hő vezetése között van.

A statikai elektromosságra nézve szigetelőket, félvezetőket és vezetőket szokás megkülönböztetni. Az itt közölt felfogás szerint helyesebb volna négy csoportot felállítani. És pedig:

1. Szigetelőket vagy dielektromos testeket. Ezekben az ionok vagy mozdulatlanok vagy nyugalmi helyzetök körül rezgő mozgásban levők.

2. Fémeket, melyekben az ionok szabadon mozoghatnak, vagy töltéseiket kicserélhetik.

3. Elektroliteteket, melyekben az ionok kissebb-nagyobb surlódással mozoghatnak. (Itt főleg az üveg veendő figyelembe.)

4. Oly testeket, melyek a vízhez hasonlóan vagy csekély számú ionokat tartalmaznak, vagy azok híjával vannak, de az ionok mozgását nem akadályozzák (hidridek). A dörzsölésnél gummi és zselatin használhatók. A kisérletek tanusága szerint a fémek vagy foncsoraik a többi csoport testeit pozitiv elektromosokká teszik, ha az oxigén el van távolítva. Ellenben oxigénben, vagy pedig oxigéntartalmú gázakban a szigetelők a fémekkel való dörzsöléskor a körülmények szerint pozitiv vagy negativ elektromosságra tesznek szert. Az oxigén kiváló szerepe bizonyára összefügg azzal, hogy könnyen dissociálható; ezt tanusítja az ózon képződése is.

Az elektromosságnak vezetőkön való eloszlása is máskép értelmezendő, mint előbb, a mennyiben most az ionoknak véges számú, habár milliók szerint számítandó mennyiségével van dolgunk; ezek egyenlő töltéssel vannak ellátva s a felületen való elosztódásuk lesz megállapítandó. A valóságban a kérdés szokásos megoldása elegendő.

Christiansen a dörzsölési elektromosságról való felfogását nem is tekinti egészen újnak, a mennyiben Buff és Andrews kisérletei a folyadékok elektromozásáról, továbbá Lippmann, Ostwald, Nernst vizsgálatai az elektrolittel megtöltött leydeni palaczk elektromos töltésére vonatkozólag, Thomson kutatásai a cseppek elektromosságáról, végre Faraday régibb kisérletei a gőzelektromosságról ezt a felfogást már előkészítették.

Az itt ismertetett vizsgálatok és kisérletek mindenesetre nagyon érdekesek és fontosak. A kérdést Christiansen még nem tekinti megoldottnak és a kutatások tovább folytatását tartja szükségesnek.

Csemez.

IRODALOM.

A Magy. Tud. Akad. Lukács Krisztina-pályadíjáról.

A M. Tud. Akadémia az 1892-iki nagygyűlésen a Lukács Krisztina nevére, Lukács Móricz-tól tett alapítványból a következő pályakérdést tűzte ki:

«Kivántatik a mathematika, vagy mathematikai physika egy oly fejezetének monographia-jellegű tárgyalása, melynek az utolsó évtizedek fejlődésében fontosabb szerep jutott.»

«Az Akadémia új eredmények bemutatását nem kivánja, de súlyt helyez a tárgynak egységes szempontból való kimerítő és önálló becsű előadására.»

E pályakérdésre 1894 deczember hó 30-ig, a kitűzött határidő lejártáig három pályamunka érkezett be:

az 1. számú czíme: «*A fény elektromágnességi elmélete*»; jeligéje: «*A haladás a tapasztalást kiséri*»;

a 2. számú czíme: «*A két független változót tartalmazó partialis differential-egyenletek elmélete és alkalmazása*»; jeligéje: «*Nemcsak a fizikai erők, hanem a szellemi nyilvánulások sem veszhetnek és semmisülhetnek meg*»;

a 3. számú czíme: «*Vonalgeometria. A vonalkoordináták elmélete és alkalmazása*»; jeligéje: «*Küzdj és bízva bízzál!*»

E pályamüvek elbirálására a Magyar Tud. Akadémia König Gyula és Fröhlich Izidor r. tagokból és Rados Gusztáv l. tagból álló bizottságot küldötte ki.

E bizottság jelentésének rövid kivonata a következő:

A 2. és 3. számú mathematikai tárgyú pályamunkák, a pályázat követelményeinek nem felelvén meg, jutalmazásra nem voltak ajánlhatók.

Az 1. számú pályamunkáról a bizottság a következőképen nyilatkozik:

«E pályamű egy oldalon írt sürű írású félíveken I—XIII. és 1—219 oldal terjedelmű bekötött kézirat.

I—VIII. oldalai az igen jó áttekintést nyujtó előszót, IX. oldala a műben használt jelölések táblázatát tüntetik elő, míg a X—XIII. oldalak a részletes tartalomjegyzéket foglalják magukban; ezen utóbbi szerint e mű XVI. fejezetbe sorozott 131 §-ból áll.

Tárgya a fényjelenségeknek elektromágnességi alapon való értelmezése azaz az összes optikai tüneményeknek, mint az általánosabb értelemben vett elektromágnesi jelenségek keretébe való besorozása és ezzel azon tudományos mechanismus tárgyalása, melynek segélyével a fényjelenségek az elektromágnességi felfogás alapján elméletileg megkonstruálhatók.

Szerző e tárgyával a kitűzött pályakérdés első követelményének megfelelt, a mennyiben ezzel az elméleti physikai disciplináknak egy tágas keretű, igen mélyre menő problemáját karolta fel, mely bár nem könnyű, de kétségkivül felette érdekes és következtetéseiben kisérleti szempontból is fontos, és lényeges része a modern physikai kutatás philosophiájának és speculativ segédeszközeinek. E problema, a fényjelenségek elektromágnesi felfogása, jelentékeny befolyást gyakorolt már eddig is a physika haladására.

De a pályamunka figyelmes átolvasása csakhamar azt a meggyőződést érleli, hogy ez a pályakérdés második főkövetelményének is eleget tesz.

A munka ugyanis alapos tanulmányozásra és az idetartozó irodalom teljes ismeretére vall. Hogy fejtegetéseinek alkalmas alapot teremthessen, kiinduló pontjául az oly fényelméleti és elektromossági tételeket és ismereteket veszi, melyek a magyar tudományos irodalomban már fel lévén dolgozva, közvetetlenül hozzáférhető anyagot nyujtottak.

Ezen az alapon épülő művét szerzője rendszeres, világos, rövid és szabatos tárgyalásban terjeszti elő; minden fejezet tárgyának lényeges része helyesen van kiszemelve és kidomborítva s e részek a kevésbbé fontos részletek elhagyásával oly egységesen és egymással szoros összefüggésben vannak tárgyalva, hogy szerző e művével az elektromágnességi fényelmélet jelen állásának áttekinthető egész képét adja.

De a szerző nem szorítkozik csupán az irodalomban fellelhető tudományos eredmények egységes egybeolvasztására, hanem több helyen figyelemreméltó újításokkal is fellép.

Így munkája egyöntetűsége czéljából több új fogalmat hozott be, alaposan igazolván szükséges voltukat és előnyüket a megfelelő régiek felett; továbbá több helyen kimutatja az eddig a nemzetközi irodalomban közzétett több rendbeli szerzőktől származó s e tárgyra vonatkozó fejtegetések egyes részeinek hiányosságát vagy helytelen voltát és maga több fejezetben részint új eredményeket nyújt, részint lényeges javításokat és bővítéseket közöl.

Említést érdemelnek ezen önálló lépései közül a következők:

A 12. §-ban (16. l.) a *mágnességi eltolódást*, a 21. §-ban (22. l.) a *mágnességi áramot* hozza be, melyekkel a mágnességi inductiót kiküszöböli s a mágnességi vonatkozásokat az elektromosokkal teljesen egyöntetűen tárgyalja; behozza továbbá az *elektromos erők ellipsoidját* és az *elektro-*

mossági eltolódások ellipsoidját (48. és 49. §., 71. és 73. l.) és ezeknek alapján új módszer segélyével találja a belső és a külső konikus refractiót.

A 27. §-ban igen egyszerűen és szigorúan származtatja POYNTING-nek az elektromágnességi energia terjedésére (sugárzására) vonatkozó nevezetes tételét (33—34. l. és 28. §. 35—36. l.); az V. fejezetben a fényhullámok terjedését általános kristályos közegekben vizsgálván meg, kimutatja, hogy a fény terjedési sebességére vonatkozó FRESNEL-féle képlet csak speciális esete a tőle találtnak; a VII. fejezetben a félvezető kristályos közegek elektromágnességi alapegyenleteit állapítja meg.

Az elektromossági és a mágnességi hullámok törését és visszaverődését tárgyalja: a homogén és isotrop közegek esetében az erre vonatkozó egyenletrendszereket eddig még sehol nem található teljességben állítja elő (IX. fejezet, 159—161. l.), még a kristályos közegek esetében az elméletet teljesen kifejti és az előző eredményeket mint ezen utóbbiak egyszerű eseteit találja (X. fejezet); ugyancsak a reflexiót és refractiót a félvezetőkre nézve tárgyalván, az ismert képlet-rendszert kiegészíti (XII. fejezet) és kimutatja, hogy ennek speciális esete az ú. n. WIENER-féle interferentia-jelenségek értelmezésére alkalmas.

A XVI. fejezetben a fény polározása síkjának a mágnességi erők által létesített elforgatását tárgyalja a HALL-féle jelenség segélyével; eredménye az eddigiek egyikével sem egyezik teljesen; végül egy eddig majdnem teljesen parlagon heverő vagy legalább eredménytelenül mivelt térre lép: megvizsgálja ugyanis a dielektromos és a félvezető közegek *mozgásának* befolyását a fény terjedési sebességére.

A pályaműben a mathematikai szempontok lépnek előtérbe és e tekintetben irálya szabatos és tömör; a physikai viszonyok és vonatkozások tárgyalása és értelmezése helyenként részletesebb lehetett volna, mely körülmény különösen a munka kiadása esetében lesz szem előtt tartandó.

Összefoglalva a fent kifejtetteket, a bizottság úgy találja, hogy a nevezett 1. számú, «*A fény elektromossági elmélete*» című, «*A haladás a tapasztalást kiséri*» jeligéjű pályamunka a pályázat minden lényeges feltételének megfelel s ennek alapján javasolja, hogy a pályadíj a nevezett pályamunka szerzőjének odaítéltessék és kiadassék.»

A bizottság javaslata elfogadtatvan, a felbontott jeligés levélből dr. SUTÁK JÓZSEF neve tűnt elő.

*

Őszinte örömmel fogadtuk a hírt, hogy a megjutalmazott pályamunka szerzője dr. SUTÁK JÓZSEF, a ki — mióta irodalmi működését a Math. és Phys. Lapokban megkezdte — Társulatunk egyik legbuzgóbb és legmunkásabb tagja. Fogadja dr. SUTÁK az elért szép sikerhez legmelegebb üdvözletünket.

A szerkesztőség.

A Magy. Tud. Akad. uj mathematikai jutalomtétele.

Az algebra egyik fontos fejezete, mely már is önálló tudományágnak tekinthető, a lineár helyettesítések elméletéből kiindulva különösen a bilineár és négyzetes alakok vizsgálatával foglalkozik, és nagyjelentőségű alkalmazásokra talál nemcsak az egyenletek elméletében, hanem a mathematikának nem egy látszólag távolabb álló fejezetében.

Kivántatik egy oly munka megírása, mely 20—25 ívnyi terjedelemben az ide vonatkozó szakirodalom gondos és rendszeres fölhasználásával az algebra e részének jól áttekinthető kézikönyvét nyújtja.

Jutalma a Lukács Krisztina nevére Lukács Móricz által tett alapítványból 1000 frt.

Pályázni kivánók fölhivatnak, hogy a munka tervezetét és elkészítése határidejét 1895 szeptember 30-káig a főtitkári hivatalnál nyujtsák be.

*

Winkelmann, Handbuch der Physik. II. III. Band. Breslau, Trewendt 1893—1895. (II. köt. 855 old., III. köt. 1. rész 546, 2. rész 592 oldal.) Ára 25 és 32 márka.

A nagyterjedelmű mű, melynek második és harmadik kötete előttünk fekszik, első kötetéről e lapok első évfolyamában * értekeztünk. Jó nevű német physikusok, kiknek nagyobb része a tudomány előbbrevitelén tevékenyen vesz részt, egyesültek e kézikönyv szerkesztésére. A második kötet a fénytannak van szentelve. Jó benyomást tesz mindenekelőtt a tárgy összeállítása, mely nagyjából megtartja ugyan a határt a geometriai és a physikai optika között, a nélkül azonban hogy ezeket oly mereven felállítaná, a mint ezt más, hasonló irányú művekben találjuk, holott a határvonal e két fejezet között úgy sem vonható meg szigorúan, a mennyiben inkább didaktikai értékkel bir, s nem a dolog lényegében keresendő. A geometriai optikában mint hypothetikus elem szerepel a fénysugár, melynek itt hasonló szerepe jut, mint az Ampère-féle áramelemnek, hogy segítségével a hatás integrális törvénye megállapíttassék.

A geometriai optikai részt Czapski írta, a fény természetére vonatkozó részeket pedig Drude. A speciálisabb természetű fejezeteket, mint p. o. a színképelemzéről Kayser értekezik, mint ki ezen részszel különösen foglalkozik; a photometriát megírta Brodhun, a phosphorescentiát, a fény chemiai hatásáról szóló reszt az egész mű szerkesztője, Winkelmann, a fény sebességéről értekező igen kimerítő részt Auerbach; a törési viszonyok

* L. *Math. Phys. Lapok* I. 91.

meghatározásáról Pulfrich, a scintillatioról Exner Károly, az interferentiáról és a fény elhajlásáról pedig Feussner ír.

A fény sebességének meghatározására czélzó, oly jól megegyező eredményeket szolgáltató módszerek után Auerbach a fénynek különféle anyagokban való terjedéséről szól; továbbá vizsgálat alá fogja a fényforrás befolyását a fény terjedési sebességére. Ez a befolyás a fény intenzitására és színére, azaz a hullámhosszra vonatkozik. Mindkét irányban a vizsgálatok nem tarthatók befejezetteknek. Ugyanilyen állapotban van a kérdés a fényterjesztő közeg mozgását illetőleg, mely szintén nyílt kérdésnek tekintendő.

A geometriai optika bevezetésében Czapski mindenekelőtt a disciplina határait iparkodik megállapítani. A következő négy, tapasztalatilag igazolt törvényre építi a geometriai optika egész rendszerét: 1. a fény egyenes terjedésére, 2. a fénynyaláb egyes részeinek egymástól való függetlenségére, 3. a rendes tükrözés és 4. a rendes fénytörés törvényére. Nem szabad azonban felednünk, hogy ez a négy törvény csak megközelítés, minthogy a tapasztalással szigorúan nem egyezik meg: a fénysugár difractiot szenved, a visszaverődő sugár a tükröző közegbe bizonyos mélységig behatol stb.

A visszaverődésről és a törésről szóló fejezetet a fény *legrövidebb útjáról* való tétel vezeti be, s ebből mint következtetés a Malus-féle tétel folyik, mely szerint valamely felületre merőleges sugárrendszer tetszőleges számu visszaverődés és törés után merőleges marad ugyane felületre.

Abbe az optikai képek szerkesztését tisztán geometriai feladatként fogja fel, mely a physikai viszonyoktól voltaképen teljesen független. Alapjául csupán csak azok a mathematikai vonatkozások szolgálnak, melyek érvénybe lépnek, valahányszor két tér egymáshoz oly vonatkozásban van, hogy az egyikben létező képződmény a másikban képet alkot. Mint az optikai leképezés általános törvényei a következők szerepelnek: 1. a leképezés egyértelmű, 2. az egyenes vonalon levő pontok képei szintén egyenes vonalon fekszenek, 3. a tárgytérben levő sík képe a képtérben ismét sík.

Az optikai kép keletkezését vékony fénynyalábokkal a tengelyhez közel centrált gömbfelületeken vizsgálja, s evvel a lencsék és lencserendszerek alaptulajdonságait tárgyalja. A második eset az astigmatikus törés, azaz ferdén beeső fénynyalábok esete. A leképezés határainak mesterséges tágítása a gömbi eltérés és az aplanatismus elméletére vezet.

Ezek után a szerző a dioptrikai rendszerek chromatikus eltéréseit, az achromasia feltételeit és a sphaerikus aberratio függését a hullámhossztól tárgyalja.

Következik a fénysugár útja a prismában, a színkép, az optikai készülékek beható tárgyalása, különös tekintettel az optikai rendszerek nyilásától függő tulajdonságokra, minő p. o. a penetráló képesség stb.

Az optikai készülékeket a szerző két csoportra osztja: 1. vetítő rendszerek, minő a szem, vagy a photographiai kamara, 2. a látást támogató készülékek (nagyitó, mikroskóp, teleskóp).

A következő fejezetben STRAUBEL a folytonosan változó törésmutatójú közegek dioptrikáját tárgyalja, a midőn mindenekelőtt a fénytrajectoriának differentialegyenletét felállítja és alkalmazását mutatja a szem kristály lencséjén, továbbá a csillagászati és földi sugártörésen.

A fontosabb fejezetek között említendő ezek után a színképelemzés, a photometria, a fluorescentia és phosphorescentia fejezete. Az utóbbiban WIEDEMANN EILHARD nyomán photo-, elektro-, chemi-, thermo-, tribo- és krystalloluminiscentiát különböztet meg. A fejezet végén még ugyancsak WIEDEMANN kisérletei említtetnek, melyekkel sikerült neki a folyadékok fluorescentiáját phosphorescentiára átváltoztatni, az által, hogy a fluorescáló folyadékot zselatinnal megfagyasztotta, mi a moleculák szabad mozgékonyságát megakadályozta.

A fény chemiai hatásának tárgyalása után, melyben a szerző (WINKELMANN) kiemeli, hogy újabb vizsgálatok szerint az ezüsthalogen-vegyületekhez kevert sensibilisatorok (eosin, erithrosin stb.) az említett sók fényérzékenységét az egész színképre kiterjesztik, következnek a tulajdonképi theoretikai optikai fejezetek: interferentia, fényelhajlás (diffractio vagy inflexio); a fény természetére vonatkozó nézetek, kapcsolatban a polározott fény előállításával; a természetes és a részben polározott fény különbsége; a fénymozgás analytikai tárgyalása, a fényaether hypothetikus sűrűsége; a fény elmélete átlátszó testek számára és a ponderabilis testek befolyása a fénymozgásra; a különféle elméletek összehasonlítása az elektromagnetikus fényelmélet eredményeivel; az anomális dispersio elmélete, a kettős törés, rotatiopolározás, a fénymozgás törvényei absorbeáló közegek számára, az elhajlított fény polározása. Úgy mint az első kötetben itt is találunk analytikai tárgy- és névmutatót a könyv végén, csak hogy jóval alaposabbat, mint amaz volt.

A harmadik kötet két részből áll. Tárgya az elektromosság és a mágnesség. A legtöbb fejezet AUERBACH és GRAETZ tollából eredt. A kötet első részében az elektrostatika és az elektromos áramok foglaltatnak, a másodikban a mágnesség és az áramok külső hatásaiból folyó elektromagnetismus, elektrodynamika és inductio. Ebben a részben található még a pyro- és piezo-elektromosság tárgyalása, a melynek helye inkább az első részben lett volna. Az egész kötet befejezését az általános elektromossági elméletek alkotják.

A kötet első részét a potential elmélet nyitja meg. Az általános fogalommeghatározások után a Newton-féle térpotential tulajdonságai következnek,

s ezután mindjárt áttér a felületi potentialra és annak elektrostatikai alkalmazására.

Az elektrostatikában a következő fejezeteket találjuk: Tapasztalati tények, az elektromosság eloszlása a vezetőkön, munka és energia az elektromos térben, a sűrítők elmélete, accumulatorok és condensatorok, a capacitás mérése, elektromos kisütés, elektromozó gépek és hasonló készülékek (duplicator, replenisher stb.), elektroskópok és elektrometerek, a diëlektromos anyagok tulajdonságai, diëlektromos állandók meghatározása, elektrostrictio, Quincke, Duter és mások idevágó érdekes kisérleteivel, az elektromozott anyagok kettős törése.

Ezek után következik az *érintési elektromosság* a következő főbb szakaszokkal: feszültségi törvény, galván combinatiók; az elektromotoros erő meghatározása; vonalos felületi és térbeli áramok; árammérés a hozzávaló készülékekkel, u. m. tájolók, galvanometerek, elektrodynamometerek, voltameterek, elektromosság-számolók stb.; az ellenállás és vezetőképesség meghatározására szolgáló módszerek; az elektrolytikusan vezető testek vezetőképessége (oldatok, szilárd és ömlesztett sók), kristályok, gázok és lángok vezető képessége; kisütés és fényív; a fény befolyása elektromos tüneményekre; a Crookes- és Geissler-féle csövek tüneményei; thermoelektromosság; elektromos világítás; melegség és elektromos munka galvánlánczokban; elektrolysis, ionok vándorlása; elektromos endosmosis és megfordítása, azaz úgynevezett áramlási áramok, melyek akkor keletkeznek, midőn folyadék likacsos falon áramolva, elektromos áramot hoz létre; Helmholtz elektrolytikus elmélete és Dorn rávonatkozó igazoló kisérleti vizsgálatai; végül a polarisatio és az accumulatorok.

A kötet második része a mágnesség tanával kezdődik. Az alaptünemények után következik a sarkok közötti hatás, a mágneses tér, az erővonalak, a mágnesek szerkezete, távolbaható erejük, inductio, állandó és változó mágnesezés, coërcitíverő, telítés, permeabilitás, ernyőhatás, diamagnesség; a mágneses mérésekre szolgáló készülékek leírása, u. m. az intensitas és irány meghatározására; mágneses terek, fajlagos mágnesség, tartó képesség mágnesezése; a földmágnesség helyi eloszlás és időbeli változás szerint; a földmágnesség elmélete, a különféle testek mágnessége, ferromagnesség (a vas, nikkel, kobalt, aczél és mágnesvaskő mágnessége), para- és diamagnesség és elméletei; a mágnességvonatkozása más tüneményekhez, különösen a rugalmassághoz (deformatiok, magnetostrictio), továbbá mechanikai befolyásokhoz, a melegséghez és fényhez (polarisatiosík forgatása, Kerr-féle tünemény).

Az elektromagnesség a rendes előadásban, hol a Hall-féle és a rokon tünemények terjedelmes tárgyalását kiemelhetjük. Következik az elektrodynamika és az inductio; elektromos rezgések, az elektromos erő terje-

dése, MAXWELL elektromossági és mágnességi elmélete, újabb kutatásokkal bővítve; a magnességi és elektromos mennyiségek u. n. absolut mértéke és a nemzetközi absolut mértékrendszer; az inductio technikai alkalmazásai (dynamoelektromos gépek, erőátvitel, telephonia); pyro- és piëzoelektromosság; az elektromosság és mágnesség tüneményeire felállított magyarázó hypothesisek (távolbahatás, mechanikai elméletek, modellek, hydrodynamikai és örvényelméletek stb.).

A mit az első kötet ismertetésekor mondottunk, azt a második és harmadik kötet megjelenése után nagyobb biztossággal lehet ismételni. Oly kézikönyv ez, mely a száz helyen szétszórt vizsgálatokról jól érthető módon számol be. Szerkezetében van ugyan oly organikus hiba, melyet minden igyekezet daczára jóvá tenni nem lehet. Encyclopaedikus művek sorába való és ekként a középutat akarja megtartani az encyclopaedia és a kézikönyv alakja között. Az encyclopaediai alak azt kivánná, hogy valamely kivánt tárgyat vagy fogalommagyarázatot könnyen lehessen fellelni. Elég jó ugyan a tárgymutató, de azért kívánatos lett volna, ha különböző szedés és könnyen áttekinthető, egyöntetű tárgyalás e czélt elősegítette volna. De habár az encyclopaedia és a kézikönyv közt ingadozó alakja a könyvnek kétségkívül nem lehet előnyére, és ha alapos megvizsgáláskor itt-ott kifogásokat is tehetnénk, azért jo oldalait tekintve, a művet ismételve ajánlhatjuk a szaktársak figyelmébe.

Heller Ágost.

*

Dr. H. Kayser, Lehrbuch der Physik für Studierende. Második kiadás. Enke, Stuttgart. 1894. X+564 l. — Ára 11 márka.

KAYSER könyvének második kiadása (mintegy 100 oldallal bővítve) egyike a legjobb kis kézikönyveknek. Rendkívül világos és könnyen érthető módon tárgyalja a physika minden fontosabb kérdését s a hol egy kérdés vagy elmélet részletesebb ismertetésére nincsen tere — igen helyesen — közli a forrásokat is, a hol az olvasó további tájékozást szerezhet. Az egész művön egységes s igazán physikai felfogás szelleme vonul át, és a munka kis terjedelme daczára a tapasztalati tények, az elmélet, a mérési módszerek és eredményeik: a számadatok — még pedig a legujabb vizsgálatok felhasználásával — olyan szerencsésen vannak összefoglalva, hogy azok, a kik nem részletes tanulmányt keresnek, a physika mai állásáról jó áttekintést szereznek belőle. A többnyire vázlatos ábrák igen átnézetesen vannak rajzolva s méltán csatlakoznak a szöveg rövid és világos magyarázataihoz, úgy hogy az érdemes művet vezérfonalúl melegen ajánlhatjuk.

K. J.

MEGOLDOTT FELADATOK.

22. *Bizonyíttassék be a következő tétel: Ha az* (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) *pontpárok valamely kúpszeletre nézve konjugált párok, akkor az* $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$, $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ *pontpárok ugyane kúpszeletre nézve egyidőben konjugált vagy nem konjugált párok.* (Ha $A \equiv C_1$, $B \equiv D_1$, $C \equiv A$, $D \equiv B_1$, akkor a két utolsó pár összeesik és Hesse egyik tétele alapján mindig konjugált lesz.) (Klug.)

Harmadik megoldás Blau Ármin tanárjelölt úrtól Budapesten.

Legyenek az a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok polárisai. Ezek a feltétel értelmében rendre átmennek az A, B, C, D pontokon. Mivel az $|(a_1d_1), (b_1c_1)|$ egyenes az (A_1D_1, B_1C_1) pont polárisa, az a kijelentés, hogy $[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)]$ konjugált pontpárt alkotnak, így is fogalmazható, hogy az (AB, CD) pont az $|(a_1d_1), (b_1c_1)|$ egyenesen fekszik. Ugyancsak az, hogy $[(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$ konjugált pólusok, kifejezhető ekképen is: az $|(a_1b_1), (c_1d_1)|$ egyenes átmegy az (AB, CD) ponton.

A feladat megoldása czzel vissza van vezetve a következő geometriai tétel bebizonyítására:

Ha az a_1, b_1, c_1, d_1 *egyenesek rendre átmennek az* A, B, C, D *pontokon, ha továbbá az* (AB, CD), (a_1d_1), (b_1c_1) *pontok egy ugyanazon egyenesen vannak, akkor az* $|(a_1b_1), (c_1d_1)|$ *egyenes az* (AD, BC) *ponton megy át és megfordítva.*

Ennek bizonyítása pedig nagyon egyszerű. Tekintsük ugyanis AD (a_1d_1) és BC (b_1c_1) háromszögeket. Ezek perspektiv helyzetűek, ha (a_1b_1), (AD, BC) és (c_1d_1) egy egyenesen vannak. Ugyanekkor az $|(ad), (b_1c_1)|$ egyenes AB, CD egyenesek metszéspontján megy keresztül. Viszont, ha e három egyenes egy pontban találkozik, az előbbi három pontnak egy egyenesen kell feküdnie.

*

Negyedik megoldás Csillag Vilmos, műegyetemi tanársegéd úrtól.

Vegyünk föl a kúpszelet síkjában *négy* pontot: *A, B, C, D.* Ha e pontoknak a kúpszeletre vonatkozó polárisai rendre *a, b, c, d,* akkor az

$$(AB, CD). \quad (AD, BC)$$

pontok polárisai

$$(ab, cd), \quad (ad, bc).$$

Tűzzük ki most a feladatban említett konjugált pólusokat, t. i. *a*-n a A_1, *b*-n a B_1, *c*-n a C_1, *d*-n a D_1 pontot és írjuk még röviden

$$A_1D_1=u \qquad B_1C_1=v.$$

A keletkező

$$(adu) \quad \text{és} \quad (bcv)$$

két háromoldal akkor és csak akkor lesz *perspektiv* helyzetű, ha az

$$(u, v) \equiv (A_1D_1, B_1C_1)$$

megfelelő oldalpár az

$$(ab, dc)$$

tengelyben találkozik, vagyis, ha az (A_1D_1, B_1C_1) pont az (ab, cd) egyenesben, az (AB, CD) pont polárisában fekszik. Ebben és csupán ebben az esetben fognak a megfelelő csúcspárok összeköttetései

$$(ad, bc), \quad A_1B_1, \quad C_1D_1$$

egy czentrumba futni, vagyis az (A_1B_1, C_1D_1) pont az (ad, bc) egyenesben, az (AD, BC) pont polárisában feküdni.

Az előzők némi ismétlésével írhatjuk tehát, hogy az (A_1B_1, C_1D_1) pont akkor és csak akkor fekszik az (AD, BC) pont polárisában, ha egyszersmind az (A_1D_1, B_1C_1) pont az (AB, CD) pont polárisában van; más szóval az

$$[(AB, CD), (A_1D_1, B_1C_1)], \quad [(AD, BC), (A_1B_1, C_1D_1)]$$

pontpárok *egyidöben konjugált pólusok vagy nem.*

Természetesen a tételnek *duál* tétele is igaz; a bizonyításban csupán a nagy és kis betűk jelentését föl kell cserélni.

*

Ötödik megoldás dr. Suták József, kegyesrendi tanár úrtól Budapesten.

Az *A, B, C, D* pontokkal valamely kúpszeletre nézve konjugált pontok benne vannak megfelelően az *a, b, c, d* polárisaikban. Az $(AD, BC) \equiv E$

pont konjugáltjai benne vannak (a, d) $(b, c) \equiv e$ egyenesben; az $(AB, CD) \equiv F$ pont konjugáltjai pedig (a, b) $(c, d) \equiv f$ egyenesben.

Ha az A, B, C, D-hez konjugált pontokat A_1, B_1, C_1, D_1-et az a, b, c, d egyenceseken úgy választjuk meg, hogy $(A_1B_1, D_1C_1) \equiv E_1$ *pont az e egyenesen legyen, akkor kimutatom,* hogy $(A_1D_1, B_1C_1) \equiv F_1$ *pont az f egyenesben van:* azaz, *hogy* E, E_1 és F, F_1 *pontpárok egyszerre konjugáltak vagy nem.*

Messe ugyanis A_1B_1 az f egyenest X, a D_1C_1 pedig Y pontban; projicziáljuk azután a (c, d) czentrumból a D_1, Y, C_1, E_1 pontokat az e tengelyre s azután az e tengelyen nekik megfelelő pontokat az (a, b) czentrumból az A_1B_1 egyenesre, ez által a A_1, X, B_1, E_1 pontokhoz jutunk, tehát

$$(A_1XB_1E_1) = (D_1YC_1E_1),$$

azaz a két pontsor perspektiv helyzetű, miért is A_1D_1 és B_1C_1 csakugyan az e egyenesen találkoznak.

*

Hatodik megoldás (Ir. Steiner Lajos meteorologiai intézeti assistens úrtól Budapesten.

Legyen a kúpszelet egyenlete szimbolikus alakban írva:

$$a_x^2 = 0;$$

legyenek továbbá

A koordinátái	x_1,	x_2, x_3;	A_1 koordinátái	y_1,	y_2, y_3
B «	x_1',	x_2', x_3';	B_1 «	y_1',	y_2', y_3'
C «	x_1'',	x_2'', x_3'';	C_1 «	y_1'',	y_2'', y_3''
D «	x_1''',	x_2''', x_3''';	D_1 «	y_1''',	y_2''', y_3'''

akkor a tétel præmissái értelmében

$$a_x a_y = 0, \quad a_{x'} a_{y'} = 0, \quad a_{x''} a_{y''} = 0, \quad a_{x'''} a_{y'''} = 0.$$

Az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ egyenesek egyenletei igy írhatók:

$$u_x \equiv u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0, \quad v_z \equiv v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 = 0,$$

a hol

$$u_1 \equiv (xx')_1 \equiv x_2 x_3' - x_3 x_2'; \quad u_2 \equiv (xx')_2 \equiv x_3 x_1' - x_1 x_3'$$
$$u_3 \equiv (xx')_3 \equiv x_1 x_2' - x_2 x_1'$$
$$v_1 \equiv (x''x''')_1 \equiv x_2'' x_3''' - x_3'' x_2''', \quad v_2 \equiv (x''x''')_2 \equiv x_3'' x_1''' - x_1'' x_3'''$$
$$v_3 \equiv (x''x''')_3 \equiv x_1'' x_2''' - x_2'' x_1'''.$$

Az AB és DC egyenesek metszéspontjának E-nek koordinátái:

$z_1 \equiv (uv)_1 \equiv u_2v_3 - u_3v_2$, $z_2 \equiv (uv)_2 \equiv u_3v_1 - u_1v_3$, $z_3 \equiv (uv)_3 \equiv u_1v_2 - u_2v_1$;

hasonlóképen az A_1D_1 és B_1C_1 metszéspontjának, E_1-nek koordinátái:

$$z_1 \equiv (u'v')_1, \quad z_2 \equiv (u'v')_2, \quad z_3 \equiv (u'v')_3,$$

hol

$$u_1' \equiv (yy''')_1, \quad u_2' \equiv (yy''')_2, \quad u_3' \equiv (yy''')_3,$$
$$v_1' \equiv (y'y'')_1, \quad v_2' \equiv (y'y'')_2, \quad v_3' \equiv (y'y'')_3.$$

Az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ metszéspontjának, F-nek koordinátái:

$$t_1 \equiv (mn)_1, \quad t_2 \equiv (mn)_2, \quad t_3 \equiv (mn)_3,$$

hol

$$m_1 \equiv (xx''')_1, \quad m_2 \equiv (xx''')_2, \quad m_3 \equiv (xx''')_3,$$
$$n_1 \equiv (x'x'')_1, \quad n_2 \equiv (x'x'')_2, \quad n_3 \equiv (x'x'')_3.$$

Végre $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_1D_1}$ F_1 metszéspontjának koordinátái:

$$t_1' = (m'n')_1, \quad t_2' = (m'n')_2, \quad t_3' = (m'n')_3,$$

hol

$$m_1' = (yy')_1, \quad m_2' = (yy')_2, \quad m_3' = (yy')_3,$$
$$n_1' = (y''y''')_1, \quad n_2' = (y''y''')_2, \quad n_3' = (y''y''')_3.$$

E és E_1 konjugált pontpárt képeznek, ha $(auv)\,(au'v') = 0$,
F « F_1 « « « « $(amn)\,(am'n') = 0$.*

Ha sikerül kimutatnunk, hogy:

$$(auv)\,(au'v') = k\,(amn)\,(am'n'),$$

hol k állandó mennyiség, akkor ezzel tételünk be van bizonyítva. Ennek az egyenletnek fennállását nem nehéz bebizonyítani. Az

$$a_1, a_2, a_3; \quad b_1, b_2, b_3; \quad c_1, c_2, c_3; \quad d_1, d_2, d_3$$

mennyiségek között mindig fennállnak a következő azonosságok:

$$\begin{aligned}(ab)_3\,(cd)_3 - (ab)_3\,(cd)_2 &= b_1\,(acd) - a_1\,(bcd)\\ (ab)_3\,(cd)_1 - (ab)_1\,(cd)_3 &= b_2\,(acd) - a_2\,(bcd)\\ (ab)_1\,(cd)_2 - (ab)_2\,(cd)_1 &= b_3\,(acd) - a_3\,(bcd)\end{aligned} \qquad 1)$$

hol $(ab)_3$, $(cd)_3$ etc. másodrendű, (acd), (bcd), harmadrendű determinánsokat jelentenek, a melyeknek képezési törvénye a fentebbiek után ismeretes.

---

* $a_x a_y = 0$ egyenlet mintájára; (auv), $(au'v')$ etc.

$$\begin{vmatrix} a_1 & u_1 & v_1 \\ a_2 & u_2 & v_2 \\ a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1' & u_1' & v_1' \\ a_2' & u_2' & v_2' \\ a_3' & u_3' & v_3' \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

determinánsokat jelentik.

Az 1) egyenlőségek segítségével könnyen nyerjük:

$(auv)=a_{x'}(xx''x''')-a_x(x'x''x'')$, $(au'v')=a_{y'''}(yy'y'')-a_y(y'y''y''')$;

(amn) és $(am'n')$ háromféleképen bontathatók fel:

$$\begin{aligned}
(amn) &= a_{x''}(xx'x''')-a_{x'}(xx''x'''),\\
(amn) &= a_{x'''}(xx'x'')-a_x(x'x''x'''),\\
(amn) &= a_{x''}(xx'x''')-a_{x'}(xx''x'''),\\
(am'n') &= a_{y''}(yy'y''')-a_{y'''}(yy'y''),\\
(am'n') &= a_{y''}(yy'y''')-a_{y'''}(yy'y'''),\\
(am'n') &= a_{y'}(yy''y''')-a_y(y'y''y''');
\end{aligned}$$

Az egy sorban lévő kifejezések szorzása után és az

$$a_xa_y=a_xa_{y'}=a_{x'}a_{y''}=a_{x''}a_{y'''}=0$$

egyenlőségek tekintetbe vételével — ered:

$$\begin{aligned}
(auv)(au'v') &= a_{x'}a_{y'''}(xx''x''')(yy'y'')-a_xa_{y'''}(x'x''x''')(yy'y'')-\\
&\quad -a_{x'}a_{y''}(xx''x''')(y'y''y'''),\\
(amn)(am'n') &= a_{x'}a_{y'''}(xx''x''')(yy'y'')-a_{x''}a_{y'''}(xx'x''')(yy'y''')-\\
&\quad -a_{x'}a_{y''}(xx''x''')(yy'y'''),\\
(amn)(am'n') &= a_{x''}a_{y''}(xx''x''')(yy'y''')+a_xa_{y'''}(x'x''x''')(yy'y'')-\\
&\quad -a_xa_{y''}(x'x''x''')(yy'y'''),\\
(amn)(am'n') &= a_{x''}a_{y'}(xx'x''')(yy''y''')-a_{x''}a_y(xx''x''')(y'y''y''')-\\
&\quad -a_{x'}a_y(xx''x''')(y'y''y''').
\end{aligned}$$

Ha $(amn)(am'n')$ három utolsó alakjából

$$(amn)(am'n')-(amn)(am'n')-(amn)(am'n')=-(amn)(am'n')$$

kifejezést képezzük, lesz:

$$\begin{aligned}
-(amn)(am'n') &= a_{x'}a_{y'''}(xx''x''')(yy'y'')-a_xa_{y'''}(x'x''x''')(yy'y'')-\\
&\quad -a_{x'}a_y(xx''x''')(y'y''y''')-a_{x''}(xx'x''')[(yy'y'')a_{y'''}+\\
&\quad +(yy''y''')a_{y'}-(y'y''y''')a_y]-a_{y''}(yy'y''')[(xx''x''')a_{x'}+\\
&\quad +(xx'x'')a_{y'''}-(x'x''x''')a_x].
\end{aligned}$$

A [ ] közt levő kifejezések az:

$$(abc)d_x-(abd)c_x+(acd)b_x-(bcd)a_x=0^*$$

---

* d_x, c_x etc. $d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3$, $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$ etc. kifejezéseket jelentik.

azonosságban kifejezett tétel alapján

$$(yy'y''')\,a_{y''}, \quad (xx'x''')\,a_{x''}$$

alakokkal helyettesíthetők; $-(amn)\,(am'n')$ nyert alakját összevetve $(auv)\,(au'v')$ alakjával, nyerjük:

$$-(amn)\,(am'n')=(auv)\,(au'v')-2a_{x''}a_{y''}\,(xx'x''')\,(yy'y'''),$$

és mivel

$$a_{x''}a_{y''}=0$$

azért

$$(auv)\,(au'v')=-(amn)\,(am'n').$$

Fennebbi k állandónk tehát -1-gyel egyenlő.

A nyert egyenletből a bebizonyítandó tétel egyszerűen leolvasható. Az

$$(auv)\,(au'v')+(amn)\,(am'n')=0$$

egyenlet alakjából egyszersmind kitűnik a bebizonyított tétel invariáns jellege, azaz, hogy a mértani alakok projekcziója alkalmával is megtartja érvényességét, a mi különben előre látható volt.

*

Dr. Steiner Lajos úr e feladatot synthetikai úton is megoldotta. *Szerk.*

FELADATOK.

31. *Adva van az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder és a P pont. Az A_1P, A_2P, A_3P illetőleg A_4P metszéspontja az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, illetőleg $A_1A_2A_3$ sikkal legyen B_1, B_2, B_3 illetőleg B_4. Megvizsgálandó ama P pontok geometriai helye, a melyekre nézve a $B_1B_2B_3B_4$ tetraeder köbtartalma állandó.* (Tőtössy.)

VEGYESEK.

Bolygórendszerünk határairól.

A távolság, mely a hozzánk legközelebb eső állócsillagot a Naptól elválasztja, 275 ezerszer nagyobb, mint a Napnak a Földtől való közepes távolsága, és ebben az óriási térben mai tudásunk szerint Neptunus a legszélső bolygó, mely e köznek csak első 9170-edében kering. Nem utasíthatjuk tehát mereven vissza a kérdést, valjon Neptunusban tényleg bolygórendszerünk határát ismerjük-e? Ezt feltennünk nyomós ok épen nem késztet, mert az ekliptikai öv átkutatása sem biztosíthat arról, hogy az esetlegesen meglevő neptunusontúli bolygót már meg kellett volna lelni, mely okvetetlenül halványabb, mint a 8-adrendű kis csillag, melyet most határul tekintünk, s mely egy nap lefolyása alatt legfölebb 10″-nyi útat tehet meg az égen. Igy megfigyelte pl. hosszú idővel felfedeztetése előtt Flamsteed 1690-ben öt ízben, Lemonnier 1768—69-ben nyolcz ízben az Uranust, és Lalande 1795-ben kétszer a Neptunust, a nélkül, hogy bolygó természetét felismerte volna. De azt sem várhatjuk még most, hogy az esetleges új bolygó Neptunussal éreztetett perturbatióival árulja el létezését és helyét, mint tette Neptunus Uranussal szemben, mert e bolygó kitünő Newcomb-féle táblái daczára annak, hogy a most majd százados Lalande-féle megfigyelést is felölelte, még annyira pontosak, hogy a megfigyelések messzemenő pontosságán belül sem lehet zavaró külső bolygóra gondolni.

Másrészt egyenes bizonyítékunk van arra nézve, hogy Napunk hatáskőre a Neptunus pályáján messze túl terjed, s hogy a szomszédos állócsillagokkal szemben elég hatalmas arra, hogy ily nagy távolságokban is bolygót állandó keringésben magához lánczoljon. Az Olbers-, Pons- és Halley-féle periodikus üstökösök nap-távoli pontja a Neptunus pályáján kívül esik, az augusztusi, szintén periodikus hullócsillagraj még ezeknél is messzebb hatol a világür mélyeibe és még inkább szól ez számos üstökösről, melyet a pályameghatározás biztosan elliptikusnak mond, ha eddig mindjárt csak egyetlenegy megjelenése képezte a megfigyelés tárgyát.

A kérdés tehát az, valjon mily módszer szerint keresendő az esetleges bolygó, miután létezését eleve eltagadnunk nem szabad? Az előbb mondott okoknál fogva a puszta keresés előreláthatólag sikerre vezetni nem fog, mert valószínűséggel csak annyit várhatunk, hogy az új égi test az ekliptika síkjához közel mozog. De míg az újkor legnagyobb távcsöveiben sem várhatunk határozott korongot és a lassú napi mozgás ugyancsak megnehezíti a feltalálást. Az elmélet továbbá nem ad legcsekélyebb fel-

világosítást sem arra nézve, hogy az ekliptika mentén hol volna keresendő az új bolygó, mint tette ezt Neptunus esetében.

Míg tehát ez úton a kérdésnek csak valószínű eldöntése is teljesen a véletlenségre volna bizva, az újabb kor az üstökösök és hullócsillagokban meg ezek szoros összefüggésében módot nyújtott a döntésre, módot, melynek elméleti részét már Laplace tisztázta. Mindinkább valószínűvé válik ugyanis, hogy a csekély exentricitással biró, bolygórendszerünk állandó tagjaivá lett üstökösök azon parabolikus vagy csak évezredes periodusokkal biró üstökösök csoportjából kerülnek ki, melyek útja valamikor egy hatalmas bolygó szomszédságában vezetett el, úgy hogy legalább rövid időre ez tekinthető középponti test gyanánt, míg a Nap csak a háborgó test szerepét viszi, a mennyiben a bolygó hatása a Napét ez idő alatt messze túlszárnyalja. Ily esetnek legfrappánsabb példája az 1770-iki Lexell-féle üstökös, melynek első pályameghatározása közel $5^{3}/_{4}$ évnyi keringési időhez vezetett. Mivel addig ily erős ellipticitás üstökös pályánál nem mutatkozott, az eredmény sokkal feltűnőbb volt, semhogy a számítások legszigorúbb ellenőrzése nélkül bizalommal el lehetett volna fogadni, s ezért Burckhardt a megfigyelések új diszkussziója s a használt összehasonlítási csillagok helyzetének pontosabb meghatározása alapján ismételte a számítást, mely Lexell pályáját igazolta, a mennyiben a keringési idő 5 év 209,4 napnyinak adódott. Ugyanazon eredményhez jutott később Clausen és Leverrier, úgy hogy Lexell és Burckhardt eredménye kétséget kizáróan áll. De kételyeket okozott, valjon mért nem volt látható ezen számítás alapján az üstökös 1776 márcziusában, vagy 1781 októberében s í. t.? holott nála gyengébb égi testek nem kerülték el a figyelmet? A felelet e kérdésre teljesen váratlan volt: a helyzet kiszámítása mutatta, hogy az üstökös 1767 május 27-ikén oly közel került Jupiterhez, hogy ennek hatása egy időn át a Napét tetemesen felülmulta, és az addigi, a Lexellé-től teljesen elütő pályát a Lexell-Burckhardt-féle pályává módosította. E pályában 1770 junius 28-án tetemesen megközelítette a Földet, míg augustus 13-án 109 millió km. távolságban elérte peribéliumát; 1776 márcziusában tényleg visszatért ugyane pályában a Naphoz, csakhogy akkor a Föld pályájának átellenes pontjára állva 312 millió kmnyire került tőle, s a két égitest között állott a Nap, úgy hogy az üstökös ez idötájt sehogy sem volt látható. 1779 augusztus 23-ikán, miután az üstökös már 12 évig járta a Lexell-féle pályát, ismét nagyon közel került Jupiterhez, oly közel, hogy e bolygó s 4-dik holdja között átment. E távolságban Jupiter hatása a Napénál 24-szer erősebb volt, s a pálya újra megváltozott; mint az eredeti pálya, úgy ez is sokkal excentrikusabb lett.

Ez üstökössel, minden valószínűség szerint, még egyszer találkozunk, mert alig szenved kétséget, hogy az 1889-ik év V. vagy Brooks-féle üstö-

kössel azonos, melyre nézve CHANDLER kimutatta, hogy ugyancsak 1779-ben Jupiterhez közel járva, pályájának teljes átváltozását kellett elszenvednie.

Hogy miben áll tulajdonképen az üstökösök és hullócsillagok rokonsága, ma még teljes biztonsággal nem mondhatjuk; elég az hozzá, hogy az augusztusi (Perseidák), a november 13-diki (Leonidák) és a november 28-diki (Andromedidák) raj, illetve az 1862. III., az 1866. I. és a Biela-féle üstökös pályájában halad. Valószínű, hogy az üstököst alkotó «kosmikus felhőt» valamely bolygó közelsége miatt a belső összefüggését legyőző vonzáskülönbség szétbontja és rajjá alakítja, miként ez szétoszló üstökösök egy nehány esetében észlelhető is volt. Az előbb említett 1889-iki Brooks-féle üstökös 1886 májusában Jupiter tetemes közelsége miatt tényleg szenvedett ily oszlást. Azonkívül tudjuk, hogy több száz meteorraj van, melynek kisugárzási pontja üstökösök csomópontjaival összeesik, úgy hogy ezek számára is az üstökössel való pályaazonosság majdnem bizonyosságig emelkedik.

Ezen szoros, különben bármily más jelenségen alapuló kapocsnál fogva természetes, hogy a meteorrajok — melyek talán szaporaságuknál fogva e czélra még kényelmesebb segédeszközt is nyújthatnak — nagy bolygókhoz való közeledésük alkalmával hasonló pályaátalakulásokat szenvednek, mint az üstökösök, és ennek támogatásául nem érdektelen a megjegyzés, hogy LEVERRIER valószínűvé tudta tenni, hogy a nagy novemberi rajt — a leonidákat — 126-ban Kr. u. Uranus vonzása kényszerítette mai pályájába, mely a Földét évente metszi.

Most már eléggé érthető az eszmemenet, mely valamely üstökös vagy meteorraj jelenlegi pályájából következtet azokra a háborgásokra, melyeket a pálya valamely nagy bolygó közelsége folytán szenvedett, és ebből megfordítva megállapítani iparkodik, valjon ezen bolygó nem-e még valamely ismeretlen, Neptunuson túl keringő égi test? FORBES buvárkodik ez irányban, s bár kutatásainak eddig nincs meg még a gyakorlati eredményük, kétségtelen, hogy a vezérelv helyes. Ha valószínűnek fogadjuk el a gondolatot, hogy a rövid keringési idővel biró üstökösök és meteorrajok különösen a szélső bolygók vonzása folytán lettek állandó polgárai bolygórendszerünknek: akkor a Forbes-féle methodus a legkényelmesebb és bizonyára a siker kilátásával leginkább kecsegtető út a Neptunuson túli bolygó felfedezésére.

A módszer analytikai részét, mint említők, már LAPLACE szolgáltatta, ki a Mécanique céleste IX. könyvében az üstököspályák megváltozását kutatja, ha ezek valamely bolygó közel szomszédságában haladnak el. A megoldás egyszerű és teljes, de teljes sikerrel még sem használható a bennünket érdeklő problemánál, melynek kérdését inkább ez alakban tehetjük föl: Tekinthetjük-e valamely periodikus üstökös jelenlegi pályáját olyan-

nak, melyet valamely nagy bolygó közelsége egy eredetileg parabolás pályából alkotott? Az igaz, hogy ilyetén alakban nem gondolunk ama lehetőséggel, hogy az üstökös többszörös közelítéssel nyerte el jelenlegi pályaformáját.

A gondolatmenet, melyet LAPLACE nyomán TISSERAND * s ez után CALLANDREAU ** követ, velejében a következő: Ha valamely üstökös oly közel jut egy nagy bolygóhoz, hogy ennek következtében pályája egészen átalakul, a három test problemájának azon különleges esetével állunk szemben, melyben a háborgó bolygó befolyása egy bizonyos időn át a czentrális testét tetemesen felülmúlja. Mivel az e fajta számításoknál valami messzemenő pontosság úgy sem várható, úgy szokás eljárni, hogy a bolygót határtávolságával mint sugárral leírt gömbbel kerítjük be, melynek mérete azáltal van adva, hogy belsejében a bolygó perturbáló erejének viszonya a Nap közvetlen vonzásához mindenütt nagyobb legyen, mint a Nap perturbáló vonzásának viszonya a bolygó közvetlen határához. Azon rövid időn át, melyet az üstökös a határtávolságon belül tölt, azután a Nap háborgó befolyását teljesen el szokás hanyagolni.

A határtávolság tetszésszerinti irányban szigorúan nem is gömb, hanem a következő felülettel van adva:

$$\rho = r \sqrt[5]{\frac{m^2}{\sqrt{1+3\cos^2 v}}}$$

ha r a bolygó közepes pályasugarát, m a Naphoz viszonyított tömegét és v a bolygó és üstökös a Napnál képezett szögletét jelenti.

Az üstökös pálya eredeti elemeivel meghatározhatjuk most a «határfelület» ama pontját, melyben az üstökös a nagy bolygó túlnyomó, sőt kizárólagosnak tekinthető vonzása körébe lép. E felületen belül, melyet csekély és itt számba sem jövő elhanyagolással gömbnek is szabad tekintenünk, az üstökös a két test problemája értelmében halad, miáltal a hatáskörből való kilépésének pontja és sebessége is adott, úgy hogy ezáltal az átalakított pálya állandói teljes meghatározást nyernek. Azután csak formális átirás dolga, hogy a végeredményben az új pálya elemei lehetőleg a nagy bolygó körüli pálya elemeinek kikerülésével az eredeti pálya állandóinak functiója gyanánt szerepeljenek.

A gondolatmenet mathematikai kivitele érdekesebb momentumokat alig nyujt, és ennélfogva inkább az eredmények rövid regisztrálására szorítkozhatunk. Mindössze talán azt kellene említeni, hogy mindkét idézett

* Sur la théorie de la capture des comètes périodiques. *Bull. astr.* 1889.

** Étude sur la théorie des comètes périodiques. *Ann. de l'Observatoire de Paris; Mém.* t. XX.

szerző JACOBI * egy integralját szerepelteti, mely egy szilárd s e körül egyenletes körmozgásban haladó czentrumtól vonzott szabad pont mozgására vonatkozik; jelen esetben az integrál azt a tényt fejezi ki, hogy az üstökösnek a nagy bolygó körüli sebessége a határgömb be- és kilépő pontján ugyanaz.

Eddig mindössze 25 periodikus üstököst ismerünk, melyek Jupiter behatása folytán a bolygórendszerünk állandó tagjaivá lettek; ezen csoport alkalmas anyagot szolgáltat arra, hogy az elméletet a valósággal összehasonlíthassuk, s ez okból a számbeli adatokat természetesen mind Jupiterre vonatkoztatjuk.

Ha az eredeti pályát parabolásnak tételezzük fel, mint ez a világűrből hozzánk jutó üstökös sebességének leginkább megfelel, akkor az átalakított pálya elliptikus fél nagy tengelye 2,60 és 6,28 szélső értékek között váltakozhatik oly módon, hogy leginkább 3,14 érték körül csoportosul. A mondott csoport több tagjának fél nagy tengelye ezen utóbbi értékhez feltünően közel áll, és az egész csoport pályaméretei szempontjából olyannak tekinthető, mely eredetileg parabolás pályán Jupiter vonzáskörébe hatolt. Csak az Encke-féle üstökös tesz még egyelőre kivételt, mert fél nagy tengelye 2,21 a talált alsó határon belül fekszik, míg a többi féltengely mind 2,85 és 4,28 között csoportosul. Ennek magyarázatánál nem szükséges éppen ellentálló közegre gondolnunk, mint ezt CALLANDREAU tette, mivel valamivel szigorúbb számítás az alsó határt már 2,31-re szorítja le. A tényleges excentricitások is elég közel állanak kiszámított alsó értékükhöz, különösen, ha még tekintetbe veszszük azt, hogy az üstökös pályája már jóval Jupiter vonzási körének elérése előtt eltérhet a parabolától. Igy a már egyszer említett 1889-ki Brooks-üstökös számára a jelenlegi fél nagy tengely és excentricitás 3,67 és 0,47, míg eredetileg parabolás pálya feltételezésével a számítás 0,54-et ad az excentricitás alsó határa gyanánt. Ha azonban az üstökös Jupiter közelében parabola helyett ellipszist ír le, melynek fél nagy tengelye 97, s mely ily távolságban a Naptól asztronomiailag a parabolától meg sem különböztethető, a számítás az excentricitás tényleges értékét szolgáltatja.

Érdekesek még a Jupiter hatása alatt létrejövő pályák is; a vonzáskörön belül az üstökös minden esetben hiperbolát ír le, úgy hogy üstökös semmikor sem válhatik Jupiter állandó holdjává. Az eredő pálya azután ellipszis direkt mozgással, ha az üstökös abszolut sebessége Jupiter hatásgömbjébe beléptekor a Jupiterpálya érintőjével egyenlő irányú (a Jupitermozgás apexe felé történik), vagy hiperbola (még egyéb mellékkörülményektől függő mozgásiránnyal), ha az üstökös abszolut sebessége ugyancsak Jupiterével

* *Vorlesungen über Dynamik*, ld. az 5. előadás végét.

párhuzamos, de ellentétes irányú (azaz a Jupitermozgás antiapexe felé történik), vagy végül retrograd értelmű ellipszis vagy direkt mozgású hiperbola, ha az üstökös abszolut mozgása a Nap felé tart, vagy tőle elirányult.

A hatásgömb mérete a bolygó tömegétől és a Naptól való távolságától függve általában a rendszer határa felé nő; így a közép naptávolság egységeiben kifejezve ez Merkur számára 0,001, Vénus, Föld, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus és Neptunus számára sorban 0,003; 0,005; 0,003; 0,280; 0,316; 0,296; 0,501. A belső bolygók tehát hatásgömbük méretei folytán üstökösfogásra kevésbbé alkalmasok ugyan, de viszont az üstökös-pályáknak a Nap közelében való halmozódása ezzel szemben némi kompenzációt nyújt. A külső nagy bolygók ellenben a feléjök közeledő üstökösöket legtöbb esetben még a hatáskörük elérése előtt nyujtott elliptikus pályákba kényszerítik, melyeknek perihéliumtávolsága az eredetinél kisebb, úgy hogy végre oly üstökös is belejuthat a bolygó vonzáskörébe, melynek perihéliuma eredetileg a bolygó pályáján kivül feküdt. Ennek némi támogatásául szolgál már az Olbers-től kifejezett valószínűség, hogy egy üstökös valamely bolygó vonzáskörébe bejut; ez Jupiter esetében $\frac{1}{400}$, azaz 400 üstökös közül, melynek perihéliumtávolsága a Jupiterpálya sugaránál kisebb, csak egy kerül e test hatáskörébe. Hogy ezen csekély valószínűséggel szemben már most is 25, a Jupitercsoporthoz tartozó üstökést ismerünk, nyilván a mellett szól, hogy a nagy bolygók a kivülök fekvő üstökös-pályákat is szükíteni és a folytatólagos közelítésre hajtani iparkodnak. Miről különben az a tény is tanuskodik, hogy az említett csoport üstökösei-nek aphéliumjai közel feküsznek a legnagyobb Jupiterközelségek pontjaihoz. Az a körülmény, hogy Jupiter vonzása folytán hiperbolás pályájú üstökösök is keletkezhetnek, mi pedig valóságban ily égitesteket nem ismerünk, nem lehet döntő ellenvetés az elmélet ellen, mert ezen üstökösök kimutathatólag a Földről nem észlelhetők, mivel perihéliumtávolságuk vagy a Mars pályáján messze túl esik, vagy mivel a vonzáskörből való kilépésekor a perihéliumán már jóval túl van. Különben ily hiperbolás pálya létrejötte sokkal valószínütlenebb is; mert valamint Jupiter a kivüle fekvő elliptikus pályák perihéliumtávolságát kisebbíti és így a kritikus közelítést előkészíti, ép úgy növeli a kivüle fekvő hiperbolás pályak legkisebb naptávolságát, úgy hogy ezek Jupiter vonzása alól mindinkább kikerülnek.

Az itt előadottak teljesen elegendők a Forbes féle feladat megoldására is; a gyakorlatba való átvitel már csak abból áll, hogy az eddig ismert üstökösök és meteorrajok jegyzékéből egy oly üstököscsoport legyen kiválasztható, melynek elemei mind ugyanazon — eddig még ismeretlen, de létezése esetén a transneptumi bolygó nevét viselő — közös vonzási sphæ-rához vezessenek.

Kövesligethy R.

AZ ANALITIKAI FÜGGVÉNYEK ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

1. Bármely

$$\mathfrak{P}(x|a) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_m(x-a)^m + \cdots$$

hatványsor (ha csak összetartási körének ρ sugara nem egyenlő zérussal) a K_a összetartási körnek belsejében az x komplex változónak egyértékű, folytonos és bárhányszor differenciálható függvénye. Sőt a hatványsor azt is megszabja, hogy mi ennek a függvénynek — $f(x)$-nek — folytatása a K_a körön kívül. Ha ugyanis K_a belsejében felveszünk egy tetszőleges $x=b$ helyet, akkor az adott $\mathfrak{P}(x|a)$ hatványsorból levezetett

$$\mathfrak{P}(x|a, b) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{d^m}{dx^m} \mathfrak{P}(x|a) \right]_{x=b} (x-b)^m$$

hatványsor K_b összetartási körének és az az eredeti sor K_a összetartási körének minden közös belső helyén

$$\mathfrak{P}(x|a, b) = \mathfrak{P}(x|a).$$

Ezért az oly esetekben, midőn K_b kinyúlik a K_a körön túl is, ebben a kinyuló részben $\mathfrak{P}(x|a, b)$-t tekintjük a $\mathfrak{P}(x|a)$ sor által értelmezett függvény folytatásának.

Bármely $\mathfrak{P}(x|a, b)$ folytatásból újabb $\mathfrak{P}(x|a, b, c)$ folytatás képezhető stb.

E folytatások összessége alkotja a $\mathfrak{P}(x|a)$ hatványsor értelmezte $f(x)$ analitikai függvényt, melynek $\mathfrak{P}(x|a)$, $\mathfrak{P}(x|a, b)$ stb. egyes elemei.

Az a helyből a tetszőleges $x = a$ helyhez számtalan $a\ b\ c \ldots a$

úton juthatunk. Ha valamennyi úton $f(a)$-ra ugyanazt az értéket nyerjük, akkor az analitikai függvény *egyértékű*, ellenkező esetben *többértékű*.

Ha valamely A számtartomány avval a tulajdonsággal bír, hogy legalább az azon belül választott $a, b, c, \ldots a$ útakon $f(a)$ számára egy ugyanazt az értéket nyerjük, akkor az ily megszorítással képezett folytatások az A tartományban $f(x)$-nek egy *egyértékű ágát* adják meg.

A következőkben többértékű függvények esetében mindig valamely egyértékű ág vizsgálatára szorítkozunk.

2. Ha adva van egy

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

hatványsor (hol az előbb a-val jelölt értéket egyszerűség kedvéért zérusnak választottuk), akkor e sor vizsgálatánál *első kérdésünk* minden esetre a K összetartási kör ρ sugarának meghatározására fog vonatkozni.

E K körnek bármely a belső helye arra az $f(x)$ függvényre vonatkozólag, a melyet a hatványsor értelmez, *rendes* hely lesz, melynek környezetében $f(x)$ *szabályosan* viselkedik, azaz $(x-a)$-nak pozitiv egész kitevőjű hatványai szerint haladó sorba fejthető ki. Ellenben K kerületén létezik mindig legalább egy *szinguláris hely*, melynek környezetében $f(x)$ nem fejezhető ki ily hatványsor segítségével. A K meghatározása e szerint azonos feladat annak az $x=0$ középpont körül rajzolható *legnagyobb* körnek kijelölésével, melynek bármely belső helyének környezetében $f(x)$ szabályosan, más szóval *az egész függvények módjára* viselkedik.

E viselkedéshez legközelebb jár a *ráczionális függvények módjára* való viselkedés. Az $f(x)$-ről akkor mondjuk, hogy $x=a$ környezetében a ráczionális függvények módjára viselkedik, ha $f(x)$-re vonatkozólag $x=a$ vagy rendes hely, vagy *polus*. Az $x=a$ helyet μ-szeres polusnak pedig akkor mondjuk, ha $(x-a)^\mu f(x)$ az $x=a$ környezetében szabályosan viselkedik és az $x=a$ helyen a zérustól különböző értékkel bír.

A mondottak annak a kérdésnek, vajjon mekkora a hatványsor

K összetartási köre, most már legközelebbi általánosítására vezetnek. Míg K meghatározásánál $x=0$ körül a legnagyobb kört kerestük, a melyen belül $f(x)$ az *egész* függvények módjára viselkedik, addig ezen általánosításnál annak az $x=0$ körül rajzolt legnagyobb $\mathfrak{K}$ körnek meghatározását fogjuk kívánni, melyen belül $f(x)$ a *rácionális* függvények módjára viselkedik.

Az így felvetett *második probléma* e szerint annak az $x=0$ középponttal biró $\mathfrak{K}$ körnek meghatározását követeli, a melyen belül $f(x)$-nek csak rendes helyei és polusai vannak, melynek kerületén azonban már másnemű szinguláritás is előfordul.

E $\mathfrak{K}$ kör sohasem lehet kisebb mint K, de nagyobb mint K' is csak akkor lesz, ha K kerületén $f(x)$-nek csak bizonyos véges számú polusa van. $\mathfrak{K}$ meghatározására tehát mindenek előtt oly kriterium kívántatik, melylyel eldönthető: vajjon a K körön $f(x)$-nek csak polusai vannak-e, vagy más szingularitása is. Ha valamely esetben e kritérium segítségével felismertük, hogy a K kör kerületén levő szinguláritások nem lehetnek pusztán polusok, akkor $\mathfrak{K}$ azonos K-val. Ekkor tehát e kriterium mindjárt megadja $\mathfrak{K}$-t. További vizsgálat csak akkor szükséges, ha $\mathfrak{K}$ nagyobb mint K. E további vizsgálat a legszorosabb kapcsolatban van $f(x)$-nek a keresett $\mathfrak{K}$ körön belül levő polusainak meghatározásával. Sőt ha $f(x)$ mellett $\frac{1}{f(x)}$-et is vizsgálataink körébe vonjuk, akkor $\frac{1}{f(x)}$ polusainak vagyis $f(x)$ zérus-helyeinek meghatározására is nyerünk módszert.

Ha a $\mathfrak{K}$ kört sikerült meghatároznunk, természetesen az a kérdés is merül fel, miként lehetne oly analitikai kifejezést találni, mely $f(x)$-et az egész $\mathfrak{K}$ kör belsejében ábrázolja, mert az adott hatványsor ezt csak a K kör belsejében teszi meg.

Mindezeket a kérdéseket HADAMARD a *Journal de mathématiques* 4. sorozatának 8. kötetében »*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*« cz. értekezésének első két részében behatóan tanulmányozta. A következő sorok czélja legalább leglényegesebb eredményeit részletesen ismertetni.

Az utolsó feladat megoldása, t. i. $f(x)$-nek a $\mathfrak{K}$ körben egy an-

litikai kifejezéssel való ábrázolása, azok közé a függvénytani vizsgálatok közé tartozik, a melyekhez WEIERSTRASS «Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen» cz. értekezése adta meg az impulzust. Azért ennek legalább az egész függvényekre vonatkozó részét alkalmilag szintén ismertetem.

I.

3. A következőkben jelentékeny szerepet játszik a végtelen számsorozatok elméletének egyik alapfogalma, azért mindenek előtt ennek megállapítását kell előre bocsátanunk.

Ha adva van *valós* számoknak valamely

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m, \ldots \tag{1}$$

sorozata, akkor segítségével az összes valós számokat két osztályba oszthatjuk: azon A számok osztályába, melyeknél nagyobb tagok (1) alatt vagy egyáltalában nem vagy legfeljebb *véges* számmal foglaltatnak, s azon B számok osztályába, melyekhez végtelenül sok náluknál nagyobb tag található (1) alatt. A számok csak akkor nem találhatók, ha *bármely* K pozitiv számhoz végtelenül sok nálánál nagyobb tag található (1) alatt. B számok pedig csak akkor nem léteznek, ha *bármely* $-K$ negativ számhoz található egy oly M egész szám, hogy

$$u_m < -K,$$

ha csak

$$m > M.$$

Ha e két kivételes eset egyikével sincs dolgunk, akkor mindig kimutatható egy oly l szám létezése, hogy a nálánál nagyobb számok mindannyian a magasabb A osztályba tartoznak, a nálánál kisebbek mind az alacsonyabb B osztályba, maga l pedig más-más sorozatoknál hol az egyik, hol a másik osztálynak lesz tagja.

Ugyanis az A és B osztályok úgy vannak megállapítva, hogy ha valamely szám az A osztályba tartozik, akkor minden nálánál na-

gyobb szám szintén oda való, ha pedig valamely szám a B osztályba tartozik, akkor minden nálánál kisebb szám szintén oda tartozik.

Ezt tudván, mindenek előtt kikeresünk két egész számot, g-t és h-t, melyek közül az egyik — g — a B osztályba tartozik, ellenben a másik — h — az A osztályba. Az egész számok sorában g-től h-ig legyen K_0 az utolsó, mely a B osztályba tartozik; úgy hogy K_0+1 már az A osztályba tartozik.

Azután egy tetszőleges 1-nél nagyobb számot X-et választva, a

$$\frac{K_0X}{X}, \quad \frac{K_0X+1}{X}, \quad \frac{K_0X+2}{X}, \ldots \frac{(K_0+1)X}{X}$$

számok sorából ismét kiválasztjuk az utolsót, mely még a B osztályba tartozik. Legyen ez $\frac{K_1}{X}$; úgy hogy $\frac{K_1}{X}$ még a B osztályba tartozik, de $\frac{K_1+1}{X}$ már az A osztályba.

Ismételjük ezt az eljárást a következő számokon:

$$\frac{K_1X}{X^2}, \quad \frac{K_1X+1}{X^2}, \quad \frac{K_1X+2}{X^2}, \ldots \frac{(K_1+1)X}{X^2}.$$

Ezek között megállapítjuk a $\frac{K_2}{X^2}$ számot, úgy hogy $\frac{K_2}{X^2}$ még a B osztályba tartozzék, ellenben $\frac{K_2+1}{X^2}$ már az A osztályba.

Ezt az eljárást újból és újból ismételve, két számsorozatot nyerünk:

$$K_0, \quad \frac{K_1}{X}, \quad \frac{K_2}{X^2}, \ldots, \quad \frac{K_m}{X^m}, \ldots$$

és

$$K_0+1, \quad \frac{K_1+1}{X}, \quad \frac{K_2+1}{X^2}, \ldots, \quad \frac{K_m+1}{X^m}, \ldots,$$

melyek közül az elsőnek tagjai mind a B osztályba tartoznak, míg a másodiknak tagjai mind az A osztályba tartoznak.

Az első sorozat számai folyvást növekednek vagy legalább soha nem kisebbednek és mindig kisebbek (K_0+1)-nél; a második so-

rozat számai folyvást kisebbednek vagy legalább soha nem nagyobbodnak és mindig nagyobbak K_0-nál; továbbá két megfelelő tagnak $\frac{1}{X^m}$ különbsége m növekedtével minden határon túl kisebbedik. A két sorozat tagjai tehát m növekedtével egy közös l határérték felé közelednek, még pedig az első sorozat tagjai alulról s a másodiknak tagjai felülről.

Ha most valamely b szám kisebb mint l, akkor m eléggé nagy értékénél $\frac{K_m}{X^m}$ jobban közelíti meg l-t semmint b s így

$$b < \frac{K_m}{X^m}.$$

Ennélfogva a $\frac{K_m}{X^m}$ törttel együtt b is a B osztályba tartozik.

Viszont ha valamely a szám nagyobb mint l, akkor m eléggé nagy értékénél

$$a > \frac{K_m+1}{X^m}$$

s így a az A osztályba tartozik.

Az imént meghatározott l szám tehát csakugyan avval a tulajdonsággal bír, hogy a nálánál nagyobb számok mind az A osztályba s a nálánál kisebb számok mind a B osztályba tartoznak.

Erről az l számról azt mondjuk, hogy az adott sorozatnak vagy röviden u_m-nek *felső határa* (limes superior) *végtelen nagy m-re vonatkozólag.** Képletben:

$$l = \lim_{m=\infty}.\ \text{sup.}\ u_m.$$

E fogalom kiterjeszthető az előbb említett két kivételes esetre is; még pedig ekkor l értéke $+\infty$ ill. $-\infty$.

Különösen fontos az az eset, midőn úgy az

$$u_1, u_2, \ldots u_m, \ldots$$

* Ha nem kell félreértéstől tartani, akkor elhagyjuk azt a megjegyzést, hogy a felső határ *végtelenül nagy m-re vonatkozólag* értendő, noha röviden felső határnak mást szokás nevezni.

sorozatnak, mint a

$$-u_1, -u_2, \ldots, -u_m, \ldots$$

sorozatnak felső határai *véges* számértékek s a kettő egymástól csak előjelben különbözik. Ha ismét u_m felső határát l-lel, tehát $-u_m$ felső határát $-l$-lel jelöljük, akkor esetünkben bármily kis ε pozitiv számhoz található egy oly M pozitiv egész szám, hogy

$$u_m < l+\varepsilon \quad \text{és} \quad -u_m < -l+\varepsilon,$$

vagyis

$$l-\varepsilon < u_m < l+\varepsilon,$$

ha csak $m > M$. Ekkor tehát l az (1) alatti sorozatnak vagy röviden u_m-nek *határértéke* (limes). Képletben:

$$l = \lim_{m=\infty} u_m$$

vagy rövidebben

$$l = \lim. u_m.$$

Ilyenkor az (1) alatti számsorozatról azt mondjuk, hogy tagjai *szabályosan közelednek l-hez.*

4. *Az*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

hatványsor összetartási körének ρ sugara az

$$l = \lim_{m=\infty}. \sup. \left| \sqrt[m]{a_m} \right|$$

reciprok értékével egyenlő.

Valóban, ha

$$|x| > \frac{1}{l}$$

azaz

$$\frac{1}{|x|} < l,$$

akkor, minthogy $\frac{1}{|x|}$ a B osztályba tartozik, végtelenül sok a_m-nek tagra vonatkozólag lesz

$$\left| \sqrt[m]{a_m} \right| > \frac{1}{|x|}.$$

Ennélfogva az $\frac{1}{l}$-nél nagyobb abszolut értékű x esetében $|\sqrt[m]{a_m}x|$ és vele együtt $|a_m x^m|$ m-nek végtelenül sok értékénél lesz nagyobb az egységnél. A sor tehát ekkor az összetartásnak már azt az első feltételét sem elégíti ki, hogy általános tagjának határértéke zérus legyen.

Ha ellenben

$$|x| < \frac{1}{l},$$

akkor a hatványsor összetartása következőleg látható be. Legyen:

$$r = |x|,$$

továbbá jelentsen r' egy r és $\frac{1}{l}$ közé eső számértéket. Az $\frac{1}{r'}$-hez legfeljebb véges számmal található oly m, hogy

$$|\sqrt[m]{a_m}| > \frac{1}{r'}.$$

Mihelyt tehát m nagyobb egy bizonyos M egész számnál, a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$|\sqrt[m]{a_m}| \leqq \frac{1}{r'},$$

minélfogva

$$|a_m x^m| \leqq \left(\frac{r}{r'}\right)^m.$$

Ekkor tehát a hatványsorban egy bizonyos tagtól kezdve a tagoknak abszolut értékei rendre kisebbek vagy legalább nem nagyobbak, mint abban a geometriai haladványban, melynek hányadosa a $q = \frac{r}{r'}$, valódi tört. A hatványsor e szerint ekkor valóban feltétlenül összetartó.

5. Ha $l = +\infty$ akkor $\rho = 0$. Ekkor tehát a sor csak az $x = 0$ helyen összetartó s nem értelmez függvényt.

Viszont ha $l = 0$, akkor $\rho = +\infty$, vagyis a sor x minden véges értékénél feltétlenül összetart. Ez az eset akkor és csak akkor áll be, ha

$$\lim. \sqrt[m]{a_m} = 0.$$

Tehát *valamely hatványsor akkor és csak akkor tart össze x-nek minden véges értékénél, ha*

$$\lim. \sqrt[m]{a_m} = 0. \tag{2}$$

Ha ez úgy történik, hogy az a_m-ek egy bizonyos tagtól kezdve zérussal egyenlők, akkor végtelen sor helyett egy végesszámú tagból álló több tagúval van dolgunk, vagyis az x-nek *ráczionális egész függvényével.* Azért általában az egész számsíkban összetartó hatványsorok által értelmezett függvényeket *egész függvényeknek* mondjuk, még pedig abban az esetben, midőn nem ráczionálisak, *egyértékű transzczendens egész függvényeknek* nevezzük őket.

6. Ha pl. az imént mondottakat annak bebizonyítására akarjuk használni, hogy az

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$$

sor az x-nek minden értékénél összetartó, akkor csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$\lim. \frac{1}{\sqrt[m]{m!}} = 0.$$

E végre abból indulhatunk ki, hogy

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{(m+1)^m}{m!} = \frac{m^m}{m!}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{m^m}{m!} \lim._{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

vagyis

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} < \frac{m^m}{m!}\, e.$$

E szerint

$$\frac{2^2}{2!} < \frac{1}{1!}e = e \quad \frac{3^3}{3!} < \frac{2^2}{2!}e < e^2, \ldots, \frac{m^m}{m!} < e^{m-1}.$$

tehát

$$\frac{1}{m!} < \frac{e^{m-1}}{m^m}. \tag{3}$$

Innen

$$\frac{1}{m!} < \frac{e^m}{m^m}$$

és

$$\left|\frac{1}{\sqrt[m]{m!}}\right| < \frac{e}{m},$$

minél fogva csakugyan

$$\lim. \frac{1}{\sqrt[m]{m!}} = 0.$$

7. A ρ és $\lim_{m=\infty}. \sup. \left|\sqrt[m]{a_m}\right|$ között talált kapcsolat nemcsak a hatványsorok elméletében találhat alkalmazást, hanem arra is alkalmas, hogy *határértékekre* és *felső határokra* vonatkozó tételek bebizonyítására használjuk. Ily módon pl. bármely

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$$

számsorozatról minden számítás nélkül bebizonyítható, hogy

$$\lim_{m=\infty}. \sup. \left|\sqrt[m]{ca_m}\right| = \lim_{m=\infty}. \sup. \left|\sqrt[m]{a_m}\right|, \tag{4}$$

bármily állandó s a zérustól különböző számértéket is jelentsen c.

Valóban a jobb oldalt álló felső határ az

$$a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots$$

sorra vonatkozólag adja meg az összetartási kör sugarának reciprok értékét, a bal oldalt álló felső határ pedig a

$$ca_1 x + \cdots + ca_m x^m + \cdots$$

sorra vonatkozólag. Ámde e két sor összetartási köre azonos.

Hasonlóképpen:

$$\lim_{m=\infty}. \sup. \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right| = \lim_{m=\infty}. \sup. \left|\sqrt[m]{a_m}\right| \tag{5}$$

és

$$\lim. \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right| = \lim. \left|\sqrt[m]{a_m}\right|, \tag{6}$$

hol i egy tetszőleges, de állandó pozitiv számot jelent.

Ugyanis $\lim. \sup. \left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right|$ az

$$a_i + a_{i+1} x + \cdots + a_{m+i} x^m + \cdots \tag{7}$$

sorra vonatkozólag adja meg az összetartási kör sugarának reciprok értékét. Amde e sor x^i tényezővel szorozván, az

$$a_1x+\cdots+a_ix^i+a_{i+1}x^{i+1}+\cdots+a_{m+i}x^{m+i}+\cdots \tag{8}$$

sornak

$$a_ix^i+a_{i+1}x^{i+1}+\cdots+a_{m+i}x^{m+i}+\cdots$$

maradék sorát adja meg. Tehát a (7) alatti sor összetartási köre megegyezik a (8) alatti sor összetartási körével, a melyre vonatkozólag a sugár reciprok értéke lim. sup. $|\sqrt[m]{a_m}|$.

E szerint az (5) alatti képlet valóban helyes.

Abban a különös esetben, midőn $|\sqrt[m]{a_m}|$ szabályosan közeledik egy zérustól különböző véges l határértékhez, — bármily kis pozitiv számot jelentsen is δ — az m-nek elegendő nagy értékeinél

$$l-\delta<|\sqrt[m]{a_m}|<l+\delta$$

s így

$$\frac{1}{l+\delta}<\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|<\frac{1}{l-\delta}$$

Ekkor tehát nemcsak

$$\lim.\ \sup_{m=\infty}|\sqrt[m]{a_m}|=\lim.|\sqrt[m]{a_m}|=l,$$

hanem egyszersmind

$$\lim.\ \sup_{m=\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|=\lim.\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right|=\frac{1}{l}.$$

Ennélfogva továbbá

$$\lim.\ \sup_{m=\infty}|\sqrt[m]{a_{m+i}}|=l$$

és

$$\lim.\ \sup_{m=\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[m]{a_{m+i}}}\right|=\frac{1}{l}.$$

Tehát bárminő kis pozitiv számot jelentsen is ε, az m elegendő nagy értékeinél

$$|\sqrt[m]{a_{m+i}}|<l+\varepsilon \quad \text{és} \quad \frac{1}{|\sqrt[m]{a_{m+i}}|}<\frac{1}{l-\varepsilon},$$

vagyis

$$l-\varepsilon<|\sqrt[m]{a_{m+i}}|<l+\varepsilon,$$

mint azt a (6) alatti egyenlőség kívánja.

Ennek az egyenlőségnek imént végzett bebizonyítása csak akkor nem alkalmazható, ha lim. $\sqrt[m]{a_m}$ értéke zérus vagy végtelen.

Ámde az első esetben a szóban forgó egyenlőség egyszerűen azt mondja, hogy ha az

$$a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m+\cdots$$

és

$$a_i+a_{i+1}x+\cdots+a_{m+i}x^m+\cdots$$

sorok egyike az egész síkban összetartó, akkor a másik is olyan.

A második kivételes eset pedig az elsőre vezethető vissza, ha a reciprok értékekre térünk át.

II.

8. Ha az

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m+\cdots \tag{9}$$

hatványsor értelmezte $f(x)$ függvénynek a ρ sugaru K összetartási kör kerületén nincsen más szinguláritása, mint hogy

$$x_1, x_2, \ldots, x_r$$

rendre

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$$

szeres polusok, akkor az adott hatványsornak az

$$\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{\mu_1}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)^{\mu_2}\cdots\left(1-\frac{x}{x_r}\right)^{\mu_r} \tag{10}$$

egész függvénynyel való

$$b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m+\cdots \tag{11}$$

szorzata nemcsak K belsejében, hanem egyszersmind K kerületének összes helyeinek környezetében szabályosan viselkedik, tehát ezen új sor K' összetartási körének ρ' sugara nagyobb mint ρ.

Legyen most már rövidség kedvéért

$$p=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r, \tag{12}$$

s vizsgáljuk meg a következő $(p+1)$-sö fokú szimmetrikus determinánsnak

$$D_{m,p}=\begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \cdots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \cdots & a_{m+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \cdots & a_{m+2p} \end{vmatrix} \tag{13}$$

m-dik gyökének felső határát végtelen nagy m-re vonatkozólag. E determinánsban minden egyes a_{m+i} elemre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{a_{m+i}}\right|=\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{a_m}\right|=\frac{1}{\rho}.$$

Ha tehát m-et eléggé nagynak választjuk, akkor

$$|a_{m+i}|<\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho}\right)^m,$$

hol ε egy tetszőlegesen kicsinynek választott pozitiv szám. Ennélfogva (m eléggé nagy értékei mellett) a determináns minden egyes tagjának abszolut értéke kisebb

$$\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^{p+1}}$$

m-dik hatványánál. Továbbá

$$|D_{m,p}|<(p+1)!\,\frac{(1+\varepsilon)^{(p+1)m}}{\rho^{(p+1)m}},$$

tehát

$$\left|\sqrt[m]{\frac{D_{m,p}}{(p+1)!}}\right|<\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^{p+1}}<\frac{1+\varepsilon'}{\rho^{p+1}},$$

hol ε' az ε-nál együtt tetszőlegesen kicsiny pozitiv számot jelent.

Innen

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{D_{mp}}\right|=\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{\frac{D_{mp}}{(p+1)!}}\right|=\frac{1}{\rho^{p+1}}. \tag{14}$$

Még pedig a jelen esetben

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{D_{mp}}\right|<\frac{1}{\rho^{p+1}}.$$

Ha ugyanis a (10) alatti szorzatnak kifejtett alakja

$$P_p(x)=1+A^{(1)}x+\cdots+A^{(p)}x^p, \tag{15}$$

akkor a (11) alatti sorban

$$b_{m+p}=a_{m+p}+A^{(1)}a_{m+p-1}+\cdots+A^{(p)}a_m, \tag{16}$$

minélfogva D_{mp} következőleg is írható:

$$D_{mp}=\begin{vmatrix} a_m & \ldots & a_{m+p-1} & b_{m+p} \\ a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} & b_{m+p-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m+p} & \ldots & a_{m+2p-1} & b_{m+2p} \end{vmatrix} \tag{17}$$

Itt az utolsó oszlopban bármely b_{m+i} elemre vonatkozólag

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{b_{m+i}}\right|=\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{b_m}\right|=\frac{1}{\rho'}.$$

Ha tehát m-et eléggé nagynak választjuk, akkor

$$|b_{m+i}|<\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m.$$

továbbá D_{mp}-nek (17) alatti alakjának kifejtésénél az egyes tagok abszolut értéke kisebb mint

$$\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^p\rho'}$$

m-dik hatványa. Ennélfogva

$$\left|\sqrt[m]{\frac{D_{mp}}{(p+1)!}}\right|<\frac{(1+\varepsilon)^{p+1}}{\rho^p\rho'}<\frac{1+\varepsilon'}{\rho^p\rho'}$$

és

$$\lim_{m=\infty}\sup.\left|\sqrt[m]{D_{mp}}\right|<\frac{1}{\rho^p\rho'}<\frac{1}{\rho^{p+1}}. \tag{18}$$

Az imént végzett megfontolások eredménye következőleg foglalható össze:

Akármilyen legyen a hatvány sor által értelmezett függvény magaviselete az összetartási körön, a p-nek bármely tetszőleges de állandó pozitiv értékénél

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| \leq \frac{1}{\rho^{p+1}}.$$

Ha pedig az összetartási körön nincs más szinguláris hely, mint összesen p polus (hol a többszörös polusok többszörösségük foka szerint vannak számolva), *akkor*

$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{mp}} \right| < \frac{1}{\rho^{p+1}}.$$

Ha tehát a

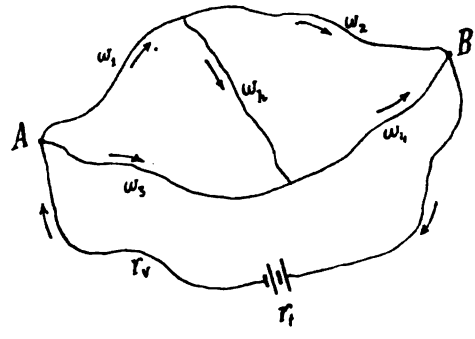
$$\limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{a_m} \right|, \quad \limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{m1}} \right|, \ldots, \limsup_{m=\infty} \left| \sqrt[m]{D_{mP}} \right|, \ldots$$

sorozat tagjai rendre megegyeznek $\frac{1}{\rho}$ első, második, stb. általában $(P+1)$-ső hatványaival, akkor az összetartási kör kerületén más szinguláris helynek is kell lennie mint pusztán polusoknak. E szerint ekkor az az $x=0$ körül rajzolható legnagyobb $\mathfrak{R}$ kör, melyen belül $f(x)$ a ráczionális függvények módjára viselkedik, megegyezik a K összetartási körrel.

Kürschák József.

A WHEATSTONE-FÉLE HÍD ELLENÁLLÁSA.

Ha egy áramkörbe A és B pontok közé oly ellenállás csoportot iktatunk, melynek elrendezése a WHEATSTONE-féle híd schemájával egyezik meg; akkor az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 és ω_h ellenállásokból alakult



rendszer egy bizonyos R nagyságú ellenállásként fog szerepelni az eredeti áramkörben.

Ennek az R ellenállásnak a kiszámítása, mint ismeretes, a KIRCHHOFF-féle törvényekből folyó elsőfokú egyenlet rendszerből és az OHM-féle törvény egyenletéből történik.

E sorokban előállítom R-et mint az ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 és ω_h ellenállások függvényét, hogy kiderüljön az a törvény, a mely szerint alkotják ezek az ellenállások a belőlök származó eredő ellenállást, R-et.

Ezzel kapcsolatban kimutatom azt, hogy miként vezethető le az R számára talált függvénynek megfelelő értelmezéséből a párhuzamos elágazások ellenállásának törvénye s a tulajdonképpeni

Wheatstone-hídnál fellépő arányosság az egyes ellenállások között arra az esetre, amidőn t. i. a hídban az áram intenzitása 0.

Az ábrán jelzett esetben mint adatok szerepelnek r_v és r_t vezetéki illetve telepbeli ellenállások, továbbá ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 és ω_h ellenállások s végre E a külső áramkörben levő elektrominditó erő. E nyolcz adatból számithatók ki a külső áramkör i és az egyes ágak i_1, i_2, i_3, i_4 és i_h áram intenzitásai és az R ellenállás.

E 7 ismeretlen meghatározására szolgálhat a következő 7 egyenlet:

$$iR + ir_v + ir_t = E \tag{1}$$

$$i_1\omega_1 + i_h\omega_h - i_h\omega_h = 0 \tag{2}$$

$$i_2\omega_2 - i_4\omega_4 - i_h\omega_h = 0 \tag{3}$$

$$i(r_v + r_t) + i_3\omega_3 + i_4\omega_4 = E \tag{4}$$

$$i = i_1 + i_3 \tag{5}$$

$$i_1 = i_2 + i_h \tag{6}$$

$$i_4 = i_2 + i_h \tag{7}$$

mely egyenletek közül az első Ohm törvényéből következik, a többi pedig a KIRCHHOFF-féle törvények folyománya az ábrán használt jelzéseknek megfelelőleg.

KIRCHHOFF törvényei alapján még több egyenlet is volna felirható, mint pl.:

$$i = i_2 + i_4,$$

vagy

$$i(r_v + r_t) + i_1\omega_1 + i_2\omega_2 = E,$$

de ezek az egyenletek már fölösleges egyenletek volnának a feladat megoldásához, mert az első az 5., 6. és 7., a második pedig a 2., 3. és 4. egyenletnek következménye.

Ama célunkat, hogy t. i. R értékét meghatározzuk, legegyszerűbben úgy érhetjük el, hogy a (2)—(7), összesen tehát 6 egyenletből, melyek csak a hat i-féle ismeretlent tartalmazzák, kiszámitjuk az i értékét, a mely értéket azután az (1) egyenletbe helyettesitvén, oly egyenlethez jutunk, mely egyedül csak az R ismeretlent tartalmazza.

A (2)—(7) egyenletek rendszere következőleg írható fel:

$$\begin{aligned}
0\,.\,i+\omega_1\,i_1+0\,.\,i_2-\omega_3\,i_3+0\,.\,i_4+\omega_h\,i_h&=0\\
0\,.\,i+0\,.\,i_1+\omega_2\,i_2+0\,.\,i_3-\omega_4\,i_4-\omega_h\,i_h&=0\\
(r_v+r_t)\,i+0\,.\,i_1+0\,.\,i_2+\omega_3\,i_3+\omega_4\,i_4+0\,.\,i_h&=E\\
1\,.\,i-1\,.\,i_1+0\,.\,i_2-1\,.\,i_3+0\,.\,i_4+0\,.\,i_h&=0\\
0\,.\,i+1\,.\,i_1-1\,.\,i_2+0\,.\,i_3+0\,.\,i_4-1\,.\,i_h&=0\\
0\,.\,i+0\,.\,i_1+0\,.\,i_2-1\,.\,i_3+1\,.\,i_4-1\,.\,i_h&=0
\end{aligned}$$

Ha ez egyenletrendszer determinánsát D-vel jelöljük, lesz:

$$D=\begin{vmatrix}
0 & \omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
(r_t+r_c) & 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0\\
1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}=$$

$$=(r_c+r_t)\begin{vmatrix}
\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}
\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}.$$

Rövidség kedveért hozzuk be a következő jelzéseket:

$$a=\begin{vmatrix}
\omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h\\
0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
1 & -0 & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{vmatrix}=$$

$$=\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_4+\omega_4\omega_1+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\,\omega_h$$

és

$$\beta = \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h \\ 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_2\omega_3\omega_4 + \omega_3\omega_4\omega_1 + \omega_4\omega_1\omega_2 + (\omega_1+\omega_2)(\omega_3+\omega_4)\omega_h,$$

ekkor az egyenlet-rendszer determinánsa lesz:

$$D = (r_t + r_v)\alpha - \beta,$$

ami egyszersmind az i törtalakú értékének nevezője; míg a számláló a következő determináns lesz:

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & -\omega_3 & 0 & \omega_h \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & -\omega_4 & -\omega_h \\ E & 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

E determináns értéke pedig nem más mint

$$Ea,$$

úgy hogy az i értéke ezek szerint:

$$i = \frac{Ea}{(r_t + r_v)\alpha - \beta}.$$

Helyettesítve i-nek ez értékét az 1. egyenletbe, lesz:

$$\frac{Ea}{(r_t + r_v)\alpha - \beta}(R + r_t + r_r) = E,$$

a honnan

$$R = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

vagy az α és β értékeinek figyelembe vétele mellett

$$R = \frac{w_1w_2w_3 + w_2w_3w_4 + w_3w_4w_1 + w_4w_1w_2 + (w_1+w_2)(w_3+w_4)w_h}{w_1w_2 + w_3w_4 + w_1w_4 + w_2w_3 + (w_1+w_2+w_3+w_4)w_h}.$$

Ez a képlet azt mondja, hogy az R értéke független az E, r_v és r_t adatoktól vagyis az elektromotoros erőnek s a vezetéki és a telepbeli ellenállásnak nagyságától, mint azt előre is lehetett gondolni, és egyedül csak az ω-féle ellenállásoktól függ és pedig oly módon hogy az értékét egy tört fejezi ki, melyben *a számláló az ágakban lévő ellenállásokból alkotott ternók összege, hozzá adva ehhez az egyes ágak és a híd ellenállásának a szorzatát, a nevező pedig az ugyanazon ágon fekvő és a keresztben fekvő ellenállások szorzatainak összege, hozzáadva ehhez az ágakban lévő ellenállások összegének és a híd ellenállásának szorzatát.*

Hozzuk be rövidség kedveért a következő jelzéseket:

$$S_3=\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_2\omega_3\omega_4+\omega_3\omega_4\omega_1+\omega_4\omega_1\omega_2,$$

és

$$S_2=\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_4+\omega_4\omega_1,$$

akkor R értéke lesz:

$$R=\frac{S_3+(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}{S_2+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}$$

Az R számára nyert eme kifejezés megadja az eredő ellenállás értékét arra az esetre is, ha megszüntetjük az ágaknak híd által való összeköttetését, azaz a rendszer redukálódik két ágból álló párhuzamos elágazásra.

A hídnak hiánya ugyanis egyértelmű egy szigetelő anyagból álló, tehát végtelen nagy ellenállással biró hídnak alkalmazásával és így az R értékét meghatározó kifejezésnek $\omega_h=\infty$ esetre vonatkozó határértéke fejezi ki az ellenállást abban az esetben, ha csak az ágak $\omega_1+\omega_2$ és $\omega_3+\omega_4$ szerepelnek mint párhuzamos elágazások. Erre az esetre tehát

$$R=\lim.\left[\frac{S_3+(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}{S_2+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\,\omega_h}\right]_{\omega_h=\infty}=$$

$$=\lim.\left[\frac{\dfrac{S_3}{\omega_h}+(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)}{\dfrac{S_2}{\omega_h}+(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}\right]_{\omega_h=\infty}=\frac{(\omega_1+\omega_2)\,(\omega_3+\omega_4)}{(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}$$

ami nem más, mint két párhuzamos ág ellenállásának ismert képlete, a midőn az egyik ágnak $(\omega_1+\omega_2)$, a másik ágnak pedig $(\omega_3+\omega_4)$ az ellenállása.

Végre ugyancsak az R értékét meghatározó kifejezésből felelhetünk arra a kérdére is, hogy lehetnek-e oly ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 ellenállások, a melyek mellett az R értéke függetlenné válik az ω_h értékétől, s ha igen, ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4-re nézve mi lesz az a feltétel, a mely mellett ez az eset bekövetkezik.

Hogy erre a kérdésre felelhessünk, meg kell vizsgálni az R értékét meghatározó kifejezést. Ha R-nek a fenti képletében

$$S = (\omega_1+\omega_2)\ (\omega_2+\omega_4)$$

és

$$S_1=\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4$$

rövidítésekkel élünk, akkor az R értékét a következő egyszerű alakban állithatjuk elő:

$$R = \frac{S_3+S\omega_h}{S_2+S_1\omega_h},$$

hol S_3, S_2, S_1 és S mint ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 függvényei határozott értéket nyernek, mihelyest eme ω-féle mennyiségek értékei meg vannak adva. A kérdés ezekután tisztán mathematikai feladattá válik, amennyiben csak azt kell eldönteni, hogy R-nek ily alakú tört függvénye lehet-e függetlenné bizonyos esetben ω_h-nak az értékétől.

Könnyen belátható, hogy ez az eset bekövetkezik akkor, a midőn fennáll a következő relatio:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{S}{S_1},$$

mert ez annyit jelent, hogy található ekkor egy bizonyos k szám, a melyre nézve

$$S_3=kS$$

és

$$S_2=kS_1,$$

minek következtében erre az esetre

$$R=\frac{kS+S\omega_h}{kS_1+S_1\omega_h}=\frac{S(k+\omega_h)}{S_1(k+\omega_h)}=\frac{S}{S_1}=\frac{(\omega_1+\omega_2)\ (\omega_3+\omega_4)}{(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)},$$

tehát az R értéke függetlenné vált az ω_h értékétől.

Ez az eredmény összehasonlítva a fentebbiekkel, azt mondja, hogy a midőn ω_h értéke nincs befolyással az egész rendszer ellenállására, akkor az R eredő ellenállás éppen akkorává válik, mint amekkora volt az esetben, midőn végtelen nagy ellenállással biró hid használtatott, vagyis a midőn a rendszer átalakult két párhuzamos ágból álló rendszerré, melyben a hid hiányzik, tehát nincs áramlás egyik ágból a másikba.

Könnyen belátható az is, hogy a jelen esetben, amidőn t. i. az ω_h értéke nincs befolyással az R értékére, az eredő ellenállásra, az áramintenzitásnak a hídban 0-nak kell lenni, azaz a hídban nem folyhatik áram.

Ha ugyanis feltételezzük azt, hogy áram kering a hídban is, a hid ellenállásának ω_h-nak változtatásával meg kellene változni az ω_h ellenálláson átfolyó áram intenzitásának s ezzel együtt az ágakban s következőleg a főáramkörben haladó áram intenzitásának is; mivel azonban jelenleg az ω_h változásával az áramkör ellenállásában semmiféle változás sem áll be, nem változhat a főáram intenzitása sem és igy, az a feltétel, hogy t. i. a hídban áram folyik, nem állhat fenn.

Erre az eredményre vezet a következő gondolatmenet is: ha bármely ω_h mellett ugyanaz az eredő ellenállás, akkor ugyanaz lesz a főáramkörben, az egyes ágakban s ha egyáltalán létezik, a hídban haladó áram intenzitása is bármiféle ω_h értékre. tehát $\omega_h=\infty$ re is, ugyanakkora intenzitásu áramnak kell lenni a hídban. Végtelen nagy ellenállású vezetőben azonban véges értékű elektromotoros erő 0 intenzitású áramot hoz létre, ami annyit tesz, hogy áram a hídban nem folyik.

Hátra van még az ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 között fentálló amaz összefüggésnek előállitása, a melyhez jelen esetünk fűződik.

Fentebb kimutattuk, hogy az R értéke az esetben lesz független az ω_h értékétől, ha fentáll a következő egyenlet:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{S}{S_1}.$$

Ha ezen egyenletben helyettesitjük az S-féle mennyiségeket az ω-féle mennyiségek ama függvényeivel, a melyeket azok képviselnek, az egyenlet a végezhető egyszerűsitések után a következő alakot ölti:

$$2\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 = \omega_1^2\omega_4^2 + \omega_2^2\omega_3^2,$$

azaz

$$\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_3 = 0.$$

Ez tehát az a relatio az ω_1, ω_2, ω_3 és ω_4 között, amelynek fenn kell állania, hogy az ω_k értékétől függetlenné legyen az eredő ellenállás értéke, s amely esetben, mint fentebb kimutattuk, a hídban áram nem folyik.

Az előbbi relatio még igy is irható:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_4},$$

ami nem más, mint a Wheatstone-féle híd négy ellenállása közt fentálló összefüggés, a midőn a hídban az áram intenzitása 0, és igy magának a hídnak az ellenállása semmiféle befolyással sincs az egész rendszerre.

Szijártó Miklós.

A FERDE ÉS EGYENES KÖRKÚP SÍKMETSZETEINEK GYUJTÓPONTJAIRÓL.

Mig az egyenes körkúp síkmetszeteinek gyujtópontjai QUETELET tételének segitségével közvetlenül igen egyszerű módon megszerkeszthetők, addig a ferde körkúp síkmetszéseire nézve ily egyszerű módszerek mindeddig ismeretlenek. Csak CHASLES ad (az »*Aperçu historique*«* című művében) minden bebizonyitás mellőzésével szerkesztést oly metszések gyujtópontjainak meghatározására, a melyeknek síkjai a ferde körkúp tengelymetszetére merőlegesen állanak.

Mivel e szerkesztés önmagában is érdekes, az egyenes körkúpra való alkalmazásában pedig igen egyszerű, de úgy látszik kevésbbé ismert eljárásra vezet, talán nem lesz felesleges a következőkben e szerkesztésnek egyszerű bebizonyitását közölni, és a megfelelő vizsgálatokat, függetlenül az általános esettől, az egyenes körkúpra nézve is elvégezni.

Ha ASB (1-sö ábra) valamely ferde körkúpnak a rajzlap síkjában fekvő tengelymetszete és AB a kúp alapjának átmérője, akkor CD — föltéve, hogy $SAB\sphericalangle = SBC\sphericalangle = \alpha$ — annak az alappal antiparallel körmetszetnek átmérőjét jelöli, a melyet B ponton át vezethetünk. Az antiparallel körmetszetek M_1 és M_2 középpontjainak összeköttetése $M_1M_2 \parallel AD$-vel.

$$AS=2n,\ BS=2m,\ BM_1=r \text{ és } BM_2=\rho$$

jelölést használva, a

$$BHM_1\triangle \sim BHM_2\triangle$$

* Lásd e mű német fordítását: Geschichte der Geometrie, übersetzt von Dr. L. A. Sohnke, Halle 1839, p. 288.

hasonlóságot tekintetbe véve, a következő egyenletekre jutunk:

$$BM_1 : BM_2 = M_1H : BH,$$

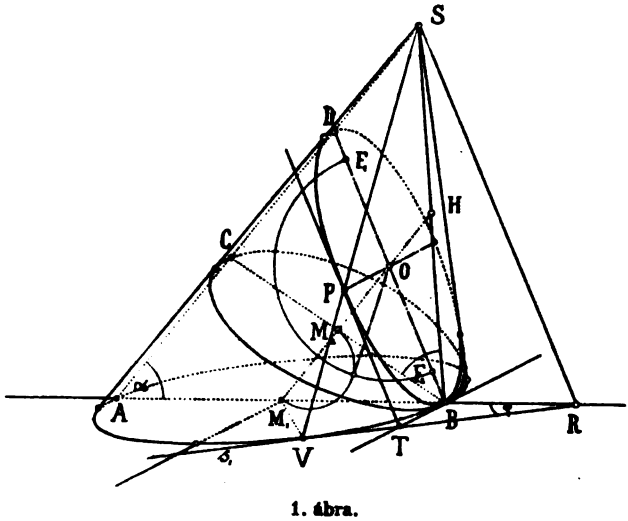
vagy

$$r : \rho = n : m;$$

tehát

$$\rho = \frac{mr}{n}; \qquad 1)$$

$$M_1H : BH = BH : M_2H,$$



1. ábra.

vagy

$$n : m = m : M_2H,$$

$$M_2H = \frac{m^2}{n}, \qquad 2)$$

ennélfogva

$$M_1M_2 = M_1H - M_2H = n - \frac{m^2}{n}$$

végre:

$$M_1M_2 = \frac{n^2 - m^2}{n}.$$

A $BHM_1\Delta$-ből következik, hogy:

$$\overline{BH}^2 = \overline{BM_1}^2 + \overline{M_1H}^2 - 2.\overline{BM_1}.\overline{M_1H}.\cos\alpha,$$

vagy

$$m^2=r^2+n^2-2rn\cos\alpha;$$

a miből

$$\cos\alpha=\frac{r^2+n^2-m^2}{2rn}. \qquad 4)$$

Ha a B ponton át egy a tengelymetszet síkjára merőlegesen álló metsző síkot vezetünk, akkor a fennálló szimmetriánál fogva a BD egyenes a kimetszett görbének egyik tengelyét szolgáltatja; a másik tengely abban az egyenesben adódik ki, a melyet az O középpontban a tengelymetszet síkjára merőlegesen állíthatunk. A görbe ez utóbbi tengely P végpontjában lévő érintője párhuzamos a BD tengelylyel s így a tengelymetszet síkjával is.

A ferde körkúp P pontjában lévő érintősíkja a tengelymetszet síkját SR egyenesben metszi, mely ugyancsak DB-vel párhuzamos. Ez az érintősík továbbá az alapkör síkját egy, az alapkört érintő és az előbb talált R ponton áthaladó egyenesben metszi, a mely $s_1\equiv RV$-ben meg is húzható. Mivel a kimetszett görbe fél tengelyei, a B és P pontok érintőivel egyetemben, egy a rajzlapra merőlegesen álló derékszögű négyszöget — $BOPT$-t határoznak meg, a melynek negyedik csúcspontja T az előbb említett érintő és alapsík metszésvonalához is tartozik, világos, hogy a B pontban lévő érintő BT-ben egy olyan vonaldarabot állapít meg, a melynek hosszasága a tengelymetszetre merőlegesen álló tengely félhosszuságával egyenlő. Ha

$$OB=a,\quad BT=b,\quad OM_1=x,\quad OM_2=y,\quad BR=k,$$

akkor az

$$M_1OB\Delta\sim ASR\Delta$$

hasonlóságból következik, hogy

$$OM_1 : AS=BM_1 : AR,$$

vagy

$$x : 2n=r : (2r+k)$$

$$x(2r+k)=2rn$$

$$k=\frac{2rn}{x}-2r=2r\frac{n-x}{x}; \qquad 5)$$

továbbá

$$RM_1 = k + r$$

$$RM_1 = \frac{2rn}{x} - 2r + r = r\frac{2n-x}{x}. \qquad 6)$$

Az $R_1MV\triangle$-ból folyó összefüggések a következők: ha

$$M_1RV\sphericalangle = \varphi$$

akkor

$$\sin\varphi = \frac{r}{r\cdot\frac{2n-x}{x}} = \frac{x}{2n-x}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi} = \frac{\frac{x^2}{(2n-x)^2}}{1-\frac{x^2}{(2n-x)^2}}$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{x^2}{4n(n-x)} \qquad 7)$$

Az 5) és 7) alatti képletek figyelembe vételével a $BltT\triangle$-ből nyert

$$b^2 = k^2.\ \operatorname{tg}^2\varphi$$

relácziő a következő egyenletre vezet:

$$b^2 = \left(2r.\frac{n-x}{x}\right)\frac{x^2}{4n(n-x)} = \frac{r^2(n-x)}{n} \qquad I)$$

Carnot tételének az $OBM_1\triangle$-re való alkalmazása, végül az

$$\overline{OB}^2 = OM_1^2 + BM_1^2 - 2.OM_1.BM_1.\cos\alpha$$

vagy

$$a^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha$$

egyenletet szolgáltatja, a mely 4)-re való tekintettel következőképen irható:

$$a^2 = x^2 + r^2 - \frac{x(r^2+n^2-m^2)}{n}. \qquad II)$$

Mivel $e^2 = a^2 - b^2$, a II) és I) egyenleteknek egymásból való kivonása révén a következő értéket nyerjük:

$$e^2=x^2+r^2-\frac{x(r^2+n^2-m^2)}{n}-\frac{r^2(n-x)}{n}$$

vagy

$$e^2=\frac{x(nx-n^2+m^2)}{n}=x\left(x-\frac{n^2-m^2}{n}\right).$$

Ebből a 3) alatti reláczió figyelembevételével

$$e^2=x(OM_1-M_1M_2),$$

vagy

$$e^2=xy, \qquad \text{III)}$$

mely eredményt CHASLES a következő tételben fejezi ki:

A lineáris excentricitás ama körök sugarainak geometriai középarányosa, a melyeket a görbe középpontja, a tengelymetszet síkjában fekvő csúcspontok bármelyikén keresztül vezethető körmetszetek középpontjaival megállapít.

A talált egyenletekből látható, hogy a a görbe főtengelyét b pedig melléktengelyét jelöli, a mig az $x.y$ szorzat az x és y egyenlő előjelénél fogva pozitiv, azaz, mig az O középpont az M_1M_2 vonaldarabon kívül fekszik.

Ha $n<x$ (lásd az I alatti egyenletet) a melléktengely képzetes és a kimetszett görbe oly hiperbola, a melynek középpontja az $N\infty$ vonaldarabon van.

Az xy szorzat negatív volta mellett b a főtengelyt a pedig a melléktengelyt jelenti a metszet oly ellipszis, a melynek középpontja az M_1M_2 vonaldarabon van.

A határesetképen fellépő parabolikus metszet gyujtópontját az M_1M_2 vonaldarabnak, a tengelymetszet síkjában fekvő szimmetrálisa határozza meg.

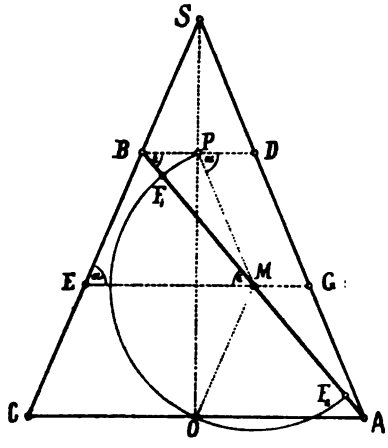
Lényegesen egyszerűbb a vizsgálat az egyenes körkúpra nézve, az eredmény azonban azonos avval, a melyre jutunk, ha föltételezzük, hogy az előbb levezetett egyenletekben $m=n$.

Ha az elliptikus metszet esetében SAC (2-dik ábra) azt a tengelymetszetet jelöli, mely a metszősíkra merőlegesen áll, ha továbbá AB a tengelymetszet és metszősík átmetszési vonala, akkor AB a kimetszett görbe főtengelye, felezőpontja pedig annak középpontja.

Legyen BD és EG az AC-vel párhuzamos, és legyenek $EM=u$ és $MG=v$ azon vonaldarabok, a melyeket M az EG-n megállapít, továbbá $EB=x$, akkor $BP=v$ és $MP=x$.

Jelölje a, illetőleg ε, a kúpalkotóknak, illetőleg a metszősíknak a kúp alapsíkjával való hajlásszögét, a és b pedig a kimetszett ellipszis féltengelyeit.

Mollweide reláczióinak az BEM és BPM háromszögekre való alkalmazása most a következő egyenletekre vezet:



2. ábra.

$$\frac{a-x}{u}=\frac{\sin\frac{a-\varepsilon}{2}}{\sin\frac{a+\varepsilon}{2}},$$

$$\frac{a+x}{v}=\frac{\cos\frac{\pi-(a+\varepsilon)}{2}}{\cos\frac{\pi-(a-\varepsilon)}{2}}=\frac{\sin\frac{a+\varepsilon}{2}}{\sin\frac{a-\varepsilon}{2}},$$

a melyeknek szorzata a

$$\frac{(a-x)\,(a+x)}{uv}=1$$

vagy a

$$a^2-x^2=uv$$

relácziót adja. Mivel u és v geometriai középarányosa szükségképen a görbe fél melléktengelyével egyenlő, lesz:

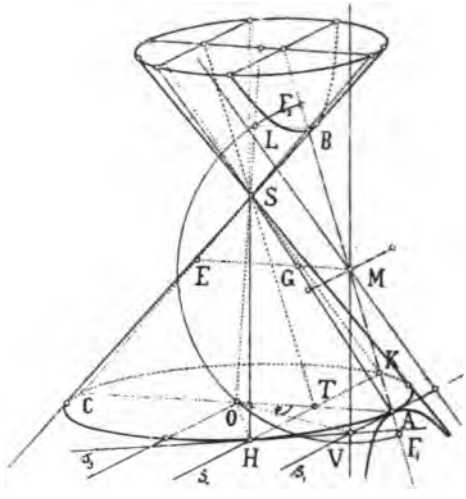
$$a^2 - x^2 = b^2,$$

a miből látható, hogy

$$x = e$$

a lineáris excentricitás.

Ebből következik, *hogy a lineáris excentricitás azzal az oldalvonallal párhuzamos vonaldarabbal egyenlő, a melyet a tengelymetszet síkjában, a középpontból a kúp tengelyéig húzhatunk.*



3. ábra.

Az egész levezetés érvényes a hiperbolikus metszetre is, ha ki tudjuk mutatni, hogy a melléktengely félhossza ugyancsak u és v-nek geometriai középarányosa.

Ha az előbbi feltevések fenntartása mellett, (3-dik ábra) a kúp csúcsán át, a metszősíkkal párhuzamos iránysíkot fektetünk, akkor e két sík a kúp alapsíkját két, a tengelymetszetre merőleges egyenesben metszi, a melyek egyike (s_1) az alapkört A-ban érinti, a másik (s_2) pedig vele két helyen találkozik, H és K-ban a metszősíkkal párhuzamos kúpalkotóknak, az alapkör síkjában fekvő pontjait állapítván meg.

A kúpnak SH alkotóban lévő érintősíkja az alapsíkját H pont s_3 érintőjében metszi és meghatározza az

$$(s_1, s_3) \equiv v$$

pontot, a mely a hiperbolának, az SH egyenessel párhuzamos fekvésű aszimptotájához tartozik.

Mivel s_3 a hiperbola csúcspontjában lévő érintője, az

$$AV = b$$

vonaldarab — a hiperbola egy elemi tulajdonságánál fogva — a melléktengely félhosszaságát is adja.

Legyen $OT=k$ és $TH=z$, és vegyük figyelembe, hogy $OC=u$ és $BL=v$, akkor SOC és SLB háromszögekből a következő értékeket nyerjük:

$$u=SC\cos\alpha \quad v=SB.\cos\alpha.$$

Tekintettel arra, hogy

$$BAC\Delta \sim STC\Delta,$$

lesz

$$BC : SC=AC : TC,$$

vagy

$$(CS+SB) : SC=AC : (TO+OC),$$

$$\left(\frac{u}{\cos\alpha}+\frac{v}{\cos\alpha}\right) : \frac{u}{\cos\alpha} = 2u : (k+u),$$

innen pedig

$$(u+v)\ (k+u)=2u^2$$

és

$$k=\frac{u(u-v)}{u+v}.$$

Ennek az értéknek felhasználásával a

$$\overline{TH}^2 = CT\,.\,\overline{TA}.$$

reláczió a következő egyenletre vezet:

$$z^2 = \left[u+\frac{u(u-v)}{u+v}\right]\cdot\left[u-\frac{u(u-v)}{u+v}\right],$$

a melyből

$$z = \frac{2u\sqrt{uv}}{u+v}.$$

Mivel az $AOH\sphericalangle = \varphi$ jelölés mellett,

$$\sin 2\varphi = \frac{z}{u} = \frac{2\sqrt{uv}}{u+v}$$

és

$$\cos 2\varphi = \frac{k}{u} = \frac{u-v}{u+v},$$

tehát

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{\sqrt{uv}}{u}$$

végre lesz:

$$AV = b = u\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{uv}$$

és így

$$b^2 = uv,$$

a mivel az említett tulajdonság be van bizonyítva.

A parabolikus metszetre vonatkozó szerkesztés egyaránt vagy a talált szerkesztés határesetének, vagy pedig a QUETELET-féle tétel folyományának tekinthető, a mely tételből az egyenes kúpra talált eredményünk könnyű szerrel közvetlenül is levezethető.

Szépréthy Béla.

A HARMONIKUS PÓLUSRÓL.

(Első közlemény.)

I. *Ha valamely egyenesen a* $P_1, P_2, \ldots P_n, M$ *pontokat veszszük fel és a*

$$P_{12}, P_{123}, \ldots P_{12\ldots n-1}, P_{12\ldots n}$$

pontokat akként határozzuk meg, hogy ezek a

$$\begin{aligned}
&(P_2P_1P_{12}M) = -1^*\\
&(P_3P_{12}P_{123}M) = -2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(P_nP_{12\ldots n-1}P_{12\ldots n}M) = -(n-1)
\end{aligned}$$

egyenletrendszert kielégítsék, akkor:

1. *A* $P_{12\ldots n} \equiv Q_{n+1}$ *pont független a* $P_1P_2 \ldots P_n$ *pontok sorrendjétől.*

2. *A* Q_{n+1} *pont kielégíti a*

$$(P_{k+1}\ldots nP_{12\ldots k}Q_{n+1}M) = -\frac{k}{n-k}$$

egyenletet.

3. *Ha a* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *pontcsoport mindegyik pontját a rajtuk keresztülmenő egyenes egy és ugyanavval a* P_{n+1} *pontjával felcseréljük,* n *számú új pontcsoportot nyerünk. Ha a* $P_1 \ldots P_{k-1} P_{n+1}P_{k+1}\ldots P_n$ *csoporthoz a* Q_k *pontot akként határozzuk meg, miként a* Q_{n+1} *pont keletkezett a* $P_1P_2\ldots P_n$ *csoportból, akkor a P és Q pontcsoportok közt a következő összefüggés áll fenn:*

$$(P_1P_2\ldots P_nP_{n+1}M) \barwedge (Q_1Q_2\ldots Q_nQ_{n+1}M).$$

---

* Az $(ABCD)$ szimbolum az ismeretes $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ kettős viszonyt jelenti.

E projektiv pontsorok karakterisztikája egyenlő —n-nel, vagyis

$$(P_k Q_k NM) = -n,$$

a hol N a projektiv pontsorok második kettőspontját jelenti.

4. *A Q pontok csoportjából egy R pontcsoportot, ebből egy S pontcsoportot, és így tovább ugyanazon az úton származtathatunk le, mint a mely úton a Q keletkezett a P pontcsoportból.*

Mindezek a pontcsoportok projektivek, vagyis

$$(P_1 \ldots P_{n+1} M) \overline{\wedge} (Q_1 \ldots Q_{n+1} M) \overline{\wedge} (R_1 \ldots R_{n+1} M)$$

és kettőspontjaik M, N közösek. Az új pontcsoportok mindinkább közelednek az N kettősponthoz, a melylyel egy végtelen sokszor végzendő szerkesztés után a határon egyesülnek.

5. *Az N pont M-nek harmonikus pólusa a P, Q, R, . . . pontcsoportokra vonatkozólag.*

II. *E tételek akkor is maradnak érvényben, ha a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokat nem egy egyenesen, hanem egy síkban vagy a térben veszszük fel tetszőlegesen és M ama síknak tetszés szerinti egyenese, vagy a térnek egyik síkja; ekkor azonban a P és Q pontcsoportok oly kollineár rendszert alkotnak, a melynek kollineáczió-középpontja és tengelye N illetve M; karakterisztikája pedig —n.*

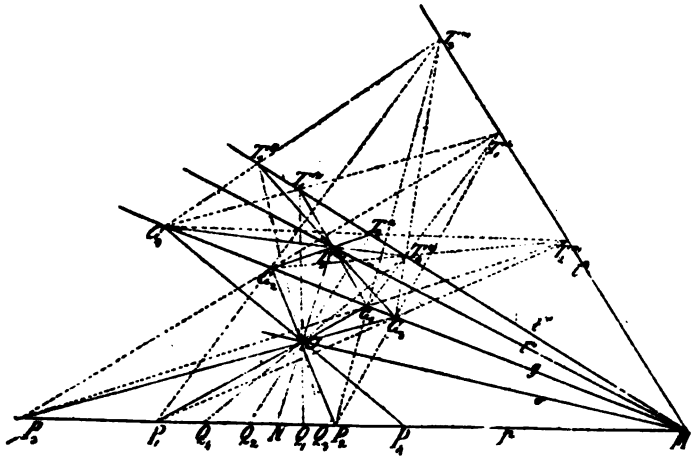
III. *Ha $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$, M tetszőleges térbeli egyenesek, akkor az előbbi tételek szintén érvényesek maradnak, csakhogy $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n+1}$, N szintén egyenesek lesznek, és a P_k, Q_k egyenesek M és N-re vonatkozólag egy axiális-kollineár rendszert képeznek, a melynek karakterisztikája —n.*

Bebizonyítás.

1. A p egyenesen vegyünk fel n pontot, $P_1, P_2, \ldots, P_n$-et és egy M pontot; az nP pontot projicziáljuk egy tetszés szerinti O pontból (1. ábra) egy az M ponton keresztül menő g egyenesre; legyenek a talált projekcziók: $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Nevezzük továbbá azt az egyenest, mely o-t ($o \equiv MO$) p, g-től harmonikusan elválasztja $t^{(0)}$-nak, és fektessük az M ponton át a $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n-1)}$ egyeneseket úgy, hogy a

$$
\begin{aligned}
&(gpt^{(0)}o) &&= -1\\
&(gt^{(0)}t^{(1)}p) &&= -1\\
&(gt^{(1)}t^{(2)}t^{(0)}) &&= -1\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\\
&(gt^{(n-3)}t^{(n-2)}t^{(n-4)}) &&= -1\\
&(gt^{(n-2)}t^{(n-1)}t^{(n-3)}) &&= -1
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

egyenletrendszert kielégitsék.



1. ábra.

Ebből az egyenletrendszerből következő új egyenletrendszer származtatható le:

$$
\begin{aligned}
&(gpt^{(0)}o) &&= -1\\
&(gt^{(0)}t^{(1)}o) &&= -2\\
&(gt^{(1)}t^{(2)}o) &&= -3\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\\
&(gt^{(n-3)}t^{(n-2)}o) &&= -(n-1)\\
&(gt^{(n-2)}t^{(n-1)}o) &&= -n.
\end{aligned}
\qquad (II)
$$

Ha ugyanis felteszszük azt, hogy

$$(gt^{(k-2)}t^{(k-1)}o) = -k,$$

tehát

$$(gt^{(k-1)}t^{(k-2)}o) = k+1,$$

és ennek az egyenletnek baloldalát $(gt^{(k-1)}t^{(k)}t^{(k-2)})$-vel, a jobboldalt az (I) szerint vele egyenlő értékű —1-gyel szorozzuk, akkor $(gt^{(k-1)}t^{(k)}o)=(gt^{(k-1)}t^{(k)}t^{(k-2)})(gt^{(k-1)}t^{(k-2)}o)=-1.(k+1)=-(k+1)$ egyenletet kapjuk, a melyből a (II) egyenletrendszer helyessége evidenciába lép.

A

$$P_{12}, P_{123}, \ldots, P_{12\ldots n-1}Q_{n+1}$$

pontokat ezek után következőképen szerkeszthetjük:

A

$$T_3^{(0)}=(P_1G_2, P_2G_1)$$

pontnak projekcióját G_3-ból $t^{(1)}$-re, $T_4^{(1)}$-nek nevezvén, $T_4^{(1)}$-nek projekcióját G_4-ből $t^{(2)}$-re, $T_5^{(2)}$-nek, és így tovább, végre $T_n^{(n-3)}$ pontnak projekcióját G_n-ből $t^{(n-2)}$-re $T_{n+1}^{(n-2)}$-nek nevezvén, a

$$T_3^{(0)}, T_4^{(1)}, \ldots, T_n^{(n-3)}, T_{n+1}^{(n-2)}$$

pontoknak projekcziói O-ból a p egyenesre lesznek a keresett

$$P_{12}, P_{123}, \ldots, P_{12\ldots n-1}, Q_{n+1}$$

pontok.

Ha ugyanis p, g, $t^{(k-3)}$, o sugarak és

$$\left| G_k T_{k+1}^{(k-2)} \right|_{(k=2,3,\ldots,n)}$$

egyenesnek metszéspontjait O pontból p egyenesre projicziáljuk, akkor (II) következtében

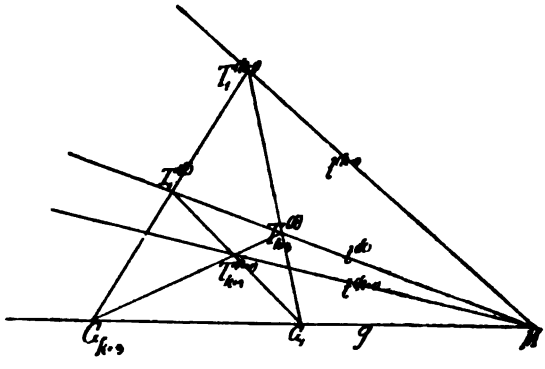
$$\begin{aligned}
&(P_2P_1P_{12}M) &&= -1\\
&(P_3P_{12}P_{123}M) &&= -2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&\qquad\text{(III)}\\
&(P_{n-1}P_{12\ldots n-2}P_{12\ldots n-1}M) &&= -(n-2)\\
&(P_n\ P_{12\ldots n-1}Q_{n+1}M) &&= -(n-1)
\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez vezettetünk, a mely a szerkesztés helyes voltát igazolja.

Ezután kimutatjuk, hogy ha a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontok közül két tetszőlegest egymással fölcserélünk Q_{n+1} helyzete változatlan marad.

A $t^{(0)}$ egyenesen fekvő $T_1^{(0)} = (P_2G_3, P_3G_2)$ pont projekcióját G_4-ből $t^{(1)}$-re $T_1^{(1)}$-nek nevezvén; $T_1^{(1)}$-nek projekcióját G_5-ből $t^{(2)}$-re $T_1^{(2)}$-nek, és így tovább, $T_1^{(k)}$-nak projekcióját G_{k+4} pontból $t^{(k+1)}$-re $T_1^{(k+1)}$-nek nevezvén (2. ábra): az 1) egyenletrendszer és $T_1^{(k)}T_{k+3}^{(k)}G_1G_{k+3}$ négyszög harmonikus tulajdonságai következtében, $G_1T_1^{(k)}$ egyenes a $T_{k+4}^{(k+1)}$ ponton megy át.

Mert föltételezvén, hogy a $T_1^{(k-1)}T_{k+2}^{(k-1)}G_1G_{k+2}$ négyszög $G_1T^{(k-1)}$ oldala a $T_{k+3}^{(k)}$ ponton megy át (a mi abban az esetben fog bekövetkezni, midőn $k=1$), a $T_1^{(k)}T_{k+3}^{(k)}G_1G_{k+3}$ négyszögnek $G_{k+3}T_1^{(k)}$, $G_1T_{k+3}^{(k)}$ oldalai egymást $T_1^{(k-1)}$ pontban; $(G_1G_{k+3}, T_1^{(k)}T_{k+3}^{(k)} =$



2. ábra.

$(g, t^{(k)})$ oldalai egymást az M pontban metszik, és így a harmadik oldalpár $G_1T_1^{(k)}$, $G_{k+3}T_{k+3}^{(k)}$ metszéspontja azon a $t^{(k+1)}$ egyenesen fekszik, a mely a $T_1^{(k-1)}$ pontot, vagy a mi ugyanaz, a $t^{(k-1)}$ egyenest, t^k és g-től harmonikusan választja el. Ámde a $t^{(k+1)}$ és $G_{k+3}T_{k+3}^{(k)}$ egyeneseknek metszéspontja $T_{k+4}^{(k+1)}$, és ezért $G_1T_1^{(k)}$ is ezen a ponton megy keresztül.

Vegyük most fel, hogy csak két pont P_1, P_2 és M volna adva, könnyen látható, hogy akkor a

$$(P_2P_1P_{12}M) = -1, \quad (P_1P_2P_{21}M) = -1$$

egyenletekből meghatározott P_{12}, P_{21} pontok egybeesnek, vagyis

$$P_{ij} \equiv P_{ji}.$$

Ha három pontot veszünk fel, P_1, P_2, P_3-at, akkor a

$$(P_2P_3P_{23}M)=-1, \quad (P_1P_{23}P_{321}M)=-2$$

egyenletekből meghatározott P_{321} pont, minthogy $T_4^{(1)}$-nek projekciója O-ból p-re, P_{123}-mal esik egybe, vagyis $P_{ijk}\equiv P_{kji}$, s minthogy az első két mutató szintén felcserélhető, azért bármely két mutatót is fel lehet cserélni.

Tegyük fel, hogy az 1) alatti tétel $(n-1)$ pontra, $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$-re már be van bizonyítva; vegyünk most fel n pontot:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$$

et, akkor a

$$\begin{aligned}
&(P_3P_2P_{23}M) &&=-1\\
&(P_4P_{23}P_{234}M) &&=-2\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(P_nP_{23\ldots n-1}P_{23\ldots n}M) &&=-(n-2)
\end{aligned}$$

egyenletrendszerből meghatározott $P_{23\ldots n}$ pont a föltétel szerint $P_{n23\ldots n-1}$ ponttal és a

$$(P_1P_{n,2\ldots n-1}P_{n,2\ldots n-1,1}M)=-(n-1)$$

pont $P_{12\ldots n}$ ponttal összeesik, mert mindakettő ugyanegy pontnak a $T_{n+1}^{(n-2)}$-nek projekciója p-re az O-ból. Ezzel az 1) tétel be van bizonyítva.

2. A (II) egyenletrendszer $(k+2)$-dik egyenlete:

$$(gt^{(k)}t^{(k+1)}o) \quad =-(k+2),$$

ebből

$$\begin{aligned}
&(got^{(k)}t^{(k+1)}) &&= \frac{k+3}{k+2}\\
&(got^{(k+1)}t^{(k-2)}) &&= \frac{k+4}{k+2}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(got^{(k+l-2)}t^{(k+l-1)}) &&= \frac{k+l+1}{k+l}\\
&(got^{(k+l-1)}t^{(k+l)}) &&= \frac{k+l+2}{k+l+1}.
\end{aligned}$$

Ha ezeknek az egyenleteknek bal- és jobboldalát egymással szorozzuk, akkor a

$$(got^{(k)}\, t^{(k+l)}) =$$
$$= (got^{(k)}\, t^{(k+1)}) \cdot (got^{(k+1)}\, t^{(k+2)}) \ldots (got^{(k+l-1)}\, t^{(k+l)}) = -\frac{k+l+2}{k+2}$$

egyenletet nyerjük, a melyből

$$(gt^{(k)}\, t^{(k+l)}\, o) = -\frac{k+2}{l}.$$

Helyezzünk ez egyenletbe $k+1$ helyett s-et, akkor az egyenlet ily alakú lesz

$$(gt^{(k)}\, t^{(s)}\, o) = -\frac{k+2}{s+k} \qquad (IV)$$

és ennek alapján

$$(gt^{(k-2)}\, t^{(n-2)}\, o) = -\frac{k}{n-k}. \qquad (IV_1)$$

Az (I) egyenletrendszer utolsó egyenlete előtt levő $(n-k-2)$ egyenletből

$$(gt^{(k-1)}\, t^{(k)}\, t^{(k-2)}) = -1$$
$$(gt^{(k)}\, t^{(k+1)}\, t^{(k-1)}) = -1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(gt^{(n-3)}\, t^{(n-2)}\, t^{(n-4)}) = -1$$

hasonló úton, mint a mikép I)-ből a II) keletkezett, következő egyenletrendszer vezethető le:

$$(gt^{(k-1)}\, t^{(k)}\, t^{(k-2)}) = -1$$
$$(gt^{(k)}\, t^{(k+1)}\, t^{(k-2)}) = -2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(gt^{(n-3)}\, t^{(n-2)}\, t^{(k-2)}) = -(n-k-1).$$

Ezen előzmények után térjünk át a 2) tétel bebizonyítására.

Tudjuk, hogy a $P_{12\ldots k}$ pont $T_{k+1}^{(k-2)}$ pontnak projekciója O-ból p-re, most meg akarjuk mutatni, hogy mikép lehet a $P_{k+1\ldots n}$ pontot a már meglevő T pontok segítségével megszerkeszteni.

E végből a (l. 3. ábra)

$$T_{k+3}^{(k)},\ T_{k+4}^{(k+1)},\ \ldots\ .\ T_{n-1}^{(n-2)}$$

pontok projekczióit a $T_{k+1}^{(k-2)}$ pontból g egyenesre

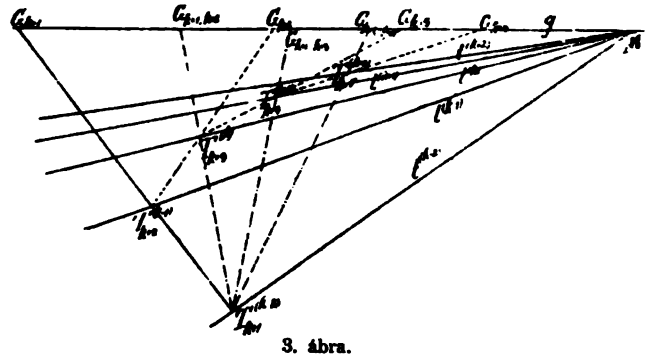
$$G_{k+1,\,k+1},\ G_{k+1,\,k+2,\,k+3},\ \ldots,\ G_{k+1,\,k+2,\ldots n}$$

betükkel jelöljük, és a

$$g,\ f^{k-1},\ f^{(k)},\ f^{(k-2)};\ g,\ f^{(k)},\ f^{(k+1)},\ f^{(k-2)},\ \ldots,\ g,\ f^{(n-3)},\ f^{(n-2)},\ f^{(k-2)}$$

sugaraknak metszéspontjait a

$$|\,G_{k+2}\,T_{k+2}^{(k-1)}\,T_{k+3}^{(k)}\,|\,;\ |\,G_{k+3}\,T_{k+3}^{(k)}\,T_{k+4}^{(k+1)}\,|\,;\ \ldots\ |\,G_n\,T_n^{(n-3)}\,T_{n+1}^{(n-2)}\,|$$



3. ábra.

egyenesekkel a $T_{k+1}^{(k-2)}$ pontból g-re projicziáljuk. E pontok projekczióí mint (V)-ből látható, a következő egyenleteket állapitják meg:

$$(G_{k+2}\,G_{k+1}\,G_{k+1,\,k+2}\,M) = -1$$
$$(G_{k+3}\,G_{k+1,\,k+2}\,G_{k+1,\,k+2,\,k+3}\,M) = -2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(G_n\,G_{k+1,\,k+2,\ldots,n-1}\,G_{k+1,\,k+2\ldots n}\,M) = -(n-k-1).$$

Ez egyenletek baloldalán álló kifejezésekben a pontokat O-ból p-re projicziálván és azok jelentését tekintetbe véve a

$$(P_{k+2}\,P_{k+1}\,P_{k+1,\,k+2}\,M) = -1$$
$$(P_{k+3}\,P_{k+1,\,k+2}\,P_{k+1,\,k+2,\,k+3}\,M) = -1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(P_n\,P_{k+1,\,k+2\ldots n-1}\,P_{k+1,\,k+2\ldots n}\,M) = -(n-k-1)$$

egyenleteket kapjuk, a melyeknek alapján a $P_{k+1\,k+2\ldots n}$ pont, mint $G_{k+1\,k+2\ldots n}$-nek projekciója van meghatározva.

Ámde a $G_{k+1,\,k+2\ldots n}$, $T_{k+1}^{(k-2)}$, $T_{n+1}^{(n-2)}$ pontok ugyanegy egyenesben fekszenek, melynek ha metszéspontjait g, $t^{(k-2)}$, $t^{(n-2)}$, o sugarakkal O-ból p-re projicziáljuk, a (IV_1) egyenlet következtében a

$$(P_{k+1,\,k+2,\ldots n}\,P_{12\ldots k}\,Q_{n+1}\,M) = -\frac{k}{n-k}$$

egyenletet nyerjük, a mely a 2)-dik tétel helyességét igazolja.

3. Hogy a 3)-dik tételben kifejezett Q_1, Q_2, ... Q_n, pontokat megtaláljuk, nevezzük a P_{n+1} pontnak projekcióját O-ból g-re G_{n+1}-nek; továbbá a

$$T_1=(P_2G_3,\ P_3G_2),\quad T_2=(P_3G_1,\ P_1G_3),\quad T_3=(P_1G_2,\ P_2G_1)$$

pontoknak projekcióit G_4-ből $t^{(1)}$-re: $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_3^{(1)}$-nek; e pontoknak és $T_4^{(1)}$-nek projekcióit G_5-ből $t^{(2)}$-re: $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$, $T_3^{(2)}$, $T_4^{(2)}$-nek, és így tovább; a $T_1^{(n-4)}$, $T_2^{(n-4)}$, ... $T_{n-1}^{(n-4)}$ pontoknak projekcióit G_n-ből $t^{(n-3)}$-ra: $T_1^{(n-3)}$, $T_2^{(n-3)}$, ... $T_{n-1}^{(n-3)}$; végre ezeknek a pontoknak és $T_n^{(n-3)}$-nak projekcióit G_{n+1}-ből $t^{(n-2)}$-re: $T_1^{(n-2)}$, $T_2^{(n-2)}$, ... $T_n^{(n-2)}$-nek. Az első tétel bebizonyításából látható, hogy ez utóbbi pontoknak projekcziói O-ból p-re a kívánt Q_1, Q_2, ... Q_n pontok.

$T_k^{(n-2)}\,T_{n+1}^{(n-2)}\,G_k\,G_{n+1}$ négyszög harmonikus tulajdonságai folytán $T_k^{(n-1)}\,G_k$, $T_{n+1}^{(n-2)}\,G_{n+1}$ oldalak $T_{n+2}^{(n-1)}$ metszéspontja azon a $t^{(n-1)}$ egyenesen fekszik, mely a

$$(g\,t^{(n-2)}\,t^{(n-1)}\,t^{(n-3)}) = -1$$

egyenletből van meghatározva, mert $T_k^{(n-2)}$, $T_{n+1}^{(n-2)}$ pontok $t^{(n-2)}$-ön, G_k, G_{n+1} pontok g-n és a $T_k^{(n-3)}=(T_k^{(n-2)}\,G_{n+1},\ G_k\,T_{n+1}^{(n-2)})$ metszés pont $t^{(n-3)}$ egyenesen fekszik.

Ebből folyólag az összes

$$\left|\,G_k\,G_k^{(n-2)}\,\right|_{(k=1,\,2,\ldots,\,n+1)}$$

egyenesek a $T_{n+2}^{(n-1)}$ ponton mennek át.

Minthogy a $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}, M$; $T_1^{(n-2)}, T_2^{(n-2)}, \ldots T_{n+1}^{(n-2)}$, M pontsorok a $T_{n+2}^{(n-1)}$ pontra vonatkozólag perspektivek, azért nemcsak e pontsorok projekciója O-ból p-re projektiv, hanem még az $OT_{n+2}^{(n-1)}$ egyenesnek N metszéspontja p-vel egyik kettőspontja ama soroknak, vagyis:

$$(P_1 P_2 \ldots P_{n+1} NM) \overline{\wedge} (Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1} NM).$$

Tekintve még, hogy a $G_k T_k^{(n-2)} T_{n+2}^{(n-1)}$ egyenes és $g, t^{(n-2)}, t^{(n-1}$ O sugarak metszéspontjainak projekcziói O-ból p-re; P_k, Q_k, N, M pontok, tekintve továbbá a (II) egyenletrendszer utolsó egyenletét következik:

$$(P_k Q_k NM) = -n. \qquad \text{(VI.)}$$

Klug Lipót.

ADALÉK A MARS FELÜLETÉNEK ELMÉLETÉHEZ.

Schiaparelli észleletei alapján tudjuk, hogy a Mars egyenlítője táján világos szinű öv mutatkozik, melyben sötét csatornák képződnek és eltünnek. A legfeltünőbb tünemény azonban e csatornák megkettőződése.

Eddig a földön még nem észleltetett oly tünemény, mely a Mars övének változásaihoz hasonló volna, úgy hogy e változásokra mai napig még nincsen magyarázatunk.

Véletlenül a párolgó viz felszinén bizonyos tüneményeket észleltem, melyek annyira hasonlók a Mars úgy nevezett continenseinek változásaihoz, hogy gyakran nehéz volna a két tárgy rajzai közt külömbségeket találni. Hogyha e két tünemény tényleg analog, akkor a Marsnak úgy nevezett continensei felhők.

Tapasztalataim a következők:

Ha valamely csészét közel szinig megtöltünk forró (azaz közel 100 C fokú) tiszta vizzel és azt kihülni hagyjuk oly helyen, hol nincsen léghuzat, akkor nem látunk feltünőt. Ha azonban a vizet sötétre festjük anilin festékkel, vagy ha tiszta viz helyett sötét theát veszünk, akkor a megbeszélendő tünemény közönséges szobahőmérséklet mellett (20° C) fejlődni kezdődik, mikor a viz hőfoka 70° C alá száll; 60° C-nál a tünemény legteljesebben mutatkozik, és 50° C-nál már tünőben van.

Mig a forró viz még erősen gőzölög, a benyomás az, hogy a felső hideg levegő buborékok alakjában folyton lecsap a viz felszinéig, és a köd a buborékok közt oszlopok és lemezek alakjában felszáll. A magasban a ködlemezek és ködoszlopok sodródnak. A lemezek és oszlopok alja a viz felszinén folyton mozgó, tág öltésü hálót képez. A hol egy légbuborék lecsap, ott a hirtelen képződő köd a viz felszinén vizszintesen kitér, sepri a viz felszinét és a nevezett

alakokban felszáll. A benyomás körülbelül az, mintha a víz tükre felett folyton explosiók történnének.

E tünemények oka egyszerű. A vízből felszálló meleg láthatatlan gőz, mely könnyebb a levegőnél, a víz felett vízszintes gőzréteget képez, mely labilis egyensúlyban van a környező levegővel szemben. A mint az egyensúly megzavarodik, gyorsulások merülnek fel, és a levegő és gőz helycseréje úgyszólván explosiószerűen történik.

Az eddig leírt tünemények csak bevezetők. A mi történik, mikor a víz hőfoka 70° C alá száll, és a mit ezennel be akarok mutatni, annak több részletét úgy hiszem csak rövidlátó szem láthatja tisztán, és az is csak úgy, hogy lassan hozzászokik a látványhoz, mert az első kísérleteknél rendesen csak chaotikus ködáramlásokat látunk. Nehéz továbbá a kellő megvilágítást találni. Én legjobban látom a leirandó tüneményeket, ha a víz felszinén egy ablak tükröződik. Az ablakkereszt sötét képében legjobban látom a tüneményeket.

Mikor a víz körülbelül 70° C-ra hült le, a felszálló ködben számos a láthatóság határán álló vízcseppecskét látunk nagy gyorsasággal felszállni. Később e vízcseppecskéket már a víz felszine felett is látjuk a légáram irányában nagy sebességgel elsietni, és akkor LEIDENFROST-féle végtelen kicsiny cseppekre emlékeztetnek. Végre a légáram e cseppecskéknek és a ködnek egy részét már nem birja felemelni, és ekkor a visszamaradó cseppecskék és a visszamaradó köd a víznek különben tiszta felszinén hosszabb-rövidebb, szélesebb-keskenyebb, egyenes nagy görbe csikokat és ködfoltokat képeznek, melyek oly szorosan simulnak a víz felszinéhez, hogy vastagságuk alig látható.

E csikok kevés másodpercz alatt eltünnek megint úgy, hogy a szélök elmaródik, elrágódik.

E ködfoltokat az ember kezdetben habnak nézi, a milyen forró vizen képződni szokott. Ámde nem ritkán látjuk, hogy a légáram egy meglevő ködfoltot a víz felett elsöpör és oly görbében felsodorja és elviszi, mint a szél a port. A ködnek egy része azonban ilyenkor megint le szokott szállni, mint a felvert por a levegőben,

néha 1 cm magasságból, és ekkor a köd a víz felszinén új csikot képez. A habot azonban a légáram sem nem sepri, sem nem emeli.

A mint a víznek hőfoka leszáll, a csikok mindig szélesebbek lesznek az elmosódott szélükön, azaz azon irányban terjednek, a honnan a légáram jön, és végre a vizen fehéres ködtáblák úsznak, melyeknek vastagsága úgy látszik egy milliméternek csak egy kis részét képezi. E ködtáblák szemölcsözőknek látszanak, mint a tejút. Ezeken mutatkoznak a leirandó tünemények.

Ha egy ködtábla felett légáram megy el, akkor sokszor úgy látszik, mintha az áram a táblának egy felső rétegét fátyol alakjában magával vinné. A táblának hypothelikus alsóbb rétege mozdulatlanúl megmarad a helyén, míg a fentebbi fátylot a légáram elviszi, összesöpri, felemeli és megint elejti, úgy hogy a fátyol új ködcsikot ád a víz felszinén. E tüneményt különben úgy is lehetne megmagyarázni, hogy a köd nagyon különböző nagyságú cseppecskékből áll. A légáram csak a legkönnyebbeket viszi magával, míg a nehezebbek oly mély rétegbe merülnek, mely a gőz vagy levegő belső surlódása következtében az áramlásban már nem vesz részt hanem úgyszólván a vízhez tapad.

A ködtáblákon a következő tünemény mutatkozik, mely a jelen közleménynek főtárgyát képezi. A tábla hirtelen repedezik, és éles határú göröngyökre bomlik fel, mint a hogyan pl. a teljesen átázott agyagos felület szokott száradáskor szétrepedezni, melyek közt a víz felszine tökéletesen tiszta. E repedések úgy látszik egészen függetlenek a ködcsikoktól, melyeket a légáramok a ködtáblákon összesepernek, és összevissza keresztezik azokat.

A repedések néha minden mozgalom nélkül képződnek, mintha a csatornák a táblákban kioldódnának vagy kivágódnának. Többször azonban, mikor egy repedés vagy repedési háló képződik, e pillanatban a táblák mintegy szétugranak, mintha explosio történt volna, vagy mintha centrifugalis légáram szétszakitaná őket.

Kérdés, mely physikai viszonyok jellemzik a repedések helyét? Meglehet, hogy a repedések helyén a viz felszine hidegebb. Ugyanis ha a csésze széléről hidegebb légáram száll a ködtáblára, akkor az áram a ködtáblának egy részét (rétegét) elsepri, a megmaradó

ködréteg pedig igen gyorsan eltünik. Úgy látszik a hideg légáram lehütötte a viznek legfelsőbb rétegét, ez kevesebb gőzt fejleszt, a lassabban felszálló gőz nem képes már a ködtábla cseppjeit lebegve tartani, és azok a vizbe sülyednek, és a viz felszine tiszta lesz. Ha a hideg légáram megszünik, akkor egy kis idő múlva a ködtábla megint képződik, a melegebb levegőben. Ugy látszik a viznek legfelsőbb rétege hővezetés által megint felmelegedett. A priori az ellenkezőt várnák, hogy tudniillik a hideg légáram a ködtáblát sürübbé tegye.

A következő kisérlet is a mellett szól, hogy a repedések helyén a viz felszine hidegebb. Ha ugyanis hideg tárgyat, pl. hideg késnek hegyét nagyon közel tartunk a viz felszinéhez, akkor alatta a ködtábla nem lesz sürübb, hanem ellenkezőleg tiszta, ködmentes folt képződik a hideg tárgy alatt. Meglehet, hogy a hideg tárgyon az alatta felszálló gőz igen hamar lecsapódik, az elpárolgás gyorsitva lesz, a viz felszine ennek következtében kihül, és az elpárolgás oly lassúvá lesz, hogy köd nem képződik többé. A viz lehülése következtében talán nem is elég nagy már a hőfokkülömbség, hogy köd képződhetnék.

A repedések egy pár másodpercz alatt megint eltünnek, de kevésbé azáltal, hogy a két szélük elmosódnék, mint inkább azáltal, hogy a légáramok, melyeknek iránya úgy látszik egészen független e repedések irányától, a kép fölé új ködfátylot sepernek. A régi, alsóbb rétegek eltünnek, talán a vizbe merülnek vagy elpárolognak, a régi kép is ennek következtében elhalványul, eltünik, és a hol repedések voltak, már csak meglehetős homogén ködtábla mutatkozik.

Ha egy repedési háló egy kis ideig, talán egy ötöd vagy egy fél másodperczig mozdulatlanúl állott, hirtelen új háló képződik, mely általában függetlennek látszik a régi hálótól és azt sokféleképen keresztezi. Feltünő azonban, hogy egyes új repedések, még pedig hosszú repedések, párhuzamosak régiekhez. Ismételve láttam, hogy egymás után négy párhuzamos repedés képződött. Néha úgylátszik, mintha az új hálónak egy része nem volna egyéb, mint a régi háló egy részének ismétlése, egy kis eltolódással. Az sem nagyon ritka

eset, hogy egy repedés kiszélesedik, azután egy fehér ködgerincz képződik a közepében, úgy hogy az egyszerű csatornából kettős csatorna lesz. Ritka eset, hogy egy új csatorna lassan képződnék. Ekkor az előrehatoló vége rágottnak látszik. A tábla nem tolódik szét, hanem a csatorna úgyszólván oldás által terjed, épen úgy mint a tiszta, ködmentes folt a kés hideg hegye alatt. Néha a csatornának egyik szélén sűrűbb lesz a köd. Ez akkor történik, mikor a légáram keresztezi a csatornát és a táblá felől a csatorna partjához söpri a ködöt.

A kép, melyet a 60 fokú víz felszíne mutat, alig külömböztethető meg a legjobb Marsrajzoktól, csakhogy a kép oly gyorsan változik, hogy azt lerajzolni lehetetlenség.

Hogyha a párolgó víz és a Mars felülete közt tényleg áll a hasonlóság, akkor a Marsról a következőket mondhatjuk. A Marsnak talán egész felülete víz. A sarkokon, ha ott sincs szárazföld, a vizet jég boritja. A Marson passzatszelek vannak, melyek a mérsekelt övön úgy tüntetik el a ködöt, mint a hideg légáramok a csésze meleg vizén. A felhőréteg tehát csak a meleg égövön van.

A Mars atmosphærája sokkal gyengébb a föld légkörénél. Ámde gyér levegőben a surlódás nem kisebb, mint sűrű levegőben. Ha tehát a Mars atmosphærájában légáramok vannak, akkor a Marson a surlódás a mozgó lég tömegéhez mérten sokkal nagyobb, mint a földön. Annak az a következménye, hogy a Marson a légkör áramlásai nem lehetnek oly rohamosak és bonyodalmasak, mint a földön. A felhők alakváltozásai azért a Marson sokkal lasabban és egyszerűbben fognak történi, mint a földön.

A Marsnak csatornái nyilások a felhőrétegben, melyeknek rejtélyes oka hasonló azon okhoz, mely a meleg víznek felette vékony felhőrétegében hasonló csatornákat teremt.

A Mars felületén ismételve észleltek elmosódásokat, melyeknek helyén, miután megszüntek, fehéres folt mutatkozott. E fehéres foltot eddig friss hónak tartották. Ámde a meleg vizen is látjuk, hogy a mozdulatlan ködtábla felett a légáram magasabb rétegekben ködöt sodor, mely végre leszáll, és a változatlanúl megmaradt ködtáblára mint fehéres folt rakodik le. *Fuchs Károly.*

A CSAVART OSZLOP SAJÁT ÁRNYÉKHATÁRVONALANAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Az árnyékhatárvonal különböző alakjairól.

Az árnyékhatárvonal első projekciója egy általános 6-odrendű konchoida, melynek orthogonalis szimmetrálisa a T' polusnak az alapkör középpontjával O'-sel való összeköttetése.

Lényeges befolyást gyakorol a keletkező görbe alakjára a T' pont fekvése; e pont projicziáló sugara — a Φ felület egyik vezérvonala — ugyanis az F felületet az árnyékhatárvonalhoz tartozó pontokban metszi. Mivel ez a projicziáló sugár a felület minden menetét általában két különböző pontban metszi, T' a projekczió kettőspontja lesz. Ha e metszéspontok valósak és különbözők, ez a pont közönséges kettőspont; ha valósak és összeesők — T' az első konturvonalon van — akkor visszatérő pont a szimmetrálissal, mint érintővel; ha végre képzetesek, a projicziáló sugár egy képzetes pontpár összeköttetése és T' a projekczió izolált pontja. Mivel a T' fekvése bizonyos felületre nézve csakis a fénysugár hajlásától függ, a fénysugár irányának változtatása segítségével ez alakok mindegyikére akadunk és természetes, hogy a visszatérő pont átmenetképen szerepel a kettős és izolált pont között.

Ha a Φ konoidfelület amaz alkotóit keressük, a melyek a T' projicziáló sugarának az F felülettel való metszéspontjain haladnak át, akkor ez alkotók projekczióiban a kettőspont érintőit is megtaláljuk, mivel a Φ felület ama metszéspontokhoz tartozó érintősikjai projicziáló sikok. A T'-ból, mint középpontból ρ sugár-

ral leírt kör fogja a középponti csavarvonal alapkörét a keresett érintőkhöz tartozó pontokban metszeni.

Lehet a görbe első projekciójának még két valós kettőspontja. A T' ponton keresztül menő sugársor sugarai ugyanis a középponti csavarvonal alapkörén egy húrrendszert állapítanak meg, a melyben 2ρ hosszaságú húrok is foglaltatnak. E húrok felező pontjai lesznek a keresett kettőspontok. Általában két ily húr szerkeszthető, de ezek valósságának első föltétele

$$\rho < r,$$

mivel a húrok felső határa $2r$. Ha az ily követelményeknek megfelelő húr egyik végpontjának a T' pólustól való távolságát x-el, a pólusnak az alapkörre vonatkoztatott hatványát pedig k-val jelöljuk, akkor az

$$x(x-2\rho) = \pm k^2$$

egyenlet adja meg az e mennyiségek között fennálló relációt, a miből

$$x = \rho \pm \sqrt{\rho^2 \pm k^2}.$$

Ha T' az alapkörön kívül van, vagyis k^2 pozitiv, x valós, és a föntebbi föltétel kielégítése mellett a kettőspontok is valósak.

Ha ellenben T' az alapkörön belül van, vagyis k^2 negativ, x csak addig valós, a míg $\rho > k$, és a kettőspontok valósak, ha a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$r > \rho > k.$$

A görbe projekciójának T' pontja kiválik azonban a görbe többi kettőspontjai közül. A T' sugársor minden sugara a görbét még két pontpárban metszi, a melyek páronkint az alapkörön megállapított metszéspontokhoz szimmetrikus fekvésűek. Az alapkört érintő sugarakon e pontpárok összeesnek; a sugarak a görbét két különböző pontban érintik és ennek kettős érintői lesznek. Eltekintve azok valós vagy képzetes voltától, mondhatjuk:

Az alapkör konjugált polárisaitól a T' pólusban meghatározott sugárinvoluczió kettőssugarai görbénk kettősérintői.

Uj és eddig nem tárgyalt némileg egyszerűbb görbealakokra jutunk, ha a fénysugarak hajlása egyenlő a középponti csavarvonal érintőinek hajlásával. Ez esetben a felület minden menetmagasságán olyan alkotó kör található, a melynek mentén a felület érintősíkjai a fénysugarakkal parallelek. Ez alkotó körök képezik árnyékhatárvonalunk egy részét, úgy hogy a hátramaradt rész első projicziáló hengere, e körök projicziáló hengerének különválása következtében már nem 6-od, hanem csakis 4-edrendű. Az árnyékhatárvonal első projekcziója ilyenkor egy körből és egy negyedrendű görbéből áll, a mely utóbbi LIMAÇON vagy PASCAL-féle csiga név alatt ismeretes. A T'' pont, a LIMAÇON pólusa rajta fekszik a középponti csavarvonal első projekcziján. A görbe alakja ebben az esetben az alkotó körök sugarától függ, és változik a szerint, a mint az nagyobb, egyenlő, vagy kisebb $2r$-nél. A T''-ben megállapított parabolikus sugárnivolucziő kettőssugara nem érinti többé a görbe projekcziőját, ő reá esnek azonban az árnyékhatárvonal kettőspontjainak első projekcziói.

III.

Az általánosított konchoida érintőiről.

Az eddig elmondottak könnyű szerrel alkalmazhatók az általános konchoida érintőinek szerkesztésére. Az alapgörbék megadott ρ és r sugarú körök, a pólus T'' pedig az egyik pl. ρ sugárral biró kör középpontja. Az ezektől meghatározott konchoida mindig képviselheti egy oly csavart-körhengerfelület saját árnyékának első projekcziőját, a melynek középponti csavarvonala az r sugarú kört birja alapkörül, alkotó körei pedig ρ sugaruak. Ha a T''-ből kiinduló és a kört M''-ben metsző sugár P_1' pontjában $M''P_1'=\rho$ érintő szerkesztendő, szükségünk van először a középponti csavarvonal M''-hez tartozó érintőjére, illetőleg annak első nyompontjára. Ennek az érintőnek bármely pontja választható nyompontul, mivel a nyompontnak az érintőn való változtatása csakis a projekczió-lap párhuzamos eltolásának felel meg, mely változtatás az érintőre befolyással nincsen.

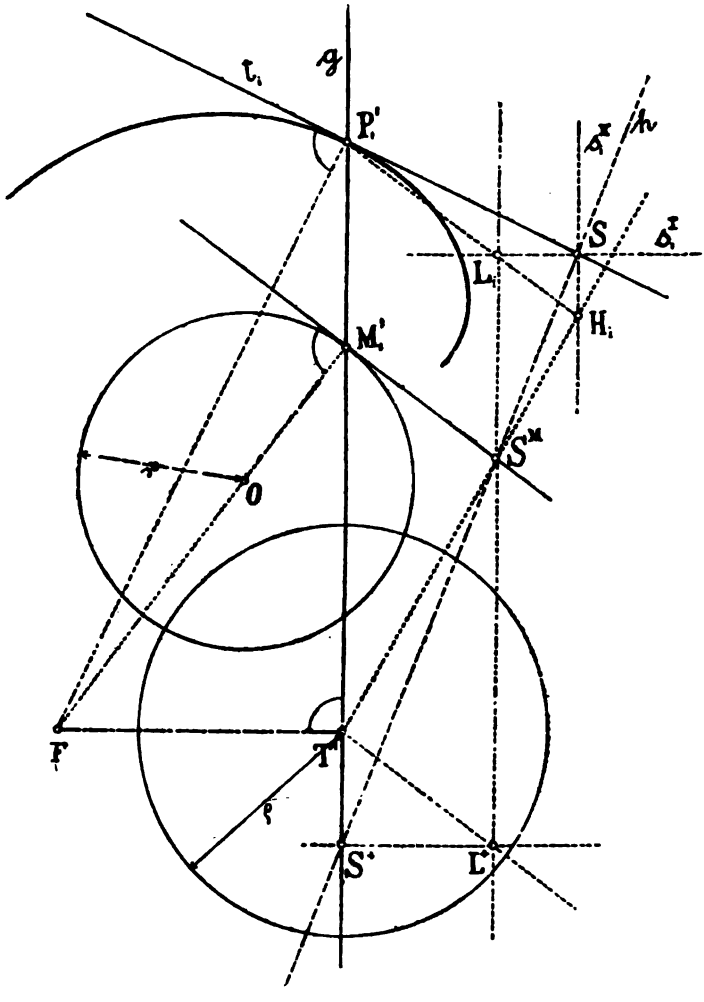
Ha tehát az M' ponthoz tartozó érintő S^M pontját választjuk nyompontul, s_1^I és s_1^{II} egyenesek metszéspontjában S_1-ben a keresett érintő egyik pontját nyerjük, minélfogva az S_1P_1'-ben meghúzható.

Az ezekben adott szerkesztés azonban hosszadalmas és egyes, kivételes pontokra nem is alkalmazható; törekedni fogunk tehát ezt lehetőleg előnyös átalakításnak alávetni.

Tekintsük ugyanis az r sugarú alapkört és a T' pólust állandónak, a ρ sugarú kör sugarát ellenben változónak, akkor ρ értékeinek megfelelően egy egész konchoida sorozatot nyerünk, és ennek megfelelően a térben a csavart-körhenger-felületek sorozatát, a melyre nézve azonban a fénysugáriránynyal konjugált konoidfelület közös. A konoidfelület minden alkotója kimetsz rajtuk egy-egy pontsort, és e pontok mindegyikében az árnyékhatárvonal érintőjét meghatározza az illető felület ebben való érintősíkjának a konoidfelület megfelelő érintősíkjával való metszésvonalában. Egy alkotótól kimetszett pontsort szemügyre véve, látjuk, hogy a felületsor érintősíkjai e pontsorral perspektiv fekvésű parallelsiksort alkotnak, és hogy a konoidfelület érintősíkjaitól képezett siksor ezzel projektiv. Tekintettel arra, hogy két projektiv siksor megfelelő elemeitől meghatározott egyenesek — ebben az esetben az árnyékhatárvonalak érintői — általában hiperboloidon, a mostani esetben hiperbolikus paraboloidon feküsznek, mondhatjuk, hogy ezek első projekcziói parabolát burkolnak be.

Ugyanarra az eredményre vezet megadott sikszerkesztésünk is. Jelöljük ugyanis a szereplő $M'S^MP_1'$ pontoktól (4. ábra) megállapított parallelogramm negyedik csúcspontját L_1-gyel, és az $T'S^M$ tartón megállapított pontot H_1-gyel; akkor S_1 oly derékszögű háromszög harmadik csúcspontja, a melynek átfogója L_1H_1, befogói pedig $H_1S_1 \parallel T'P_1'$-gyel és $L_1S_1 \perp T'P_1'$-re. Változó P_1' pont mellett a háromszögeknek egy egész sorozatát nyerjük, de ezek mindannyian hasonlók és hasonló fekvésűek az S^M hasonlósági pontra nézve. Ebből következik, hogy az S pontok egyenes pontsort alkotnak, a mely a P' érintési pontok sorával projektiv. E projektiv pontsorokban a ∞-ben fekvő pontok meg-

felelő pontpárt alkotnak, és a többi megfelelő pontpárok összeköttetései nem parallelek; a pontsorok projektiv hasonlók és egy-



4. ábra.

máshoz képest ferde fekvésben vannak. Ennek közvetetlen folyománya az, *hogy a konchoidasorozathoz egy vezetősugár mentén szerkesztett érintők parabolát burkolnak be.*

Az M' és S^M pontok pontsoraink megfelelő pontjai; az $M'S^M$ egyenes, tehát a parabola érintője. A hasonló háromszögek sorozatában a $T'L^+S^+$ háromszög is foglaltatik; ebből következik, hogy T' és S^+ egymásnak megfelelő pontok, és hogy továbbá T' az egyik pontsor tartójának — g-nek — burkolt parabolánkkal való érintési pontja, mivel S^+ a származtató pontsorok közös eleme. A parabola tengelyiránya is könnyen megszerkeszthető. Jelöljük ugyanis az alapkör M'-ben levő érintőjét a'-vel, az S pontok tartóját c-vel, a vezérsugarat a-val, érintési pontját, mint a és b' végtelen közel fekvő érintők metszéspontját (ab')-vel, a sík végtelenben fekvő egyenesét b-vel, végre keresett érintési pontját, mint b és c' végtelen közeli érintők metszéspontját (bc')-vel, akkor $abc\,a'b'c'$-ben Brianchon-féle hatoldalt nyerünk, a melynek Brianchon-féle pontja L^+, mivel benne az ab', $a'b$ és ac', $a'c$ egyenesek találkoznak. Ezen áthalad

$$(bc',\ b'c) \equiv S^+L^+$$

egyenes is, mely parabolánk tengelyirányát adja. Mivel

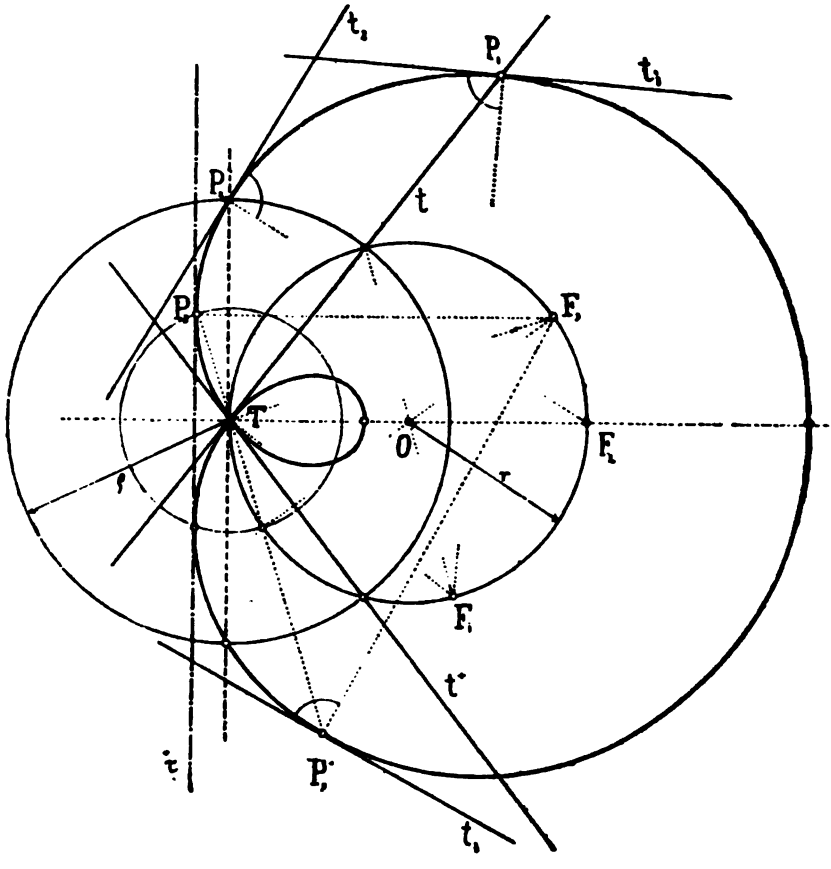
$$S^+L^+ \perp T'M'$$

leszen T' a parabola csúcspontja, és az e ponton keresztül S^+L^+-vel huzott parallela ennek főtengelye. Az $M'O'$ egyenes $M'O' \perp M'S^M$ kimetszi a főtengelyen — a parabola egy elemi tulajdonságánál fogva — F-ben a gyujtópontot, és ennek a vezérsugár bármely pontjával való összeköttetése az illető érintőre merőlegesen fog állani. Nyilvánvaló, hogy az F ponton keresztül huzott egyenesek a konchoidasereg normálisai, és ezek az FT' távolság közös voltánál fogva közös szubnormálisuk van.

Mivel minden vezérsugárban a konoidfelület két alkotójának projekciója egyesül, rajta tulajdonképen két pontsor keletkezik, és a konchoidasorozat e pontokban lévő érintői két parabolát burkolnak be, a melyek közös főtengelylyel birnak.

Minden vezérsugár az alapkört két pontban metszi, e metszéspontok normálisai a főtengelyen a burkolt parabolák gyujtópontjait határozzák meg. A vezérsugár bármely pontja megállapít e

metszéspontokkal két közt; ha a változó alapkör ρ sugarát egyenlővé teszszük e közök egyikével, a konchoidasor egy oly eleme származik, a mely választott pontunkon át halad és melyre nézve



5. ábra.

a szubnormálist az illető köz végpontjának szubnormálisával megnyerjük.

Megemlitendő még, hogy a vezérsugár változtatása mellett a burkolt parabolák gyujtópontjai is változnak, és hogy ezek geometriai helye oly negyedrendű görbe, melyben a pólus és az alapkör középpontja mint kettőspontok szerepelnek. E görbe zártvonal,

ha a pólus az alapkörön belül van, ellenben két végtelen ággal bír, ha ezen kivül fekszik.

Ha a pólus az alapkör kerületén van, az általános konchoida-sorozat degenerál egy konczentrikus körsor különválása következtében, egy PASCAL féle csigasorrá; az érintőktől beburkolt parabolák gyujtópontjai — a szubnormálisok végpontjai — az adott alapkör kerületén feküsznek, mely az előbb szereplő negyedrendű görbe elfajulásának tekinthető.

Ha tekintetbe veszszük, hogy a ρ sugarú kör bármely pontjának szubnormálisa nulla, kimondható az előbbiek folyományaképen, hogy «*a konchoida szubnormálisa egyenlő az alapgörbék szubnormálisainak algebrai összegével*», a mely alakban a tétel általánosan is helyes marad, függetlenül az alapgörbék alakjától és számától, a mint azt más módszer segélyével könnyen ki lehet mutatni.*

Az 5-dik ábra érintő-szerkesztésünk alkalmazását mutatja egy PASCAL-féle csiga különböző pontjaira. A pólusból $\frac{\rho}{2}$ sugárral leirt kör az r sugarú alapkört két pontban metszi, melyeken keresztül vezérsugarak húzhatók. Görbénknek e sugarakon levő pontjai közül van két olyan is, a melyekre nézve a normálisok a szimmetrálissal parallelek; ezek a görbe τ kettősérintőjének érintési pontjai.

Szépréthy Béla.

* WIENER Darst. Geometrie, II. p 182.

PHYSIKAI SZEMLE.

A színek fotografálásáról O. Wiener. Farbenphotographie durch Körperfarben und mechanische Farbenanpassung in der Natur. *Ann. der Phys.* LV. k. 225—281. l.

1891-ben Lippmann a színek fotografálásának problemáját hatalmas lépéssel előbbre vitte. Előállította a teljes napspektrum színes fotografiáját, öntudatosan felhasználván az alló fényhullámok jelenségét.* Sikerült a színkép fotografiáját állandósítania is szemben a régebbi eljárásokkal, a melyek képei a fény behatásának csak rövid időre voltak képesek ellentállani. Wiener feladatául tűzte ki magának: a régibb eljárásokkal készült fotografia színes voltának okát kideríteni.

A régibb eljárások röviden a következők: Seebeck (1810) sötétben készített ezüstchloridport két üveglap közé foglalt. Az így készült lemez színérzékenynyé vált, miután ibolyaszínű, azután fehér fény behatása alatt a por sötét ibolya színt vett fel. Becquerel (1848) ezüstözött réz, czink vagy tiszta ezüst csiszolt lapot használt. A lemezeket mint pozitiv elektrodot higított sósavba mártotta, mi közben a lemez vékony ezüstchloridréteggel vonódott be. Ez a lemez színérzékeny. Poitevin (1865) eljárása, a mint azt Zenker és Krone tökéletesítették a következő: Papirost áztatunk 2 perczig 10%-os konyhasóoldatban, azután 1 perczig 8% salétromsavas ezüstoldatban tartjuk. A jól leöblített papirost ezután czinnchlorüroldatban (5 gr. czinnchlorür 100 cm^3 vízben) fénybehatásnak tesszük ki, míg megbarnul; ezután 1 rész telített kaliumbichromat és 2 rész telített rézgálicz oldat keverékébe mártjuk, végre itatópapir között megszárítjuk. Mindeme eljárásoknál a színek az expoziczio alatt előtűnnek úgy, hogy a fotografiát előhíni nem kell. Zenker már 1868-ban a színek keletkezését az álló fényhullámok jelenségére vezette vissza, a nélkül hogy állítását igazolhatta volna. Hogy mennyiben volt igaza, kitűnik Wiener kisérleteiből.

Mindenek előtt azt kellett eldönteni, valjon a kép színeződése fény interferenczia avagy abszorpczio útján jön-e létre mint pl. a testek színei.

---

* L. Math. Phys. Lapok. I. 28.

Ha interferenczia jelenséggel, «vékony lemezek» színeivel van dolgunk, akkor a színnek a beeső fény irányával változnia kell, ha abszorpczio-jelenség, akkor az iránytól független. Különben már eleve igen csekély a valószínűség, hogy Sezbeck s Poitevin eljárásánál interferentia jelenséggel állunk szemben: hiányzik a szabályos visszaverő felület. Becquerel eljárásánál ellenben megvan erre a lehetőség. Igaz, hogy mindeddig nem volt kimutatható, hogy Becquerel színei a fény beesési szögétől függnek. Ennek oka azonban az lehet, hogy a fényérzékeny réteg törésmutatója igen nagy, kettőnél nagyobb érték; tehát magában a rétegben a fény iránya csak keveset változik, ha a fény a levegőben különféle irányokban esik be. Azért Wiener úgy járt el, hogy vett egy nagy törésmutatójú (1,75) derékszögű egyenszárú üveghasábot, melyet átfogó lapjával a színkép fotografiájára fektetett. A hasáb éle a színkép hosszirányával párhuzamosan állott úgy, hogy a hasáb a színkép felét födte csak el, a másik fele pedig szabadon maradt. A színkép egyik felét közvetlenül levegőn át, másik felét a hasáb egyik befogó lapján át nézhette, a hasábon át 45° alatt beeső fényben. A hasáb törésmutatója nagy lévén, a lemezben a fény keveset törik s sokkal ferdébben halad át rajta, mint a levegőn át ráesett fény. Becquerel fotografiáin a színkép színei a prizmán át nézve, jól észrevehető eltolodást szenvedtek a levegőn át nézett színekhez képest, Sezbeck és Poitevin fotografiáin ellenben nem. Ezzel kimutatta, hogy Becquerel képein a színeződés fényinterferentia útján jő létre, eljárása tehát ugyanazon jelenségen alapszik mint Lippmanné; Sezbeck és Poitevin módszerében ellenben a színek abszorpczio-színek, ugyanolyan természetűek, mint egyéb testi saját színek.

A fény behatása alatt tehát a lemezben olyan változások állanak elő, melyek folytán a lemez az expoziczio után is csak olyan színű sugarakat képes visszaverni, a milyennel megvilágították, a többit pedig elnyeli. Eme változások közelebbi jellemzésére Wiener, Guntz és Carey-Lea kisérleteire támaszkodik. Guntz ugyanis kimutatta, hogy az ezüstchlorid fény behatása alatt ezüstchlorürré változik át. A Sezbeck és Poitevin-féle lemezek præparalása közben is a rétegben ezüstchlorür keletkezik. Carey-Lea pedig az előzetesen fénybehatásnak kitett ezüstchloridon a színes sugarak által előidézett különböző festőanyagokat tisztán chemiai úton sötétben is előállította. Szerinte ezek ezüstchlorid és ezüstchlorür vegyületek, melyek azonban nem fejezhetők ki meghatározott vegyarány számokkal; Carey-Lea photochloridnak nevezi. Sezbeck és Poitevin lemezein tehát megvan a lehetőség különböző színű photochlorid keletkezésére.

Miért keletkezik pl. vörös fény behatása alatt vörös photochlorid? Wiener következőképen okoskodik: a vörösszínű vegyületnek a többi felett az az előnye, hogy a vörösszínű sugarakat jobban visszaveri mint a

többi vegyület, a vörös sugarakat el nem nyeli, a vörös fény tehát nem is hozhat benne létre vegyi átalakulást, a mihez a fényelnyelés szükséges. Az összes keletkezhető vegyületek közt tehát csak a vörösszínű vegyület az, mely további vörös világításnál változatlan chemiai egyensúlyban maradhat. Az újabb chemiai elméletek alapján fel kell tennünk, hogy pl. a vörös fény behatása alatt időnkint az összes keletkeztethető vegyületek képződnek egyes molekulacsoportok között, ezek között azonban csak vörös vegyületek maradnak állandóan változatlanok, míg a többiek a vörös fényt elnyelvén újra, meg újra átalakulnak; csak a vörös vegyület van stabilis egyensúlyban. Ebből következik, hogy míg a vörös vegyület vörös fény behatása alatt változatlan marad, más színű fény alatt el kell változnia.

Tényleg Carey-Lea rózsaszínű photochloridra spektrumot vetített, a photochlorid az összes színekben átalakult, csak a vörösben nem. Wiener ugyanazt a lemezt egymásután egymást 90° alatt keresztező spektrum behatásának tette ki, miközben csak azon színek nem változtak, melyek a két spektrumban egybeestek.

Ezek alapján meg van állapítva a színek fotografálásának lehetősége a fényelnyelés alapján, az u. n. testek színei révén. Ha van olyan test, mely az összes színeket elnyeli — tehát fekete test, mely az összes színekre fényérzékeny, fénybehatása alatt képes a fehéren kívül legalább három eléggé különböző színű vegyületté átalakulni, melyek szintén fényérzékenyek, akkor könnyen beláthatólag ezen anyag a megvilágítás színét hiven visszaadja. A mennyiben a felsorolt kellékeknek csak részben felel meg, mint a Seebeck s Poitevin lemezei, a színeket is csak többé-kevésbbé tökéletesen adja vissza. *Tangl.*

*

A hidrogén folyósítása, kritikus hőmérsékletének és normális forrpontjának meghatározása. Mathias: La liquéfaction de l'hydrogène. *Rév. gén. des Sciences.* VI. évf. 617—619. l.

A mi már csak idő kérdésének látszott, t. i. a hidrogén folyósítása, az Olszewski és Natanson egyesült törekvésének végre sikerült. A krakói akadémián előterjesztett jelentésök alapján dolgozatukat Mathias ekként ismerteti:

Leirandó vizsgálataik az állandóknak nevezett gázok folyósításának problémájából indulnak ki, melyet Cailletet akkor oldott volt meg, a midőn megmutatta, hogy az erősen összenyomott gázok hirtelen tágulás révén folyósíthatók. Bizonyos nyomástól kezdve az összes száraz gázok, ha hirtelen kitágulni engedjük, ködd é alakulnak, a mi a folyósodás biztos jelének tekinthető. A hidrogén esetében ez a köd rendkivül gyenge és alig észrevehető, miért is egész különös megvilágítást kellett alkalmazni, hogy meg-

jelenéséről kétséget kizárólag meggyőződést lehessen szerezni. Wroblewski és Olszewski, eleinte együttesen, később külön-külön dolgozva, Cailletet munkáját folytatták és befejezéshez közel hozták, a mennyiben az u. n. állandó gázokat valóságos folyós halmazállapotban, vagyis szűk csövekben meniszkuszszal határolva előállították. A hidrogénnel azonban mindeddig nem birtak boldogulni. Még akkor sem, a mikor 15 mm higanyoszlop nyomása alatt —210 C-fokon forró oxigénnel hűtötték: bármekkora nyomás alatt összenyomhatatlannak mutatkozott, a miből arra lehetett következtetni, hogy kritikus hőfoka —210°-nál mélyebben fekszik. Ilyenkor azonban, hirtelen tágulaskor, apró cseppecskékben az edény falain meggyülemlett, de el is párolgott, mielőtt meniszkuszszal határolt tömegbe gyült volna össze. A feladat tehát az volt, hogy a folyósodás körülményei, vagyis a kritikus nyomás és hőmérséklet szabatosan megállapíttassanak.

Olszewski és Natanson mindenekelőtt a hidrogén kritikus nyomását törekedtek megállapítani. Olszewski kb. 20 atmoszférára becsüli. Ugyanis, ha a vacuumban forró oxigén segítségével —210°-ra lehütötte, a hidrogén tágulás közben mindenkor 20 légköri nyomás alatt forrott fel és pedig tekintet nélkül arra, hogy a kezdeti nyomás 80, 100, 120 vagy 140 atmoszféra volt. De ha a kezdeti nyomás 80 atmoszféránál kisebb volt, a forrás a kritikus hőfoknál alacsonyabb hőmérsékleten következett be, s a nyomás, a mely alatt a forrás megindult, 18, 16 ill. 14 atmoszférára szállott alá, a midőn a kezdeti nyomás 70, 60 ill. 50 atm. volt.

Ha a dolog tényleg így van, akkor a hidrogén $t_0=-210°$ kezdeti hőmérsékletről és $p_0=80$ atm. kezdeti nyomásról *adiabatikus tágulás* révén $p_1=20$ atmoszféra nyomás alatt ismeretlen t_1 kritikus hőfokára emelkedik.

Ha a hőmérsékleti fokokat ezentúl az abszolut hőmérsékleti skála hőfokaiban fejezzük ki, azaz ha $T_0=273+t_0$ és $T_1=273+t_1$ tétetik, s ha γ a hidrogén kétféle fajhevének a viszonyszáma, melynek értéke kb. 1,40, áll a következő ismeretes összefüggés:

$$\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\gamma}=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\gamma-1},$$

a honnét

$$t_1=T_1-273=-231° \text{ C.}$$

A hidrogén kritikus hőfoka ezen okoskodás szerint tehát —231° C. Ugyanez az érték még a Van der Waals-tól eredő *megfelelő állapotok törvénye* felhasználásával is kiszámítható.

A tökéletes gázok ismeretes $pv=RT$ egyenlete még

$$pv=\frac{c}{M}T$$

alakba is hozható, ha M a gáz molekulasúlyát, c pedig egy a gáz természetétől független állandót jelent; T az abszolut hőmérséklet. Ha p, v és T értékek p_c, v_c és T_c kritikus állandókkal fejeztetnek ki, akkor Van der Waals szerint áll a következő kifejezés:

$$T_c A M p_c v_c,$$

a hol A uj állandó, mely minden testre nézve ugyanaz.

Natanson, a kitől ezen elméleti okoskodások erednek, meggyőződött róla, hogy A 6 olyan testre, melynek kritikus állandói ismeretesek, kielégítő módon egyező értékű. E szerint ismeretes lévén A középértéke, nemkülömben M és p_c, a képlet megadja T_c-t, ha v_c is adva van. Ámde megjegyzendő, hogy $p(v-b)=RT$ egyenlet, mely Amagat vizsgálatai szerint a hidrogén összenyomhatását tág határok között igen jól kifejezi, a Van der Waals-féle képletnek különös esete, s hogy ennélfogva $v_c=3b$. Amagat kisérleteiből ismeretes b értéke s így kiszámítható v_c s aztán T_c. Ezen az uton Natanson T_c értéke gyanánt —232 C°-ot talál, mely az előbb adott értékkel igen szépen egyez.

Már most hátra volt ezen elméleti fejtegetések kisérleti igazolása, a mi Olszewski nek tényleg sikerült.

Meghatározandó tehát a hidrogén kritikus hőmérséklete és a légköri nyomásnak megfelelő forrpontja. E végből a hidrogént először a kritikus nyomáson, azután pedig a légköri nyomás alatt kellett forrásba hozni s mindkét esetben hirtelen, lehetőleg pontosan meghatározni a csak rövid időre állandó forrási hőmérsékleteket. A hidrogén üres térben forró oxigénnel —211°-ra lehüttetvén, a tágulása, melynek a további hőmérséklet-csökkenést kellett előidéznie, úgy szabályoztatott, hogy a forrás 20-, illetőleg 1 atmoszférával egyenlő végleges nyomás alatt menjen végbe; a forrás mindössze nehány pillanatig tartott s az alatt kellett a hidrogén hőmérsékletét lemérni. A gázhőmérő, természetesen, ki volt zárva. A thermoelektromos oszlop sem látszott ezen mély hőmérsékletek alatt megbizhatónak, a mennyiben akkor már nem elég érzékeny, s az idő nem elegendő arra, hogy a forrásztáshely a környező gáz hőmérsékletét felvegye. Az elektromos ellenállás változása azonban, különösen Cailletet és Colardeau kisérleteiben kidolgozott tökéletesítéssel, sikerrel kecsegtetett. Rendkivül vékony platina-drót szigetelő keretre volt sok menetben feltekergetve, úgy hogy az egész mintegy üres tokot alkotott, mely a hidrogént tartó edényben volt elhelyezve. A drót a Wheatstone-féle hídban volt bekapcsolva s ellenállásának változása az ismeretes módon méretett meg. Minthogy a folyósodó hidrogén a drótot minden oldalról körülvette, a hőmérsékletét azonnal át is adhatta. Egy nehézséget azonban nem szabad szem elől téveszteni: a mérendő hőmérséklet az eddig mérteknél mélyebb volt

s azért az ellenállás változásának törvényét csak *extrapolatio* utján lehetett alkalmazni. S ez mindenesetre komoly kétséget támaszthat. De ha tekintetbe vétetik, hogy az ellenállás változásának törvénye az alkalmazásba vett platina-spirálisra igen nagy közelítéssel lineáris; hogy az extrapolatióval meghatározott hőmérséklet a drót ellenállásának kikémlelésénél alkalmazott legmélyebb hőmérséklettől (—208,5° C.) nincsen nagyon távol; s hogy az extrapolatiónál a —208°-nak megfelelő együttható használtatott, a kétség nagyon könnyen eloszlatható.

Olszewski ezzel a módszerrel azt találta, hogy a hidrogén kritikus hőmérséklete —234,5°, a normális forrpont pedig —243,5° C.

A kisérleti uton talált kritikus hőfok e szerint igen szépen egyezik Natanson elméleti uton szerzett adatával; ellenben a normális forrpontok értéke között tetemes eltérés mutatkozik. *B.*

*

A folyósított levegő tudományos alkalmazásai. J. Dewar. *Chemical News* 71. 192—198. l. *Zeitschr. f. Instr.* 15. 375—377. l.

Szerző leirja ama kisérleteit, melyeknél a folyósított levegőt használta fel igen alacsony hőmérséklet előállítására. Kisérletei a fizika minden ágára kiterjedtek, melyekből a szerző legelőször is azt következteti, hogy az abszolut nullpontnál a fémek tökéletes elektromos vezetőkké válnak: a Joule-féle hő zérus, a Peltier-féle jelenség pedig megszűnik.

A folyékony levegő törésmutatója a D vonalra 1,2062.

Szerző továbbá közli tapasztalatait a folyékony gázoknak hősugárzástól való megvédésére vonatkozólag. E czélból a folyósított gázokat kettős falu edényben szokták tartani, melynek két fala között vacuumot létesítenek; az edényt pedig kivül és belül beezüstözik. Dewar a vacuumba kevés higanyt tesz. Az edénynek levegővel való megtöltésekor a nagy lehülés következtében a falakon finom higanytükör képződik. A hőveszteség ily edényben csak 4%-a annak, mely nem higanyozott edényben bekövetkezik. Ezzel kapcsolatban a szerző megmutatja, hogy higanynyal előállított vacuumban a higanygőzök rögtön lecsapódnak, ha az edényt folyós levegővel itatott szivacscsal érintjük. Az érintés helyén az egész fém összegyül, a mi onnan látszik, hogy a kisérletet ismételve uj higanytükör nem keletkezik. Más alakban is sikerül a kisérlet: Erősen kiszivattyúzott foszforeszkáló csövet kapcsolt párhuzamosan egy szikraközhöz, melynek ellenállása valamivel nagyobb mint a csőé, úgy hogy a kisülés a csövön át történik; a mint a szivacs a csövet érinti, a kisülés a szikraközön át megy végbe.

A folyós levegő feletti csendes légkör kiválóan alkalmas törékeny tárgyak lehütésére. Igy pl. szappanbuborékokat és hártyákat igen könnyen lehet benne megfagyasztani.

A szerző ezután leir egy készüléket mely arra szolgál, hogy vele a folyós levegő elpárolgását megakadályozza. Két, folyós levegővel telt edényt egymásba tesz. A külsőben szabadon párologtatja a folyós levegőt, miáltal a belsőben a párolgás el van hárítva. Ugyanezen eszköz szilárd levegő előállítására is szolgál. E czélból a külső edényt erősen kiszivattyúzza, azután a belső teret kissé ritkítva, a benne lévő folyékony levegő megfagy.

Megvizsgálta továbbá a molekuláris erők változását, miközben valamely testet nagyon alacsony hőmérsékletre hozunk. Különböző anyagú drótokat folyékony levegővel egészen körül vett s tapasztalta, hogy azok szilárdsága czink, aluminium és antimon kivételével tetemesen megnövekedik; a vasé például kétszer akkora, a Wood-féle fémé majdnem négyszer akkora lesz.

A következő két táblázat mutatja a különböző hőmérsékleteknek megfelelő abszolut erősségeket, kilogrammokban kifejezve.

2,49 mm. átmérő esetében:

	+15 C°	—182 C°
Lágy aczél	191	318
Vas	145	304
Réz	91	136
Sárgaréz	141	200
Ujezüst	213	272
Arany	116	154
Ezüst	150	191

5,1 mm. átmérő esetében:

Czinn	91	177
Ólom	35	77
Czink	16	12
Higany	0	14
Bizmut	27	14
Antimon	28	14
Wood-féle fém	64	204

Igen feltünöen mutatkozik a mágnesi állapot változása, a mennyiben az aczélmágnes nyomatéka, ha —182 C°-ra lehüttetik, az eredeti érték 30—50%-ával emelkedik. A felmelegedés az eredeti állapotot állítja vissza.

Tangl.

IRODALOM.

F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. *Bearbeitet v.* F. Tägert. *Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts.* Leipzig. B. G. Teubner. 1895. 8°, V+66. l. Ára 2 márka.

Kevés mathematikus fáradozik hasonló buzgalommal azon, hogy tudománya jelenlegi mozgalmai és törekvései iránt minél szélesebb körben mentől intenzivebb érdeklődést keltsen, mint a híres göttingai tanár, a kinek előadásai után e füzet készült. A modern mathematikai vizsgálatok legnehezebb részeiről tartott egyetemi felolvasásait már évek óta autografált füzetekben teszi közzé, hogy hatásuk ne szorítkozzék hallgatóinak szűk körére.[1] Midőn a chicagói kiállítás alkalmából Amerikába utazott, nem mulasztotta el colloquiumain az új világot megismertetni azzal, hogy mivel és mily sikerrel foglalkoznak az ó világ mathematikusai.[2] Az idén pedig a Göttingában egybegyűlt tanférfiak előtt nemcsak figyelemre méltó beszédjében[3] fejtette ki, hogy az egyetem, a szorosabb értelemben vett

---

[1] A füzetek Klein, volt asszisztensénél, dr. Schilling úrnál rendelhetők meg, ki jelenleg az aacheni műegyetemen az ábrázoló geometria tanára. Eddig a következők jelentek meg:

Nicht Euklidische Geometrie. (1889—90.)

Lineare Differentialgleichungen. (1890—91.)

Riemann'sche Flächen. (1891—92.)

Höhere Geometrie. (1892—93.)

Die hypergeometrische Function. (1893—94 telén.)

Lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. (1894 nyarán.)

Tartalmukat maga Klein a *Math. Annalen* 45. és 46. kötetében ismertette.

[2] *The Evanston colloquium.* Lectures on mathematics, delivered from aug. 28 to sept. 9, 1893 at Northwestern University Evanston. Ill. by F. Klein, reported by *A. Ziwet.* New-York 1894. Macmillan 8°, 109. l.

[3] Megjelent a Hoffmann-féle Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht 26. kötetében, 382—88. l.

szaktudósnak e nevelő-iskolája, a leendő középiskolai tanárok igényeit sem téveszti szem elől: hanem a jelen voltakat az itt ismertetendő füzettel is iparkodott arról meggyőzni, hogy a tudomány sokszor oly messzefekvőeknek és szertelenül elvontaknak látszó fogalmai mily szoros kapcsolatban vannak a középiskolai tananyaggal.

Az elemi geometriának csupa közvetetlenül kinálkozó s azért már az ó-korban általános érdeklődést keltett kérdéseiről van itt szó, melyekre a feleletet azonban csak a legújabb korban adta meg az algebra és analizis. Különösen három probléma lép előtérbe: 1. a delosi probléma, a mely a koczka megkettőzését követeli, 2. a szögnek három egyenlő részre való felosztása, 3. a kör quadraturája vagyis a π szám megszerkesztése. Körzővel és vonalzóval mind a három megoldhatatlan, s ennek kimutatása e művecske főtárgya. De az első két probléma megoldhatóvá válik, mihelyt oly algebrai görbéket tudunk rajzolni, a melyeknek egyenleteiben az együtthatók egész számok vagy legalább rajzban adott távolságoknak egész függvényei. Ellenben a kör quadraturája még így sem sikerülhet, hanem csak transzczendens görbék segítségével. Innen van, hogy ezen előadásokban is két rész van megkülömböztetve: egy az algebrai mennyiségek szerkeszthetőségéről s egy másik a transzczendens számokról és a kör quadraturájáról szól.

Az első rész annak bebizonyításával kezdődik, hogy valamely vonaldarab csak akkor lehet körzővel és vonalzóval megszerkeszthető, ha mérő száma oly irreduktibilis algebrai egyenletnek tesz eleget, a melynek foka a 2 valamely hatványa. Az irreduktibilitás úgy értendő, hogy az illető egyenlet nem bontható fel oly tényezőkre, a melyeknek együtthatói az adottaknak tekintett vonaldarabok (ráczionális numerikus együtthatókkal biró) ráczionális függvényei. Hogy a delosi probléma és a szög hárommáosztása körzővel és vonalzóval lehetetlen, az most már onnan következik, hogy irreduktibilis harmadfokú egyenletek gyökeinek szerkesztését követelik. Ellenben az előbbi probléma egy cissoisnak, az utóbbi egy konchoisnak segítségével könnyen megoldható. Mindkét szerkesztés le van írva, de az utóbbinak helyessége nincsen bebizonyítva. Ugyanez a rész a körosztás elméletének első elemeit is tartalmazza, köztük a szabályos 17-szög Staudt-féle szerkesztését.

A második rész első fejezete a transzczendes számok létezésének Cantor-tól eredő bebizonyításnak rendkívül egyszerű és világos előadását tartalmazza. Ezt a körmérés elméletének igen rövid története követi, a mely csak a főmomentumokra szorítkozik, de ezeket élesen jellemzi. Végre e részt az e transzczendens voltának, valamint a kitevős függvény arithmetikai természetére vonatkozólag Lindemann-tól talált tételeknek bebizonyítása zárja be. E bebizonyítás Gordan nyomán halad. Gordan ugyan e mellett csak a π számra szorítkozik, de bebizonyításainak általánosítása csak egy

kivételes esetben okoz nehézséget. E kivételes eset (midőn t. i. az 54. lap első egyenletében $C_0=0$) e füzetben agyon van hallgatva. Ezáltal e rész ugyan látszólag nagyon nyert egyszerűségben, de elvesztette szigorúságát.

A π-re vonatkozólag nyert eredményből persze csak az következik, hogy ez a szám nem szerkeszthető algebrai görbék segítségével. Transzczendens görbével ez a feladat sem lehetetlen. A könyv függeléke az integráfról szól és egy vele rajzolható görbéről, a melynek segítségével π nyerhető.

A mű igénytelen, könnyed modorban van írva. A szigorúságot csak a LINDEMANN-féle tételeknél találtam az egyszerűségnek feláldozva, de annál többször vannak fárasztóbb részletek irodalmi utalásokkal elkerülve. A művecske főczélja így könnyebben volt elérhető; avval, hogy a problémákba csak betekintést nyujt, sokkal inkább kelt irántuk s az egész modern mathematika iránt érdeklődést, mintha a könnyedséget a teljességnek kedvéért feláldozta volna. Jelen alakjukban ezen előadások nem csak maguk nyujtanak kellemes, mondhatnám szórakoztató olvasmányt, hanem bizonyára nem egy olvasót a bennük említett művek olvasására is fogják serkenteni. Megértésükhöz csupán a kongruenczák, az egyenletek és az elemi függvények elméleteinek kezdetei kellenek.

Kürschák József.

MEGOLDOTT FELADATOK.

23. *Az ABCD egyszerű négyszög AC és BD átlói álljanak egymásra merőlegesen és messék át egymást O-ban. Jelentsék továbbá P_1, P_2, P_3, P_4 rendre az AB, BC, CD, DA oldalak metszéspontjait az O-ból a CD, DA, AB, BC oldalakra bocsátott merőlegesekkel. Bebizonyítandó, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög derékszögű.* (Kürschák.)

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól, Brassón.

Fentebbi tétel helyessége be lesz bizonyítva, ha ki tudjuk mutatni, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög oldalai páronkint az adott $ABCD$ négyszög átlóival párhuzamosak.

Ha

$$AB\equiv g, \quad AD\equiv d_2, \quad AC\equiv x,$$
$$CB\equiv h, \quad CD\equiv d_1, \quad BD\equiv y,$$

ha továbbá M az ABC háromszög magassági pontja és

$$AM\equiv m_2 \quad CM\equiv m;$$

ha végre g, h, y egyenesek végtelenben fekvő pontjai rendre G_∞, H_∞, Y_∞ és

$$AY_\infty\equiv y_2 \quad CY_\infty\equiv y;$$

akkor a D, Y_∞, M és O pontokból álló pontcsoportot C-ből és A-ból projicziálván, C és A-ban négy megfelelő sugárpárt nyerünk, a melyek a

$$(C\cdot DY_\infty MO) = (A\cdot DY_\infty MO)$$

vagy

$$(d_1y_1m_1x_1) = (d_2y_2m_2x)$$

egyenletnél fogva két projektív sugársor megfelelő sugárpárjainak tekinthetők.

---

* $(AC, BD)\equiv 0$.

Eme sugarakra O-ból bocsátott merőlegesek

$$d_1^+ \perp d_1, \quad d_2^+ \perp d_2, \quad m_1^+ \perp m_1, \quad m_2^+ \perp m_2$$

újra négy sugárpárt adnak, a melyek

$$(d_1^+ x m_1^+ y) = (d_2^+ x m_2^+ y)$$

egyenleteknél fogva ugyancsak két projektív sugársor megfelelő sugárpárjainak tekinthetők.

Az e sugárcsoportokból g illetőleg h egyenesektől kimetszett pontcsoportok

$$(g \cdot d_1^+ x m_1^+ y) = (h \cdot d_2^+ x m_2^+ y)$$

vagy

$$(P_1 A G_\infty B) = (P_2 C H_\infty B)$$

a g és h pontsorsorozókon fekvő projektív pontsorok megfelelő pontpárjaiból állnak.

Mivel e pontsorsorozók közös pontjában - B-ben — egy megfelelő pontpár egyesült, a végtelenben fekvő G_∞ és H_∞ pontok pedig egymásnak megfelelnek, a sorok perspektív fekvésűek, egy a végtelenben fekvő pontra, mint perspektív czentrumra nézve. E perspektív czentrumon keresztül haladnak a P_1, P_2 és A, C megfelelő pontpárokat összekötő egyenesek is, a mi más szóval annyit jelent, hogy $P_1P_2 \parallel AC$-vel. AB és D pontoknak egymással való felcserélése után ugyanazon levezetés a P_2P_4 és AC egyenesek párhuzamosságát is mutatja.

*

Második megoldás Csillay Vilmos műegyetemi tanársegéd úrtól.

Alapföltevés, hogy

$$AC \perp BD;$$

a tétel be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy

$$P_1P_2 \parallel AC \parallel P_3P_4$$

és

$$P_2P_3 \parallel BD \parallel P_4P_1.$$

A feladatban leírt módon szerkeszszük meg a $P_1P_2P_3P_4$ négyszöget. (L. az ábrát.) Azután O-ból vetítsük át a P_i pontok mindegyikét az $ABCD$ négyszög azon oldalaira, a melyek a P_i-t tartalmazó oldallal szomszédosak; azaz legyen

$$(OP_1, DA)=E_1 \quad (OP_2, CD)=E_2 \quad (OP_3, BC)=E_3 \quad (OP_4, AB)=E_4$$
$$(OP_1, BC)=F_1 \quad (OP_2, AB)=F_2 \quad (OP_3, DA)=F_3 \quad (OP_4, CD)=F_4.$$

Mindenekelőtt kiemeljük, hogy az

$$(E_1E_2D) \quad \text{és} \quad (E_3E_4B),$$

valamint az

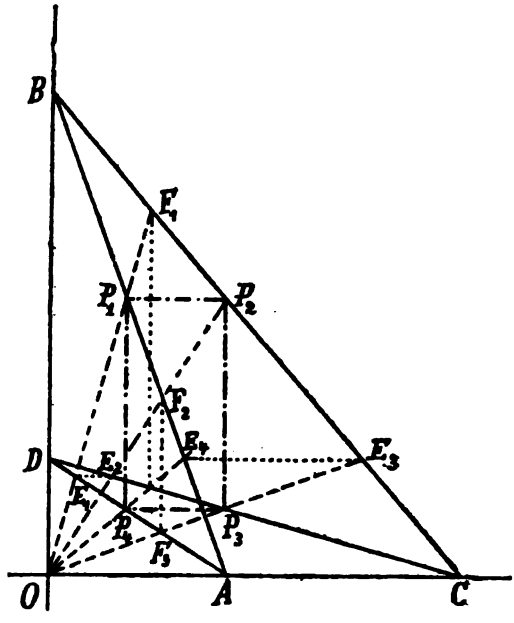
$$(F_2F_3A) \quad \text{és} \quad (F_4F_1C)$$

háromszögeknek is O a magasságpontja. Ennek következtében

$$E_1E_2 \perp OD, \quad E_3E_4 \perp OB,$$

valamint

$$F_2F_3 \perp OA, \quad F_4F_1 \perp OC;$$



vagy, miután alapföltételünk az, hogy

$$BD \perp AC,$$

írhatjuk:

$$E_1E_2 \parallel AC \parallel E_3E_4$$

és (I)

$$F_2F_3 \parallel BD \parallel F_4F_1.$$

Továbbá látni, hogy O-centrumra nézve, egyrészről

P_1P_1B háromszög perspektív helyzetű az E_1E_2D háromszöggel

és

P_3P_4D « « « « E_3E_4B «

az AC közös tengelyre vonatkozólag; másrészről

P_2P_3C háromszög perspektív helyzetű F_2F_3A háromszöggel

és

P_4P_1A « « « F_4F_1C «

a BD közös tengelyre vonatkozólag.

De ezekből következik, hogy először

P_1P_2 az E_1E_2-vel

és

P_3P_4 az E_3E_4-gyel

AC-n találkozik; ámde (I) szerint

$$E_1E_2 \parallel AC \parallel E_3E_4,$$

tehát egyszersmind

$$P_1P_2 \parallel AC \parallel P_3P_4.$$

Épenúgy másodszor

P_2P_3 az F_2F_3-mal

és

P_4P_1 az F_4F_1-gyel

BD-n találkozik; ámde ismét (I)-ből

$$F_2F_3 \parallel BD \parallel F_4F_1$$

lévén. egyúttal

$$P_2P_3 \parallel BD \parallel P_4P_1.$$

*

Harmadik megoldás Doroghy Ignácz főreáliskolai tanár úrtól, Temesvárott.

Vegyük az egymásra merőleges átlókat koordinata-tengelyekül, úgy, hogy AC az abcissa-tengely, BD pedig az ordináta-tengely legyen; legyenek továbbá az átlók szeletei $OC=a_1$, $OA=a_2$, $OD=b_1$, $OB=b_2$, akkor a CD, DA, AB és BC négyszög-oldalok egyenletei rendre lesznek:

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1$$
$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_1}=1$$
$$\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}=1$$
$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_2}=1;$$

az OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 merőlegesek egyenletei pedig:

$$\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_1}=0;$$
$$\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_2}=0;$$
$$\frac{x}{b_2}-\frac{y}{a_2}=0;$$
$$\frac{x}{b_2}-\frac{y}{a_1}=0.$$

Minthogy a P_1P_2 egyenes átmegy AB és OP_1, továbbá BC és OP_2 metszéspontjain, ennélfogva egyenlete a következő:

$$\left(\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}-1\right)\begin{vmatrix} -\frac{1}{b_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_1} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_2} & -\frac{1}{a_2} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} -$$
$$-\left(\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_1}\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_1} & \frac{1}{a_2} \\ \frac{1}{b_2} & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{b_2} \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

ebből kifejtés és $\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$ kifejezéssel való rövidítés után lesz:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)y-\frac{1}{b_1}=0 \qquad (1)$$

ez az egyenes parallel az x-tengelylyel.

P_2P_3 egyenes átmegy BC és OP_2, továbbá CD és OP_3 egyenesek metszéspontjain, tehát az ő egyenlete:

$$\left(\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_2}-1\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{b_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_2} \\ -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{b_1} & -\frac{1}{a_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} -$$
$$-\left(\frac{x}{b_1}-\frac{y}{a_2}\right)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{b_1} & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{b_2} \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

a miből kellő rövidítés után lesz:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)x-\frac{1}{a_2}=0 \qquad (2)$$

ez az egyenes párhuzamos az y-tengelylyel, tehát merőleges a P_1P_2 egyenesre.

P_2P_4 és P_4P_1 egyenesek egyenletei:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)y-\frac{1}{b_2}=0; \quad \left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}\right)x-\frac{1}{a_1}=0$$

tehát az $P_1P_2P_3P_4$ négyszögnek két oldala AC átlóval és a másik két oldala BD átlóval parallel.

*

Negyedik megoldás Freikind Ignácz műegyetemi hallgató úrtól Budapesten.

Az ábrát megtekintve rögtön látjuk, hogy a tétel bebizonyítására elég kimutatni azt, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög bármelyik oldala az AC és BD átlók egyikével párhuzamos. Vegyük például a P_2P_3 oldalt; erről be fogjuk bizonyítani, hogy párhuzamos BD-vel. Legyen

$$BAC\sphericalangle=\alpha; \quad CAD\sphericalangle=\beta;$$
$$BDC\sphericalangle=\gamma; \quad CBD\sphericalangle=\delta;$$

akkor, minthogy $OP_2 \perp AD$ és $OP_3 \perp AB$,

$$P_2OD\sphericalangle=\alpha, \quad P_3OB\sphericalangle=\beta.$$

Alkalmazzuk a BOP_2 és DOP_3 háromszögekre a sinus-tételt:

$$\frac{BO}{BP_2}=\frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}$$
$$\frac{DO}{DP_3}=\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha};$$

továbbá

$$\sin\alpha=\frac{BO}{AB}; \quad \cos\alpha=\frac{AO}{AB}$$
$$\sin\beta=\frac{DO}{AD}; \quad \cos\beta=\frac{AO}{AD}$$
$$\sin\gamma=\frac{CO}{CD}; \quad \cos\gamma=\frac{DO}{CD}$$

$$\sin\delta = \frac{CO}{BC}; \quad \cos\delta = \frac{BO}{BC};$$

ha ezeket az értékeket behelyettesítjük lesz

$$\frac{BO}{BP_2} = \frac{BO.DO + AO.CO}{BC.DO}$$
$$\frac{DO}{DP_2} = \frac{BO.DO + AO.CO}{BO.CD}.$$

E két egyenletet egymással elosztván, lesz:

$$\frac{DP_2}{CD} = \frac{BP_2}{BC},$$

a mi analitikai kifejezése annak, hogy a P_2P_3 párhuzamos BD-vel.

*

Ötödik megoldás dr. Lóky Béla kegyesrendi tanár úrtól Kolozsvárott.

Válaszszuk a feladatban szereplő OA és OB egyeneseket x illetőleg y tengelyül, akkor csak azt kell kimutatnunk, hogy P_1 és P_4-nek ugyanaz az x-sze, P_2 és P_3-nak szintén egyez az x-sze és P_1, P_2-nek ugyanaz az y-ja, P_3, P_4-nek szintén egyez az y-ja. Ha a szögpontok koordinátáinak a következő jelelésével élünk

$$A(x_1|0), \quad B(0|y_2), \quad C(-x_3|0), \quad D(0|-y_4),$$

akkor

AB egyenlete: $y_2x + x_1y = x_1y_2$
BC « $-y_2x + x_3y = x_3y_2$
CD « $y_4x + x_3y = -x_3y_4$
DA « $y_4x - x_1y = x_1y_4$.

A P_1, P_2, P_3, P_4 pontok, mint a kezdőponton átmenő s az oldalokra merőleges egyeneseknek azon oldalakkal való metszéspontjai adódnak ki, a melyek az egyszerű négyszögben velük szemben vannak. Pl. P_1 a CD oldalra merőleges és a kezdőponton átmenő egyenesnek az AB oldallal való metszéspontja. A CD oldalra merőleges, és a kezdőponton átmenő egyenes egyenletét

$$a_1x + a_2y = 0$$
$$y_4x + x_3y = -x_3y_4$$

ből az a-kra szabott

$$a_1y_4 + a_2x_3 = 0$$

egyenlőség révén

$$-x_3x+y_4y=0$$

adja.

Így P_1 koordinátái a

$$\begin{aligned} -x_3x+y_4y&=0\\ y_2x+x_1y&=x_1y_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai, P_2-nek az

$$\begin{aligned} x_1x+y_4y&=0\\ -y_1x+x_3y&=x_3y_2, \end{aligned}$$

P_3-nak az

$$\begin{aligned} x_1x+y_4y&=0\\ -y_2x+x_3y&=x_3y_2, \end{aligned}$$

P_4-nek az

$$\begin{aligned} x_3x+y_2y&=0\\ y_4x-x_1y&=x_1y_4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai a koordinátái. Ez egyenletek puszta megtekintése már tanuskodik a kimutatandónak jelzett igazság mellett.

*

Hatodik megoldás dr. Klug Lipót egyetemi magántanár úr részéről.

Az ADC háromszögnek magasságpontja E, a BD egyenesen fekszik, mert $BD \perp AC$. Ebből következik, hogy az AEC, P_1OP_3 háromszögek perspektivek a B projicziáló pontra vonatkozólag, mert a BAP_1, BEO, BCP_3 egyenesek egymást a B pontban metszik; de minthogy

$$AE \parallel P_1O, \quad CE \parallel P_3O,$$

azért

$$AC \parallel P_1P_3,$$

vagyis

$$P_1P_3 \perp BD.$$

Hasonló úton kimutatható, hogy $P_3P_4 \perp BD$, $P_2P_3 \perp AC$, $P_1P_4 \perp AC$ s mert a föltétel szerint $AC \perp BD$, azért $P_1P_2P_3P_4$ négyszög, derékszögű.

*

Hetedik megoldás Breuer Mór tanárjelölt úr részéről.

Ha az ABD háromszögnek B és D szögpontjaiból kiinduló magasságait meghuzzuk, akkor ezek e háromszög harmadik magassági vonalával az AC-vel egyazon M pontban találkoznak. De minthogy

$$OP_2 \parallel MB, \quad OP_3 \parallel MD,$$

azért

$$CP_2 : BC = CO : CM = CP_3 : CD,$$

vagy

$$CP_2 : CP_3 = BC : CD,$$

és így

$$P_2P_3 \parallel BD.$$

Ugyanezen a módon kimutatható, hogy $P_3P_4 \parallel AC$, $P_4P_1 \parallel BD$, $P_1P_2 \parallel AC$.

*

Nyolczadik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

A feladatban használt jelöléseket megtartva, legyenek még:

E az OP_3 merőlegesnek talppontja az $\overline{AB}$ oldalon,
F « OP_4 « « « $\overline{BC}$ «
G « OP_1 « « « $\overline{CD}$ «
H « OP_2 « « « $\overline{DA}$ «

Az EP_1GP_3 pontok egy ugyanazon kör kerületén vannak, mert P_1P_3 közös átfogó a P_1EP_3 és P_1GP_3 derékszögű háromszögekben.

Az FP_2HP_4 pontok pedig a $\overline{P_2P_4}$ átfogó fölött írható kör kerületén fekűsznek.

Mindenekelőtt kimutatom, hogy e két kör azonos, tehát $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_4}$. Az $EFGH$ négyszög körbeírt négyszög, mert benne a szemben fekvő szögek összege egyenlő π-vel. Ha

$$CAD\sphericalangle = \varphi,$$

akkor

$$HEP_3 = \varphi, \quad EHP_3 = A - \varphi,$$

mint az AO átmérő fölött szerkeszthető körnek egyenlő ivein nyugvó kerületi szögei; továbbá

$$GHP_3 = D + \varphi - \frac{\pi}{2}, \quad HGP_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

mint az $\overline{OD}$ átmérő fölött írható körben egyenlő íveken álló kerület szögek.

$$FGP_1 = C + D + \varphi - \pi, \quad GFP_4 = \pi - (D + \varphi)$$

mint a CO átmérőjű kör egyenlő ivein álló kerületi szögek.

$$EFP_4 = \frac{\pi}{2} - (A - \varphi), \quad FEP_3 = B + (A - \varphi) - \frac{\pi}{2}$$

mint a $\overline{BO}$ átmérőjű kör egyenlő ivein álló kerületi szögek.

Ezek alapján:

$$E+G=HEP_3+FEP_3+FGP_1+HGP_1=\pi=F+H.$$

De az F pont az EP_1GP_3 kör kerületén van, mert FGP_3E szintén körbeírt négyszög, azaz:

$$F+GP_3E=\pi$$

mert

$$F=GFP_4+P_4FE=\pi-(D+\varphi)+R-(A-\varphi)=\frac{3\pi}{2}-(A+D)$$

$$GP_3E=\frac{3\pi}{2}-(B+C);$$

tehát a H pont szintén az EP_1GP_3 körön van, s így EP_1GP_3 kör azonos $EFGH$ körrel, melynek egyik átmérője $\overline{P_1P_3}$.

Minthogy az $EFGH$ pontok egy ugyanazon körön feküsznek, egészen úgy mutatható ki, hogy E és G pontok rajta vannak az FP_2HP_4 körön, vagyis hogy e két kör azonos, melynek egy átmérője $\overline{P_2P_4}$.

Mindezekből következik, hogy:

$$EP_1GP_3\equiv FP_2HP_4,\quad \overline{P_1P_3}=P_2P_4,$$

melyek a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög átlói; de oly négyszög, melynek átlói egyenlők, vagy derékszögű parallelogramma, vagy egyenlő szárú trapéz. A kérdéses négyszög azonban csak az előbbi lehet, mert átlói egyszersmind a körülírt kör átmérői.

Meg kell még mutatnunk, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ parallelogramma oldalai páranként párhuzamosak az $ABCD$ négyszög átlóival.

$P_3P_4D=HEP_3=\varphi$, mint a hat ponton átmenő körnek $\overline{HP_3}$ húrján álló kerületi szögei. De a $P_3P_4D=\varphi$ egyenletből következik, hogy P_3P_4 parallel az AC átlóval s így P_1P_2 is.

De a parallelogramma derékszögű s így:

$$P_1P_4 \parallel BD \parallel P_2P_3$$

A speciális négyszögei közt a deltoid, rhombos és a négyzet azok, melyeknek átlói egymásra merőlegesek. Az elsőnek egyik átlóját felezi a másik, a második és harmadiknál O egyszersmind az átlók felező pontja. Az idomban keletkezett hasonló háromszögekből következik, hogy a felező átlók átmegy $P_1P_2P_3P_4$ parallelogramma, tehát a körülírt kör középpontján is s így ez az utóbbiaknál az átlók felező pontja. A két utolsó négyszög parallelogramma lévén, a $P_1P_2P_3P_4$ összeesik $EFGH$-val, tehát a kör ez esetben az oldalakat érinti.

Kilenczedik megoldás Maksay Zsigmond főreáliskolai tanár úrtól Pécsett.

Legyenek a BD és AC átlók egy derékszögű rendszer tengelyei; továbbá A, B, C, D koordinátai rendre

$$A(0, b_1),\quad B(-a_1, 0),\quad C(0, -b_2),\quad D(a_2, 0)$$

és

$$\begin{aligned} a &\equiv AB \equiv b_1x - a_1y + a_1b_1 = 0, & m_c &\equiv a_2x + b_2y = 0\\ b &\equiv BC \equiv b_2x + a_1y + a_1b_2 = 0, & m_d &\equiv a_2x - b_1y = 0\\ c &\equiv CD \equiv b_2x - a_2y - a_2b_2 = 0, & m_a &\equiv a_1x + b_1y = 0\\ d &\equiv DA \equiv b_1x + a_2y - a_2b_1 = 0, & m_b &\equiv a_1x - b_2y = 0. \end{aligned}$$

Ha

$$\frac{a_1a_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = m,\qquad \frac{b_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = n,$$

akkor

$$m + n = 1,$$

és a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok koordinátái rendre:

$$\begin{aligned} P_1(-a_1n,\ \ b_1m), \qquad & P_2(-a_1n,\ -b_2m)\\ P_3(\ \ a_2n,\ -b_2m), \qquad & P_4(\ \ a_2n,\ \ b_1m), \end{aligned}$$

a honnan azonnal látható, hogy P_1 és P_2, valamint P_3, P_4 az

$$\begin{aligned} x + a_1n &= 0\\ x - a_2n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletekkel biró és így az AC átlóval párhuzamos egyeneseken feküsznek továbbá, hogy P_1 és P_4 valamint P_2 és P_3 resp. az

$$\begin{aligned} y - b_1m &= 0\\ y + b_2m &= 0 \end{aligned}$$

egyeneseken feküsznek, a melyek a BD átlóval parallelek, tehát hogy a $P_1P_2P_3P_4$ idom derékszögű parallegramma.

---

24. *Ha a tetraéder szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, bebizonyítandó, hogy akkor az élek középpontjai és a szemben fekvő élek legkisebb távolságú pontjai oly gömbön feküsznek, melynek középpontja a tetraéder súlypontjában van.* (Vályi.)

Első megoldás Szépréthy Béla főreáliskolai tanár úrtól Brassón.

Ha az adott tetraéder csúcspontjait A_i-vel (i=1, 2, 3, 4), lapjait a_i-vel (i=1, 2, 3, 4), éleit pedig a_{ik}-val (i, k=1, 2, 3, 4) jelöljük, akkor a szemben fekvő élek merőlegességének

$$a_{ik} \perp a_{lm}$$

tekintetbe vételével minden a_{lm} élen keresztül a szemben fekvő a_{ik} élre merőleges síkot fektethetünk; legyen ennek metszéspontja az a_{ik} éllel M_{ik}. Igy a tetraéder élein három pontpárt nyerünk és ezek a szemben fekvő élek legrövidebb távolságainak végpontjai. Mivel az említett merőleges síkok a tetraéder lapjaival, a határoló háromszögek magasságaiban találkoznak, a legrövidebb távolságok végpontjai egyszersmind az oldallapokon húzható magassági vonalak talppontjai lesznek, és az oldalélek felezési pontjaival egyetemben egy-egy FEUERBACH-kör kerületén feküsznek.

Ha bármely a_i oldallap magassági pontját M_i-vel, súlypontját S_i-vel, FEUERBACH-körének középpontját O_i-val jelöljük, és a szemben fekvő A_i tetraéder-csúcsot M_i és S_i-vel, az O_i-t pedig a tetraéder S súlypontjával kötjük össze, akkor egyrészt M_i, O_i és S_i pontok egy egyenesen az EULER-féle egyenesen feküsznek, másrészt az

$$\overline{O_iM_i} = 3 \,.\, \overline{O_iS_i}, \qquad \overline{SA_i} = 3 \,.\, \overline{SS_i}$$

relációk figyelembe vételével az $S_iA_iM_i$ és S_iSO_i hasonló és hasonló fekvésű háromszögek, melyekből

$$A_iM_i \parallel SO_i$$

és ennek alapján

$$SO_i \perp a_i.$$

«Az oldallap Feuerbach-körének tengelye magán tartalmazza a tetraéder súlypontját is».

Mivel valamely kör tengelye a körön át haladó gömbök középpontjainak geometriai helye, mivel továbbá a tetraéder oldallapjain fekvő Feuerbach-köröknek páronkint egy-egy közös pontpárjuk van, nyilvánvaló hogy ezek oly gömblapon feküsznek, a mely a tetraéder éleivel a feladatban megjelölt pontokban találkozik, és a melynek középpontja a súlypontban van.

Az elmondottak alapján tetraéderünk ama tulajdonságára juthatunk, hogy a magassági pontnak, a körülírt gömb középpontjával való összeköttetését a súlypont felezi.

*

Második megoldás Doroghi Ignácz főreáliskolai tanár· úrtól Temesvárott.

Legyen $ABCD$ a tetraéder, melynek oldallapjait római számokkal jelöljük, úgy hogy $ABC \equiv$ IV, $ABD \equiv$ III, $ACD \equiv$ II és $BCD \equiv$ I.

A feltétel szerint az átellenes élek egymásra merőlegesek; ebből következik, hogy az AD élnek IV. lapon való vetülete $AA' \perp BC$, hasonlóképen BD élnek vetülete $BB' \perp AC$ és CD-nek vetülete $CC' \perp AB$, s így az $ABC\Delta$-nek magassági pontja M_4 a tetraéder D csúcsának projekciója.

Ha most a IV. lapnak Feuerbach-körét megszerkesztjük, akkor az ismeretesen átmegy az $ABC\Delta$ oldalainak felező pontjain és a magassági vonalaknak A', B', C' talppontjain. E körnek középpontja K_4, ha S a háromszög súlypontja, ez az S_4M_4 vonalon van, még pedig — a mint a Feuerbach tételéből következik — S_4-től számítva az S_4M_4 vonaldarab negyed részében.

Ha a K_4 pontban a IV. lapra merőlegest emelünk, akkor ez geometriai helye mindazon gömb-középpontoknak, a mely gömbök ugyanazon a hat ponton mennek át, mint az imént említett Feuerbach-kör.

Egyúttal könnyű belátni, hogy S_4M_4 a tetraéder S_4D súlyvonalának, és K_4 középpont a tetraéder S súlypontjának IV. lapon való vetülete.

E megjegyzések érvényesek a többi három lapra is, ha ezeknek Feuerbach-köreit megszerkesztjük; tehát e lapok K pontjaiban emelt merőlegesek szintén 6—6 ponton átmenő gömbök középpontjainak geometriai helyeit adják. Mivel pedig a kérdéses tetraédernél a négy magasság egy pontban találkozik, azért az oldallapoknak SM egyenesei nem egyebek, mint a tetraéder magassági pontját és súlypontját összekötő egyeneseknek projekcziói.

Ebből következik, hogy az oldallapok Feuerbach-köreinek középpontjaiban az illető lapokra emelt merőlegeseknek egy ugyanazon pontban kell találkozniok: ez nem lehet más, mint a tetraéder súlypontja. Ez tehát középpontja lesz egyszersmind ama gömbnek, a mely az élek felező pontjain és az egyes oldalháromszögek magassági vonalainak talppontjain átmegy.

Közvetetlenül világos, hogy a tetraéderlapok magasságvonalainak talppontjai, megadják az éleken ama pontokat, a melyekben két-két élt azoknak merőleges transversalisa átmetsz és így ezek egyszersmind a legrövidebb távolságokat állapítják meg.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Világító testek sötét képei. Thomas Escriche barcelonai tanár a következő kisérletet írja le: Tiszta üveglapra kis tuss vagy tintacseppet ejtünk, hogy körülbelül 1—2 mm. átmérőjü foltocska keletkezzen rajta. Ha ezt az üveglapot gyertya vagy lámpa lángja és egy fehér ernyő közé tartjuk, a megvilágított ernyőn a lángnak sötét képe jelenik meg. A kisérlet nyilván a *camera obscura* kisérletének megfordítása s az egyenes vonalu terjedésből könnyen magyarázható. A két kisérlet különben egyidejüleg is megejthető, a következő módon: Az üveglap egyik felét szük nyilással átfurt stanniol lappal borítsuk, a másik felén pedig a foltocskát idézzük elő; akkor az ernyő sötétebb részén a láng világos fordított képe, a világos részen pedig sötét képe tünik fel. Több szabályosan elosztott nyilás és foltocska többszörös képeket adnak. A kisérlet különösen ez alakban csinos és tanulságos. *B.*

*

Elektromos védőernyő átlátszó vezető anyagból. Ismeretes, hogy az elektrosztatikai mérő készülékeket vezető védőernyővel kell körülvennünk, hogy megbízható adatokat szolgáltassanak. Elektromágneses áram vagy feszültségmérőknél, manometereknél t. i. a fedő üveglapnak a mutatóra gyakorolt elektromos vonzása meghamisíthatja a leolvasást. A fémernyőknek megvan az a hátránya, hogy átlátszatlanok.

Átlátszó ernyőt lehetne készíteni két üveglap közé zárt átlátszó vezető folyadékkal, praktikus szempontból ez azonban igen körülményes volna.

Ayrton és Mallernek sok probálgatás után sikerült átlátszó anyagot előállítani, mely eléggé vezető, s melylyel üveglemezek stb. mint valami lakkal könnyen bevonhatók, s pedig a következő módon:

1. eljárás: 1 rész tiszta zselatint 4 rész jégecetben feloldunk, az egészet 100°-os vízfürdőbe helyezve. Ezen oldathoz fél térfogat higított kénsavat töltünk (1 rész tömény kénsav 8 rész deszillált vízben). A keveréket melegen a jól megtisztított üveglapra öntjük. Miután a réteg megkeményedett, saválló lakkal bevonjuk.

2. eljárás. Az előbb említett híg zselatin oldathoz ecetsavat töltünk

(2 térf. eczetsav, 1 térf. oldatba) és ráöntjük az üveglapra. Az üveglapot melegítjük, mikor a feles eczetsav elpárolog, az üveget lehűtjük; erre az eljárást még kétszer ismételjük. Végre az egészet ætherrel higított saválló lakkal vonjuk be.

A réteg elkészítése némi gyakorlatot kiván. Megesik, hogy a hártya zavarossá lesz, vagy nem eléggé vezető.

Aranyfüstös elekroszkop üvegedényét ilyen módon bevonva az a külső behatások ellen tényleg védve volt. Az elekroszkophoz elektromos testet közelítve, semmi változást sem mutatott, ha az elektroszkop gombja pl. fémharanggal lefödve, a megosztó hatástól védve volt.

The Electrician 32. k. 693. l. *T.*

*

Ezüstözés. 100 cm³ 10% ezüstnitrat oldathoz csöppenként annyi ammoniakot töltünk, míg a barna csapadék épen hogy eltünik. Fölös ammoniak kerülendő. Azután deszillált vizet töltünk hozzá, míg az egész térfogat 1 liter lesz. (*A* oldat).

A kereskedésben kapható 40% formaldehyd oldathoz annyi desztillált vizet töltünk, a míg 1% oldatot kapunk. (*B* oldat). Az ezüstözendő üveglap jól megtisztítandó. Közvetlenül az ezüstözés előtt az *A* és *B* oldatból egyenlő térfogatokat gyorsan összekeverünk s az üveglapra ráöntjük. 5—10 percz mulva az oldatból az összes ezüst rárakodott az üveglapra.

A mellett, hogy igen egyszerű, az eljárásnak az az előnye is megvan, hogy a folyadékban lévő ezüstmennyiség tulnyomó része lerakodik az ezüstözendő üveglapra.

A. és L. Lumière *Journ. d. Phys.* (3. sér.) 4. k. 29. l. *T.*

*

Az aluminium forrasztása. Az aluminium aluminiumhoz vagy más fémhez, Delécluse szerint, a következő forrasztó ötvénnyel forrasztható: 48 s. r. ón, 24 s. r. czink, 24 s. r. ólom, 3,5 s. r. aluminium és 0,5 s. r. chróm. — Jean Bies-Albert a következő módon összeállított forrasztót ajánl: 56 s. r. czink, 28 s. r. ón, 9 s. r. aluminium és 7 s. r. ezüst vagy nikel. A forrasztó vas hőmérséklete 350—400° C. Az összeforrasztandó aluminiumfelületek finom ráspolylyal jól megtisztítva, mintegy 400° hőmérsékleten a forrasztószerrel bevonatnak s azután egymáshoz szoríttatnak. — Ha az aluminium más fémmel forrasztandó össze, a letisztított felületeket még hig sósavval vagy királyvízzel kell megnedvesíteni s a forrasztás megkezdése előtt ez utóbbit hirtelen feltörülni. — Az eljáráshoz a közönséges bádogos forrasztó-vas használható, melynek azonban igen tisztának kell lennie. A forrasztott felületek, Delécluse szerint, 1 mm²-kénti 20 kg. terhelés alatt nem váltak szét.

La Nature. 23. évf. 26. l. *B.*

ALAPRENDSZEREK EGY VÁLTOZÓS ALGEBRAI FÜGGVÉNYEKNÉL.

(Első közlemény.)

Az algebrai függvényekre vonatkozó újabb kutatásokban nem egy helyen oly fogalmakkal találkozunk, a melyeknek körébe tartozó alakzatok — noha létezésük logikailag kétségtelen — a kiszámításukra vonatkozó ismeretek hiján aktuálisan még sincsenek meghatározva és így ideális természetűeknek tünnek fel. Ilyen az algebrai egész függvények körében az *alaprendszerek* fogalma, a melyeknek fontosságát mi sem mutatja jobban, mint az az előkelő szerep, a melylyel újabb eredmények felkutatásában bírnak; ebben rejlik tehát az oka, hogy miért tartották az alaprendszerek létezésének kimutatását s a meghatározásukra vonatkozó módszer megállapítását alapjelentőségű dolognak. Érdekes, hogy ennek a fontos kérdésnek eldöntésére vonatkozó kutatások meddősége következtében mindig jobban érezhetővé vált nagy űr, nem csak hogy egyszerre eltünt, hanem annak eltünéséből egyúttal oly módszer fakadt, a mely az algebrai függvények elméletében fontos egyszerüsítéseket vont maga után.

Ugyanis Hensel «Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der algebraischen Integrale»* című értekezésében kimutatja, hogy *minden algebrai függvény oly két egyenlő dimenziójú homogén egész algebrai alak hányadosaként állítható elő, a melynek a számlálójához tartozó zérus-helyek között vannak a függvény zérus-helyei, a nevezőjéhez tartozó zérus-helyek között pedig a függvény végtelen helyei;* evvel a kutatásokat a ho-

* Crelle Journ. 109. k. 1. l.

mogén algebrai egész alakok tanulmányozására vezette vissza. Előtte tehát az elmélet alapjelentésű kérdése az összes homogén algebrai egész alakok meghatározásában jelent meg. *Vizsgálódásaiban ő is eljutott az alaprendszerek fogalmához, a melyeknek nemcsak létezését mutatta ki, hanem a meghatározásukra vonatkozó módszert is megállapítja.* HENSEL-nek ezt a fontos értekezését M. G. BRINCARD az Acta Math. 18. kötetében «Theorie des fonctions algebriques d'une variable» czím alatt lefordította; fordítását azonban inkább átdolgozásnak lehet tekinteni, a mennyiben a kérdés megoldásánál egyszerűbb segédeszközöket használ. Hasonló egyszerűségben mutatom be én is az algebrai függvények elméletének szilárd megalapozására vonatkozó munkálatokat.

1. Egy változóval biró raczionális függvények transzformácziója zerus-dimenziójú homogén-függvényekké.

Ha $f(x)$ állandó együtthatókkal biró egy változójú n-ed fokú raczionális egész függvény zérus-helyeit $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel, x legmagasabb hatványához tartozó együtthatóját a_0-sal jelöljük, akkor $f(x)$ a következő analitikai alakban jelenik meg:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - a_i);$$

az $(x-a_i)$-ket $f(x)$ lineáris tényezőinek nevezzük, ezek mindegyikének van egy-egy zérus-helye: az $x=a$; és egy végtelen helye: az $x=\infty$.

Két egész függvény hányadosát raczionális függvénynek nevezzük; ha tehát a hányados számlálója m-ed, a nevezője pedig n-ed fokú; továbbá a számláló zérus-helyeit α-kal, a nevező zérus-helyeit β-kal, a legmagasabb kitevőjű ismeretlen együtthatóját a számlálóban a_0-sal, a nevezőben b_0-sal jelöljük, akkor az y raczionális függvény jellemzésére a következő analitikai alakzatot irhatjuk fel:

$$y = \frac{a_0 \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)}{b_0 \prod_{i=1}^{n} (x - \beta_i)},$$

hol az α-kat és β-kat különbözőknek tételezzük fel, minthogy az egyenlőket elhagyhatjuk, a nélkül, hogy evvel a függvény természetét megváltoztatnók. A felirt formulából egyszerre következik: hogy a számláló zérus-helyei a függvénynek is zérus-helyei, a nevező zérus-helyei pedig a függvény végtelen helyei; ezenkívül az $x=\infty$, ha $m>n$, a függvénynek annyiszoros végtelen helye, a hány egység van $(m-n)$-ben, ha pedig $m<n$, akkor annyiszoros zérus-helye, a hány egység van $(n-m)$-ben. Következőleg *minden racionális függvény zérus-helyeinek száma megegyezik végtelen helyeinek számával.*

Olyan egy változós racionális függvények tehát, a melyeknek csakis zérus-helyeik vannak, nincsenek. Mindazonáltal feladatul tűzzük ki: *minden racionális függvényt olyan racionális homogén egész függvények hányadosaként előállítani, melyeknek csakis zérus-helyeik vannak.*

Czélunkat legegyszerűbben úgy érjük el, hogy a függvények egyszeresen végtelen sokaságát egyszerre tesszük vizsgálódásunk tárgyává. A kifejezés könnyebbsége kedvéért *nevezzük el a függvényeknek r-szeresen végtelen sokaságát r-dimenziós függvény-csoportnak;* mert az egyes függvényeket az r-dimenziós tér pontjaiként foghatjuk fel. Tegyük tehát vizsgálódásunk tárgyává a következő *egy*-dimenziójú függvény-csoportot:

$$x_1 = \frac{x}{x-u},$$

hol u határozatlan parameter; ebben a függvény-csoportban van egy határozott zérus-hely az $x=0$, mig a végtelen helyek teljesen határozatlanok; és x minden értékéhez lehet a határozatlan parameter számára olyan értéket megállapítani, hogy a függvény értéke véges legyen. Hasonló természetű a következő *egy*-dimenziójú függvény-csoport is:

$$x_2 = \frac{1}{x-u},$$

csakhogy ebben a határozott zérus-hely: az $x=\infty$. Hasonló tulajdonságú az x_1 és x_2 minden lineár függvénye: $\alpha x_1+\beta x_2$, és ebben a határozott zérus-hely az $x=-\beta\alpha^{-1}$.

x_1 és x_2 egymáshoz való viszonya a következő identitáshoz vezet:

$$x = \frac{x_1}{x_2}.$$

Minthogy x értéke teljesen független u-tól, azért annak, mint határozatlan parameternek, mindig adhatunk oly értéket, hogy az x-t definiáló törtnek sem a számlálója, sem a nevezője ne legyen végtelen; ámde x maga is, mint x raczionális egész függvénye fogható fel, ennélfogva megállapítottnak tekinthetjük a következő tételt:

x-nek oly első fokú raczionális egész függvényét, a melynek zérus-helye az $x=0$, két oly egyenlő dimenziójú homogén egész függvény hányadosaként állíthatjuk elő, melynek számlálójának és nevezőjének nincs végteten helye.

Ezt a tételt már most könnyű általánositani. Ugyanis, ha az általános raczionális függvényt definiáló képletben x helyébe $x_1x_2^{-1}$-t irunk, s azután a számlálót és nevezőt — ha n e raczionális függvény fokszáma — x_2^n-el megszorozzuk, akkor az y-t definiáló analitikai alak számlálója és nevezője x_1, x_2 n-edfokú homogén egész függvényévé lesz. Jelöljük a számláló és nevező egy-egy lineár tényezőjét rendre: $(a_i'x_1-a_i'x_2)$- és $(\beta_i'x_1-\beta_i''x_2)$-vel; ha még az $\frac{a_0}{b_0}$-t az egyik, vagy több lineáris tényezőbe beolvasztjuk, akkor raczionális függvényünk a következő alakban jelenik meg:

$$y = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i'x_1-a_i''x_2}{\beta_i'x_1-\beta_i''x_2}.$$

Mivel x következőleg y is független u-tól, azért annak tetszőleges értéket adhatunk; adjunk tehát neki mindig olyan értéket,

hogy törtünk számlálójának és nevezőjének egyik lineáris tényezője se legyen végtelenné; más szóval: hogy sem a nevezőnek sem a számlálónak ne legyenek végtelen helyei, mivel pedig az

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_i''}{a_i'} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

a számláló, az

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\beta_i''}{\beta_i'} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

pedig a nevező zérus-helyeit képviselik, ennélfogva kimondhatjuk a következő tételt:

Minden raczionális függvényt elő lehet állítani, mint oly két egyenlő dimenziójú, homogén két változóval bíró egész függvény hányadosát, a melyben a számlálónak és nevezőnek nincs végtelen helye és számlálójának zérus-helyei a függvénynek összes zérus-helyei, nevezőjének zérus-helyei pedig a függvény összes végtelen helyei. Ezzel a raczionális függvények tárgyalását visszavezettük oly homogén egész algebrai alakok tárgyalására, a melyeknek nincs végtelen helyük; tehát a végtelen helyeket kikerülhetjük.

Ha általánosan az

$$F(x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$$

függvénynek az a tulajdonsága, hogy

$$F(tx_1, tx_2) = t^m F(x_1, x_2),$$

akkor x_1, x_2 m-dimenziójú homogén függvényének nevezzük. Ha $m=0$, akkor $F(x_1, x_2)$ raczionális függvény; mert ha t helyébe $\frac{1}{x_2}t$ irunk, akkor

$$F\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = F(x_1, 1) = F(x_1, x_2)$$

egyenlethez jutunk, tehát $F(x_1, x_2)$ csakugyan független az x_1 és x_2 nevezőiben fellépő határozatlan parametertől.

2. Az egyváltozós algebrai függvények átalakítása homogén függvényekké.

Ha az $A_i(x)$-ek alatt ($i=1, 2, \ldots, n$) x-nek raczionális függvényeit értjük, akkor az

$$f(x,y) \equiv y^n + A_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)\,y + A_n(x) = 0 \qquad 1)$$

n-ed fokú egyenlet y-t mint x *algebrai függvényét* definiálja. Ebből azután következik, hogy y x minden oly értéke mellett végtelen, mely az őt definiáló egyenlet együtthatóinak végtelen helye; ennélfogva az $x=\infty$ mellett y csak akkor végtelen, ha valamelyik $A(x)$ is az.

Riemann *x és y minden raczionális függvényét – föltéve, hogy y-t egy s ugyanazon algebrai egyenlet definiálja — az algebrai függvények egy osztályába sorozza;* Kronecker *pedig az ilyen algebrai függvényeket ugyanazon mesterséges tartományhoz tartozó (Gattungsbereich) algebrai függvényeknek nevezi.* Ha tehát φ és ψ az x és y-nak olyan raczionális egész függvényei, amelyek egyikének sem tényezője $f(x, y)$, akkor az egy osztályba tartozó algebrai függvények általános alakja:

$$z = \frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

Jelöljük az egy osztályba tartozó algebrai függvényeket általánosan $G(x, y)$-al s nevezzük őket ezután röviden $G(x, y)$ függvényeknek.

Kimutatjuk: *hogy a $G(x, y)$ függvények, minden eleme, tehát a fölírt z is eleget tesz egy n, vagy n-nél alacsonyabb fokú irreduktibilis algebrai egyenletnek.*

Tekintettel az 1) alatt felírt egyenletre, z-t, ha u_i-k alatt x raczionális függvényeit értjük, következő alakba írhatjuk:

$$z = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1}. \qquad 2)$$

Szorozzuk meg z-t $y^{(n)}$-ikennel, akkor $-u_{ik}$-k alatt x megfelelő raczionális függvényeit értve $-zy^{(n)}$ az 1) egyenlet segítségével következő alakba írható:

$$zy^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} y^{(k)}.$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Ha ebből az $y^0, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$ válhozókra nézve lineáris homogén egyenletrendszerből, a válhozókat kiküszöböljük a:

$$\begin{vmatrix} u_{11}-z & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22}-z & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn}-z \end{vmatrix} = 0,$$

egyenletet kapjuk, a mely z-re nézve n-edfokú egyenlet. Azonban ez az egyenlet nem szükségképen irreduktibilis.

Reduktibilitás esetében legyen egyik irreduktibilis tényező fokszáma m ($m \leq n$ a részletes kifejtés mutatja, hogy m az n-nek osztója); ha továbbá e tényező együtthatóinak közös nevezőjét $B_0(x)$-el jelöljük, s vele megszorozzuk az egész egyenletet, akkor a z-t *definiáló egyenlet általános alakja következőképen jelenik meg:*

$$B_0(x) z^m + B_1(x) z^{m-1} + \ldots + B_m(x) = 0, \qquad (3')$$

$$m \leq n)$$

hol a $B(x)$ együtthatók x raczionális egész függvényei: következőleg x véges értékei mellett z végtelen helyeit a

$$B_0(x) = 0$$

egyenlet gyökei határozzák meg. Szorozzuk meg a 3') egyenlet gyökeit $B_0(x)$-el, más szóval: alkalmazzuk a következő helyettesitést:

$$z = \frac{z_1}{B_0(x)},$$

akkor a transzformált egyenlet:

$$z_1^n + B_1(x)\, z^{n-1} + B_2(x)\, B_0(x)\, z^{n-2} + \ldots + B_n(x)\, B_0^{n-1}(x) = 0,$$

és ebből világosan látható, hogy z_1-nek x véges értékei mellett nincsenek végtelen helyei; azaz a z-t *meghatározó tört számlálója és nevezője x véges értékei mellett véges marad.*

Ezekkel a segédeszközökkel tehát nem állíthatjuk elő z-t, mint két olyan függvény hányadosát, a melyek x minden értéke mellett végesek maradnak. Ámde, ha az előbbi fejezetben alkalmazott helyettesítést alkalmazzuk, akkor z csakugyan olyan két homogén egész függvény hányadosaként jelenik meg, a melyeknek végtelen helyei nincsenek.

Az 1) alatt felírt egyenletben írjunk x helyébe $\frac{x_1}{x_2}$-t; ezáltal y együtthatói, az előbbi fejezet fejtegetései alapján x_1 és x_2 *zérus*-dimenziójú homogén függvényeivé válnak; jelöljük ezek nevezőinek legkisebb többszörösét $C_0(x_1, x_2)$-vel s szorozzuk meg vele az egész egyenletet, s azután jelöljük általánosan az y^{n-i} együtthatóját $C_i(x_1, x_2)$-vel; minthogy valamennyi $C_i(x_1, x_2)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ egyenlő dimenziójú homogén függvénye x_1, x_2-nek, azért jelöljük fokszámukat közös betűvel m-mel. A mondottak után az 1) egyenlet új alakja:

$$\sum_{i=0}^{n} C_i(x_1, x_2)\, y^{n-i} = 0,$$

a melyben $C_i(x_1, x_2)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ *m-ed dimenziójú homogén függvények.*

Minthogy y értéke az x_1, x_2-ben fellépő határozatlan parametertől független, *azért $C_0(x_1, x_2)$-nek csakis a határozott zérushelyei határoznak meg y számára végtelen helyeket.* Alkalmazzuk ezek után a következő helyettesítést:

$$y = \frac{\eta}{A_0(x_1 x_2)}.$$

Mindenek előtt kimutatjuk, *hogy η_i (x_1, x_2)-nek m-edfokú homogén függvénye.* Ugyanis y értéke, miként az 1') egyenletből látható, nem változik, ha x_1 és x_2 helyébe tx_1, tx_2-t helyettesítünk;

a mi a 4) alapján csak úgy lehetséges, ha η annyiad fokú homogén függvénye (x_1, x_2)-nek, mint $A_0(x_1, x_2)$.

A helyettesítés végrehajtása után a

$$B_i(x_1, x_2) = C_i(x_1, x_2)\, C_0^{i-1}(x_1, x_2)$$

jelölést használva, az 1') alatt levő egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\eta^n + B_1(x_1, x_2)\,\eta^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(x_1, x_2)\,\eta + B_n(x_1, x_2) = 0. \quad \text{I.}$$

Minthogy $B_i(x_1, x_2)$ *im*-ed dimenziójú homogén függvénye x_1, x_2-nek, és η nem függ az x_1 és x_2 értékeiben fellépő határozatlan parametertől, azért annak mindig oly értéket adhatunk, hogy valamennyi $B_i(x_1, x_2)$ x minden értéke mellett véges maradjon; más szóval *η-nak nincsenek végtelen helyei;* de ugyanezt mondottuk az imént $C_0(x_1, x_2)$-ről is; *tehát y-t előállítottuk, mint két oly homogén egyenlő dimenziójú függvény hányadosát, a melyeknek végtelen helyei nincsenek, de a melyeknek zérus-helyei a szerint, a mint a számlálóhoz, vagy nevezőhöz tartoznak, a függvény zérus- vagy végtelen helyeit képezik.*

Ez a tétel azonban érvényes a $G(x_1 y)$ függvények mindegyikére, ugyanis

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\eta}{C_0(x_1, x_2)}$$

helyettesítés alkalmazásával

$$G(x, y) = G\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{\eta}{C_0(x_1, x_2)}\right) = F(x_1, x_2, \eta);$$

tehát

$$F(tx_1, tx_2, t^m\eta) = F(x_1, x_2, \eta),$$

és így F az x_1, x_2, η változókra nézve bizonyos tekintetben még homogénnek mondható, a miből következik, *hogy minden algebrai függvény, x_1, x_2, η változókban egyenlő dimenziójú oly homogén egész függvények hányadosaként jelenik meg, melyeknek végtelenjei nincsenek, de zérus-helyeik, a függvény zérus- vagy végtelen*

helyeit képezik, a szerint, a mint a számlálóhoz, vagy nevezőhöz tartoznak.

Az algebrai függvények tárgyalását tehát x_1, x_2, η homogén függvényeinek tárgyalására vezettük vissza, a melyek közül, ha az egyenlő dimenziójúakat egy osztályba sorozzuk, akkor a következő tételt mondhatjuk ki: *x_1, x_2, η-ban két egy osztályba tartozó homogén függvény hányadosa algebrai függvény.*

Sutáh József.

MEGJEGYZÉS DIRICHLET EGYIK TÉTELÉRE.

E közlemény czélja elemi uton kimutatni, *hogy az $ax-1$ általános taggal birô számtani haladvány végtelen sok törzsszámot tartalmaz.* Egyszerűség kedvéért azonban azokra az esetekre szorítkozom, midőn *a páratlan törzsszám hatványa.* A tárgyalásnak kiinduló pontja magának DIRICHLET-nek * egyik tétele, a melyet czéljainknak megfelelően általánositani fogunk. Ez az általánositott eredmény már LUCAS-nál ** is előfordul, a ki DIRICHLET speciálisabb tételét, úgy látszik, nem ismerte, LUCAS bebizonyitása azonban igen komplikált.

*

DIRICHLET említett tétele, czéljainkra alkalmas jelzéssel, a következő:

Ha p pozitiv páratlan törzsszám, b nem négyzet, t a

$$V_p = \frac{(y+\sqrt{b})^p-(y-\sqrt{b})^p}{2\sqrt{b}} = \binom{p}{1}y^{p-1}+\binom{p}{3}y^{p-3}+\cdots+\binom{p}{p}b^{\frac{p-1}{2}}$$

alaknak páratlan törzsosztója és

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1,$$

akkor

$$t \equiv -1 \pmod{p}.$$

---

* De formis linearibus in quibus continentur etc. (L. Összes munkái.)

** Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. (American Journal of Math. I.)

A tétel általánosítása a következő. *Ha a pozitiv egész szám, b nem négyzet és t a*

$$V_a = \frac{(y+\sqrt{b})^a-(y-\sqrt{b})^a}{2\sqrt{b}} = \binom{a}{1} y^{a-1} + \binom{a}{3} y^{a-3} b + \cdots \quad \text{II)}$$

alaknak oly páratlan törzsosztója, mely kielégíti a

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1$$

feltételt; ha továbbá a-nak tetszőleges valódi osztóját d-vel jelöljük és t az y-nak ugyanazon számértéke mellett a

$$V_d = \frac{(y+\sqrt{b})^d-(y-\sqrt{b})^d}{2\sqrt{b}}$$

alakok egyikének sem osztója, akkor

$$t \equiv -1 \pmod{a}.$$

Ha az

$$\begin{aligned}(y+\sqrt{b})^a &= U_a + V_a\sqrt{b} \\ (y-\sqrt{b})^a &= U_a - V_a\sqrt{b}\end{aligned} \qquad \text{III)}$$

egyenletek segítségével V_a mellé behozzuk U_a-t, akkor

$$U_a = \frac{(y+\sqrt{b})^a+(y-\sqrt{b})^a}{2}, \qquad V_a = \frac{(y+\sqrt{b})^a-(y-\sqrt{b})^a}{2\sqrt{b}}.$$

Miként említettük a V_a-alaknak csak oly t törzsosztóira fordítjuk figyelmünket, a melyekre nézve

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1$$

Könnyen belátható, hogy ilyen t y-nak ugyanazon értéke mellett U_a-nak nem lehet osztója. Ha ugyanis osztaná U_a-t, akkor a III) alatti kifejezéseknek is tényezője volna és így kellene, hogy

$$(y+\sqrt{b})^a (y-\sqrt{b})^a = (y^2-b)^a \equiv 0 \pmod{t}$$

legyen, a miből

$$y^2 \equiv b \pmod{t}$$

következnék, de ez ellenkezik feltételünkkel.

Vizsgáljuk meg most V_a és V_d kölcsönös viszonyát. Hozzuk be az

$$\frac{a}{d} = a'$$

egész számot, akkor

$$(y+\sqrt{b})^a = U_a + V_a\sqrt{b} = (U_d + V_d\sqrt{b})^{a'}$$

és ebből

$$V_a = V_d\left\{\binom{a'}{1} U_d^{a'-1} + \binom{a'}{1} U_d^{a'-3} V_d^2 b + \cdots\right\}$$

Ebből az identitásból először is kitűnik, hogy V_a osztható V_d-vel; másodszor, hogy a $\frac{V_a}{V_d}$ kifejezésnek csak akkor lehet oly törzsosztója, mely V_d-t is osztja, ha ez egyszersmind osztja U_d-t, feltéve, hogy a osztóit kizártuk. Ha tehát t $\frac{V_a}{V_d}$-nek oly páratlan törzstényezője, a mely a-hoz képest relativ prim és a melyre nézve

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1,$$

akkor y ugyanazon értéke mellett nem osztja V_d-t, mert különben U_d-nek is osztója lenne, de ezt az előző tétele kizárja.

Ez észrevételek után áttérhetünk tételünk bebizonyítására. Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy

$$V_{t+1} \equiv 0 \pmod{t}.$$

Ugyanis

$$V_{t+1} = \binom{t+1}{1} y^t + \binom{t+1}{3} y^{t-2} b + \cdots + \binom{t+1}{t} y b^{\frac{t-1}{2}};$$

de mivel t törzsszám

$$V_{t+1} \equiv (t+1)\,(y^t + y b^{\frac{t-1}{2}}) \pmod{t};$$

ha FERMAT tételét felhasználjuk, ezt így is írhatjuk

$$V_{t+1} \equiv y\,(1 + b^{\frac{t-1}{2}}) \pmod{t},$$

de minthogy

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1$$

csakugyan következik, hogy

$$V_{t+1} \equiv 0 \pmod{t}$$

Tételünk be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy

$$t+1 \equiv 0 \pmod{a}.$$

Ha ez a kongruenczia nem állana fenn, akkor $t+1$-nek és a-nak legnagyobb közös osztója d a-nak egy valódi osztója lenne és így lehetne oly g, h pozitiv egész számokat találni, melyek eleget tennének a

$$g(t+1) - ha = d \qquad \text{V)}$$

egyenlőségnek. Lehetséges-e ez a t-re vonatkozó feltételek mellett? Láttuk, hogy

$$V_{t+1} \equiv 0 \pmod{t}$$

s így az eddigiek szerint

$$V_{g(t+1)} \equiv 0 \pmod{t},$$

azonban az

$$U_{g(t+1)} \equiv 0 \pmod{t}$$

kongruenczia nincsen kielégítve. Hasonlókép

$$V_{ha} \equiv 0 \pmod{t}$$

azonban nem áll, hogy

$$U_{ha} \equiv 0 \bmod t.$$

Az V) alatti egyenlőségből

$$d + ha = g(t+1),$$

és így

$$(U_d + V_d \sqrt{b})\,(U_{ha} + V_{ha} \sqrt{b}) = U_{g(t+1)} + V_{g(t+1)} \sqrt{b}$$

a miből

$$V_{g(t+1)} = U_d V_{ha} + V_d U_{ha} \qquad \text{VI)}$$

Ez azonban absurdum. Ugyanis

$$V_{g(t+1)} \equiv 0 \pmod{t}, \quad U_d V_{ha} \equiv 0 \pmod{t}$$

és így kellene, hogy legyen

$$V_d\, U_{ha} \equiv 0 \pmod{t}, \quad V_d \equiv 0 \pmod{t}$$

ezt azonban feltételeink kizárják. Tételünk így be van bizonyítva.

Térjünk most át az $ax - 1$ általános tagú haladványra. Speciális esetünkben legyen $a = p^k$ páratlan törzsszámhatvány.

Ekkor

$$V_{p^k} = \binom{p^k}{1} y^{p^k-1} + \binom{p^k}{3} y^{p^k-3} b + \ldots + \binom{p^k}{p^k} b^{\frac{p^k-1}{2}}. \qquad \text{VII)}$$

tehát

$$V_{p^k} \equiv p^k y^{p^k-1} \pmod{b}.$$

Egyszersmind

$$V_{p^{k-1}} = \binom{p^{k-1}}{1} y^{p^{k-1}-1} + \binom{p^{k-1}}{3} y^{p^{k-1}-3} b + \ldots + \binom{p^{k-1}}{p^{k-1}} b^{\frac{p^{k-1}-1}{2}},$$

a miből

$$V_{p^{k-1}} \equiv p^{k-1} y^{p^{k-1}-1} \pmod{b}.$$

Tudjuk, hogy V_{p^k} osztható $V_{p^{k-1}}$-nel. Ha tehát b-t relativ prímnek választjuk py-hoz, akkor

$$\frac{V_{p^k}}{V_{p^{k-1}}} \equiv p y^{p^k - p^{k-1}} \pmod{b}.$$

Tegyük

$$\frac{V_{p^k}}{V_{p^{k-1}}} = V, \quad p^k - p^{k-1} = 2c,$$

akkor

$$V \equiv p y^{2c} \pmod{b}. \qquad \text{IX)}$$

Azonban b a mellett, hogy py-hoz relativ prím, mint tudjuk,* úgy is választható, hogy

$$b \equiv 1 \pmod{y}$$

és

$$\left(\frac{p}{b}\right) = -1$$

legyen. Határozatlanúl hagytuk még y-értékét. Ha y-t párosnak és b-hez relativ prímnek választjuk, akkor V_{p^k} és így V is páratlan és b-hez relativ prím. Ennélfogva IX) alapján

* Dirichlet-Dedekind: Vorlesungen über Zahlentheorie § 52.

$$\left(\frac{b}{v}\right) = \left(\frac{V}{b}\right) = \left(\frac{p}{b}\right) = -1$$

Ha ezenkívül y p-vel osztható, akkor V relativ prim p-hez.

X)-ből következik, hogy V-nek és így V_{p^k}-nek is van oly p-től különböző t törzsosztója, melyre, nézve

$$\left(\frac{b}{t}\right) = -1 \qquad \text{XI)}$$

A bevezetésben felsoroltak alapján t nem osztója $V_{p^{k-1}}$-nek, tehát

$$t \equiv -1 \pmod{p^k}, \qquad \text{XII)}$$

vagyis a $p^k x - 1$ tagú számtani haladvány tartalmaz törzsszámot.

Hogy végtelen sok törzsszámot tartalmaz, az onnan világos, hogy k bármely egész pozitiv szám lehet.

Bauer Mihály.

A Mathematikai és Physikai Társulat II. tanulóversenye.

A Math. Phys. Társulat választmánya f. é. áprilishó 4-én tartott ülésén megbízta az ügyvivő titkárt a II. tanulóverseny előkészítésével. A versenyre szóló felhivás szétküldetvén, összesen 57 középiskolai érettségi vizsgálatot tett tanuló jelentkezett a versenyre.

A verseny október 22-én tartatott meg, és pedig egyidőben Budapesten és Kolozsvárott. Budapesten 44-en, Kolozsvárott pedig 5-en jelentek meg.

A verseny zárt helyen, a társulat tagjainak felügyelete alatt ment végbe. A verseny alatt szabálytalanság nem fordult elő, a miről a helyszinén felvett jegyzőkönyv tanuskodik. A versenyző dolgozatok elkészítésére engedett 4 óra elteltéig Budapesten 22, Kolozsvárott pedig 2 dolgozat adatott át az ellenőrző bizottságnak. A dolgozatok az ellenőrző tagok aláirásával ellátva lepecsételtettek.

Az elnökség a dolgozatok megbirálására bizottságot küldött ki, mely a birálattal elkészülvén, azt a választmány deczember 12-én tartott ülésén bemutatta. A választmány a biráló bizottság jelentését tudomásul vevén, a díjak kiadására vonatkozó javaslatot elfogadta s azt határozta, hogy e javaslat a rendes ülésen felolvastassék s a díjak kiadassanak.

A jelentés, mely az ugyanaz nap tartott rendes ülésen felolvastatott, a következő:

A Math. Phys. Társulat a választmánynak 1894. évi június 22-ikén tartott ülésének határozata értelmében ez évben is, még pedig október 9-dikén mathematikai tanulóversenyt rendezett. E versenyen készült dolgozatok megbirálására az elnökség az alulírt tagokból álló bizottságot küldötte ki, melynek jelentését a következőben szerencsénk van előterjeszteni.

A bizottság a hozzáérkezett dolgozatok áttekintése és beható bírálata után sajnálattal konstatálja, hogy az idei verseny eredménye a hozzáfűzött reményeknek kevésbbé felelt meg; mert daczára annak, hogy a mult verseny eredményének tekintetbe vételével a megoldásra kitűzött problémák nehézségei némileg le voltak szállítva, az ez évben készült dolgozatok úgy külső kiállítás és fogalmazás, mint belértékök tekintetében a tavalyiaknak színvonalán alúl maradtak.

A megoldásra kitűzött tételek a következők voltak:

1. *Bizonyíttassék be, hogy n különböző kártya két személy között* $2(2^{n-1}-1)$*-féleképen osztható szét.*

2. *Adva van az ABC derékszögű háromszög; szerkesztessék e háromszögön belül az N pont úgy, hogy az NAB, NBC, NCA szögek egymással egyenlők legyenek.*

3. *Egy háromszögre adva van: a körülírt kör sugara, egy oldal és a másik két oldal viszonya: mekkorák e háromszög oldalai és szögei?*

A versenyen 22 dolgozatot adtak be; ezek közt 16-ban a versenyző legfeljebb *egy* és 3-ban két feladatot tudott megoldani; ez a 19 dolgozat a jutalmazásnál nem jött tekintetbe. A fönnmaradó három dolgozat készítői: Meitner Elemér, Pilczer Ignácz és Riesz Emil urak.

Riesz úr dolgozatában a harmadik tétel kidolgozása nemcsak stiláris hanem mathematikai tartalmának tekintetében is fogyatékos, a mennyiben egy íráshiba következményei végig vonúlnak rajta; a bizottság mindazonáltal neki ítéli oda az első díjat, mert dolgozata, a mellett hogy alapos mathematikai tudást árul el, kifejtéseinek logikai voltával és aránylag tiszta fogalmazásával versenytársait felülmulja.

Riesz úr dolgozatához legközelebb áll Pilczer Ignácz uré, a kinek dolgozata szintén mind a három tételnek megoldását tartalmazza, de többkevesebb kisebb hibával és fogyatékosabb fogalmazással. A biráló bizottság ennélfogva Pilczer Ignácz úrnak a második díjat ítéli oda.

Meitner Elemér úr dolgozata mathematikai tartalma tekintetében Riesz úréval egyenlő rangú, de fogalmazványa nyelvi, stilus és kiállítás tekintetében annyira kifogás alá esik, hogy jutalmazásra nem volt ajánlható.

A bizottság végül Kiss Jenő urat, ki készültség tekintetében — úgy látszik — nem áll azon a fokon, mint a megjutalmazásra ajánlott versenytársai, de dolgozatában két tételnek helyes kifejtésével világos gondolkodásának tanújelét adta, megdicsérésre ajánlja.

Eberling József, *König Gyula,*
Bartonick Géza, *Beke Manó,*
Rados Gusztáv, *Schmidt Ágoston.*

*

A jelentés felolvastatván, a társulat elnöke, B. Eötvös Loránd kijelenti, hogy a társulat első díját Riesz Emil, a második díját pedig Pilczer Ignácz nyerte el. Az előbbi a budapesti V. ker. állami főreáliskolán, az utóbbi pedig a kaposvári állami főgymnásiumban végezte középiskolai tanulmányait.

Egyúttal a társulat elismerését és köszönetét fejezi ki a versenyben győztes tanulók tanárainak, Dr. Beke Manó és Baló Gyula tanár uraknak és tisztelt tagtársainknak.

Végül kijelenti, hogy Kiss Jenő dolgozata dicséretben részesül.

A Mathematikai és Physikai Társulat II. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

1. Riesz Emil dolgozata.

1. *Bizonyíttassék be, hogy n különböző kártya 2 személy közt* $2(2^{n-1}-1)$*-féleképen osztható fel.*

«A» kapja majd 1) az egyes kártyákat

		ilyet kap	n-szer
« « «	2) a kettős	«	$\binom{n}{2}$ «
« « «	3) a hármas	«	$\binom{n}{3}$ «
« « «	4) $\frac{n}{2}$	«	$\binom{n}{\frac{n}{2}}$ «

most

«B» kapja az egyes kártyákat; ez alkalommal ugyanannyi osztás történik.

Az osztások száma tehát:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\cdots\cdots\binom{n}{n-1}=2^n-2 \text{ mert}$$

$$(1+1)^n=\overbrace{\binom{n}{0}}^{1}+\binom{n}{1}+\cdots\cdots\binom{n}{n-1}+\overbrace{\binom{n}{n}}^{1}$$

tehát

$$2^n-2=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdots+\binom{n}{n-1}.$$

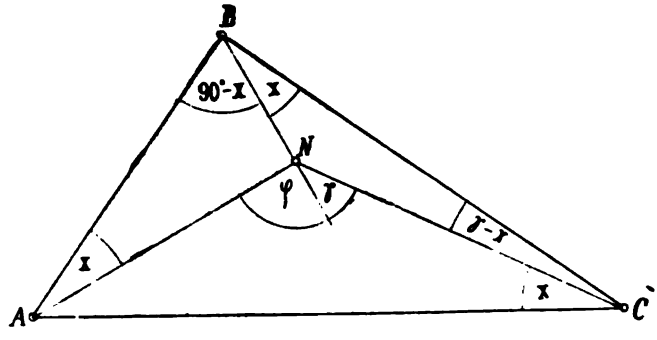
Azért használandók a combinatiók, mert itt n elemből az egyes csoportokat kiválasztjuk. de nem vagyunk tekintettel a sorrendre.

---

* A dolgozatok minden változtatás és javítás nélkül vannak közölve

Szerk.

2) *Adva egy derékszögű háromszög ABC; ebben úgy szerkesztendő meg egy N pont, hogy NAB, NBC és NCA szögek egymással egyenlők legyenek*



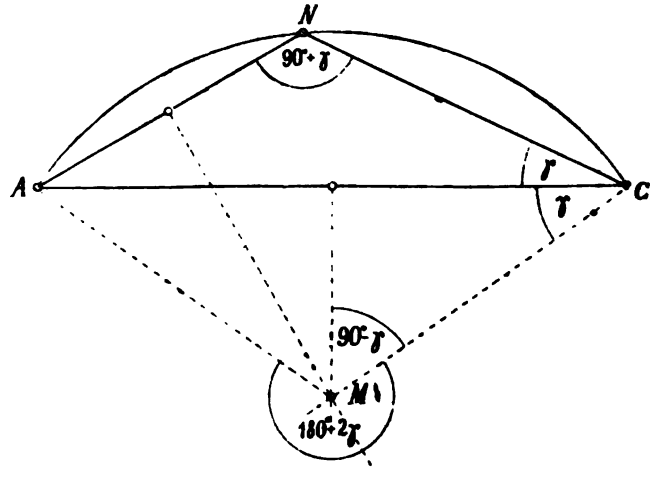
$$\varphi = 90 - x + x = 90°$$

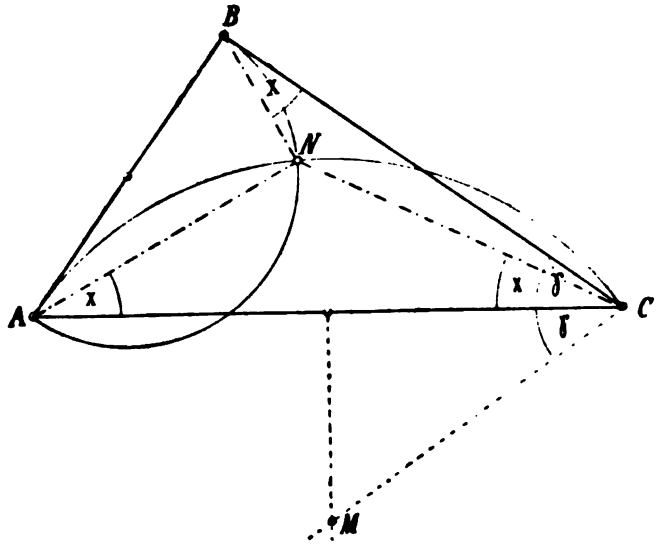
φ derékszög az N pont mértani helye lesz tehát azon kör, mely AB-n, mint *átlón* nyugszik. A φ melletti szög γ lesz; az N pont tehát egy újabb körön fekszik, mely $ANC\ \Delta$ köré írható.

Ezen ANC kör középpontja fekszik az AC felén emelt merőlegesen és azon az egyenesen, mely AC oldalra fektetett γ szög egyik szára.

Az M pont tehát meghatározható, akkor a kör MC sugárral meghatározva az N pontot nyerjük, a hol a 2 kör metszi egymást.

A szerkesztés lesz:





3) *Egy háromszögből adva a körülírt kör sugára egy oldal és a másik két oldal viszonya. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?*

Adva:

$$R,\ c,\ \frac{a}{b}=n \qquad R=\frac{2c}{\sin\gamma} \qquad \sin\gamma=\frac{2c}{R}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \qquad \cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}$$

$$a=bn \qquad \cos\gamma=\frac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}$$

$$c^2=b^2n^2+b^2-2b^2n\cos\gamma$$

$$c^2=b^2(n^2+1-2n\cos\gamma)$$

$$b=\frac{c}{\sqrt{n^2+1-2n\frac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}}}$$

$$a=\frac{nc}{\sqrt{n^2+1-2n\frac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}}}$$

A 3 oldal meg van sinus tétellel meghatározhatjuk a szögeket.

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c} = \frac{c}{\sqrt{n^2+1-2n\cos\gamma}} \cdot \frac{2c}{R} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{2c}{R\sqrt{n^2+1-2n\frac{\sqrt{R^2-4c^2}}{R}}} \qquad \alpha = 180-\beta-\gamma$$

2. Pilczer Ignácz dolgozata.

1) *Bizonyitassék be, hogy n kártya 2 személy között $2(2^{n-1}-1)$-féleképen osztható fel.*

Az osztást úgy végezhetjük, hogy A kap 1-t B $n-1$-t továbbá
A « 2-t B $n-2$-t,
A « k B $n-k$-t

Elsőképeni osztás $\binom{n}{1}$-szer lehet egy személynél.

A második « $\binom{n}{2}$ « lehet egy személynél és így

tovább az n-edik $\binom{n}{n}$ « egy személynél,

tehát egy személynél az osztás lehet

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}\text{-szer}$$

Ez azonban nem egyéb, mint $(1+1)^n-2=2^n-2$ minthogy két személy van, osztás $2\cdot 2^{n-1}$ lehetne; ámde az nem képez osztást, ha az egyik mind az n kártyát megkapja, vagyis ebből $2\cdot 1=2$ kettőt meg le kell vonni; tehát az osztás $S=2\cdot 2^{n-1}-2=2(2^{n-1}-1)$-szer lehet.

2) *Adva van ABC derékszögü háromszög szerkesszük meg a háromszögön belül az N pontot úgy, hogy NAB, NBC és NCA szögek egyenlők legyenek.*

$$NCA=NAB=NBC=\alpha$$

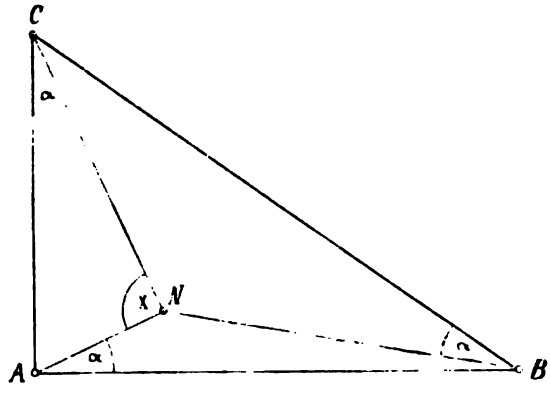
Legyen

$$NAC=y \quad \text{és} \quad CNA=x$$

$$\alpha+x+y=180^\circ \quad \text{ámde} \quad y=90^\circ-\alpha$$

$$\alpha+x+90^\circ-\alpha=180^\circ$$

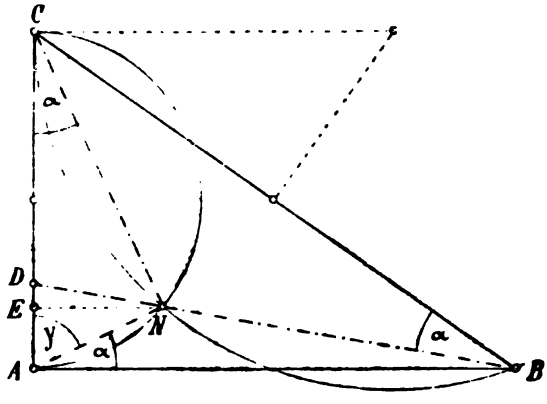
$$x=90^\circ$$



Tehát $AN \perp CN$. Szerkesztünk ACn egy félkört $\frac{AC}{2}$ sugárral, továbbá

$$CNB+\alpha+BCA-\alpha=180°$$
$$CNB+BCA=180°=2R$$

CNB mellékszöge BCA-nak; most szerkesztünk egy oly kört, melynek húrszöge $180°-BCA$ és ismeretes az egy húr. Ezt úgy szerkesztjük, hogy a CB húrt felezzük, a felezési pontban rá merőlegest állítunk és az egyik oldalára a merőlegesnek rávisszük a $180°-BCA$-t, s hol a két kör egymást metszi, ott lesz az N pont.



3) *Egy háromszögben adva van a körülírt kör sugara* (d), *egy oldal* c *és másik kettő aránya* $a : b$; *mekkorák a háromszög oldalai és szögei?*

$$r = \frac{abc}{4ab\sin\gamma} \qquad 2r = \frac{c}{\sin\gamma} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

A tangens-tétel értelmében, a

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(a+b) : (a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

hol

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ-\gamma}{2}$$

minthogy a föntebbi tételből $\frac{\alpha-\beta}{2}$ kiszámítható; tehát

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180-\gamma}{2} \text{ és}$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{a+b}.$$

egyenletekből ismeretes az α és β.

Az a és b oldalakat a sinus-tétel segítségével számítjuk ki $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

HELMHOLTZ-nak a mathematika és a mechanika alapelveire vonatkozó vizsgálatai.*

Dr. KOENIGSBERGER LEO a heidelbergi egyetem 1895 nov. 22. díszülésén mondott beszéde.

Aki azt tűzi ki feladatául, hogy HELMHOLTZ-nak a mathematikai tudomány körül szerzett érdemeit jelentőségüknek megfelelően előtüntesse, nem teheti ezt a nélkül, hogy minden egyes, összesen két-három száz, részben nem éppen könnyen megérthető dolgozatáról tudomást ne vegyen, minthogy ezek mindegyike, ha nincsen is a mathematika nyelvén előadva, a logikai gondolkodásnak kiváló élességével a mathematikus érdeklődését a legnagyobb mértékben felkelti; ámde viszont éppen ez teszi nehézzé a feladatnak teljes megoldását, mert a természettudományok összes mezőire kiható összehasonlíthatatlan működésének méltatója kell, hogy egyszerre physiológus és physikus, mathematikus, philosophus és æsthetikus is legyen, hogy az olyan nagy gondolkodót, aminő HELMHOLTZ, ne csak csodálni és megbámulni tudja, hanem méltányolhassa és meg is érthesse. Ugyanis nem olyan természetű volt az ő szelleme, hogy mathematikai fejtegetésekbe önmaguk kedveért bocsátkozott volna csupán azért, hogy teljesen abstract igazságok levezetésében gyönyörködjék, melyek aztán az exact természettudományokban esetleg alkalmazásba jöhetnek; ő inkább közvetlenül a természet szemléletéből merítette mathematikai problémáit s ez bizonyára az egyetlen helyes, de csakis az oly nagy mestert sikerrel kecsegtető út, abból a felfogásból indúlván ki, hogy annak a tudománynak, mely a természet megértését tűzi ki czéljául, fel is kell azt tételeznie, hogy a természet valóban megérthető. És megérthetőnek lenni — legna-

---

* Midőn KOENIGSBERGER ezen nagyszabású a heidelbergi egyetem kiadásában megjelent beszédét egész terjedelmében közöljük, felhívjuk t. tagtársaink figyelmét HELMHOLTZ tudományos dolgozatainak kiadására, mely *Wissenschaftliche Abhandlungen von* HERMANN v. HELMHOLTZ (Leipzig, Joh. Ambr. Barth 1882—1895) czim alatt három kötetben megjelent. Mindazok a dolgozatok, melyeket KOENIGSBERGER beszédjében fejteget, a gyűjteményben bennfoglaltatnak. *Szerk.*

gyobb tanítványának, HEINRICH HERTZnek szavaival kifejezve — előtte nem jelentett mást, mint azt, hogy a külső tárgyak belső képeinek gondolkodáskövetelte következményei a leképelt tárgyak természetszerű következményeivel összhangzásba hozassanak, vagyis, hogy a természet problémái mathematikailag fogalmaztassanak. Így aztán valamennyi dolgozatában tisztán mathematikai szempontból érdekes eredmények végtelen sokasága lelhető, mely eredmények azonban nyomban mechanikai-physikai értelmezésben is részesülnek s akkor mélyen rejtőző, összefoglaló természettörvényeket fejtenek fel, melyek mathematikai burkolatukból kiszabadítva, nemcsak a természettudományi, hanem bízvást mondhatjuk, az egész művelt világban a természeti tünemények lényegesen új felfogásának útját törték. Csupán akkor érdekelték önmagukban a mathematikai vizsgálódások is, a midőn a mathematikai disciplinák alapjainak és axiomáinak fölkutatása forgott szóban ; tett is fontos kutatásokat a mathematikai három nagy mezején, a geometriában, az arithmetikában és a tiszta mechanikában, melyek az ismeretelmélet, valamint a mathematikai physika egész fejlődésére nézve úttörők voltak, melyeknek ösvényét azonban — és pedig némi ellentétben más kitünő mathematikusok hasonló vagy egészen egy irányú vizsgálataival — mindenkor a megfigyelés és a tapasztalás egész biztosan megjelölték előtte, mely ösvényeken a legelvontabb mathematikai igazságokhoz eljutott.

A mathematikának az ő egész terjedelmében, a mint itt tekintetbe venni kívánom, három egymástól teljesen független alapképzettel van dolga ; ezek a tér, az idő és a tömeg. A térbeli alakzatokkal foglalkozik a geometria, az időbeliekkel az arithmetika, a tömegnek a tér és időhöz való vonatkozásaival pedig a mathematikai physika. A tér és idő jóformán az összes mathematikusok és philosophusok felfogása szerint KANT-tól felállított nézet értelmében transcendens szemléleti alakulatok voltak, melyeket az ismeretes axiomák közelebbről meghatároznak, és pedig mindaddig, míg HELMHOLTZ vizsgálódásainak körébe nem vonta be őket, amidőn t. i. amaz axiomák a priori létezését kétségbe kezdte vonni és pedig nem elvont mathematikai megfontolások alapján, amint ezt részben GAUSS és RIEMANN megkisérlették, hanem physiologiai-optikai vizsgálatai indították arra, hogy az általános térszemlélet eredetéről egyáltalában gondolkozzék és csakhamar arra a meggyőződésre vezették, hogy csakis a térviszonyok szemlélhetősége tételezteti fel velünk magától értetődőnek azt, ami voltaképen a mi külső világunk egy különös sajátsága és mi ekként a geometria axiomáit transcendens szemlélettől adott tételeknek tartjuk. Már az 1852. évben Königsbergben tartott habilitáló előadásában * a tárgyaknak s a

* Ueber die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen.

nekik megfelelő érzéki észrevételeknek mélyreható physiologiai-physikai szembeállítása révén arra a nézetre jutott, hogy a fény- és színérzetek csupán csak jelképei (symbolumai) a valóságnak és így rátalált az útra, mely az érzéki észrevételek természetének mélyebbre ható megismerésében a további haladást lehetővé tette. Ellentétben a térszemlélet nativistikus elméletével, mely feltételezi, hogy az ideghártya érzi a saját térbeli kiterjedését, és hogy a határozott térbeli képzetek valamilyen velünkszületett mechanismus folytán jönnek létre, vagyis, hogy minden egyes érzetnek külön localisatiója is a közvetlen szemlélettel van megadva, Helmholtz az empiristikus elmélet igazi alapítójává lett, mely szerint az érzéki észrevételek a mi tudatunkra nézve csak a külső tárgyak és folyamatok jelei, melyek jelentését megérteni értelmünknek a feladata s így nem is látszik szükségesnek, hogy pl. a helyzetbeli különbségek észrevevésekor látó érzékünknek helyzeti jelei és a nekik megfelelő külső térviszonyok között bármiféle megegyezés létezzen, vagyis hogy a gondolkodás és az elképzelés törvényei s a külső világ törvényei előre megállapított összhangzásban legyenek.

Ezen physiologiai-philosophiai elmélkedéseit a *horopterről* * szóló, tisztán mathematikai szempontból is érdekes értekezésében biztosabb alapra helyezte. A horoptert úgy definiálván, mint geometriai helyét mindazon külső térbeli pontoknak, melyek az ideghártya megfelelő pontjain képelődnek le s ennélfogva egyszerűen látszanak, azt találja, hogy ez általában valamilyen harmadrendű görbe; és ha vonalhoropternek azt a felületet nevezi, amelyen határozott irányú egyenes vonalaknak feküdniök kell, hogy folytonos congruens eltolódás közben a képek mindig egész egyenesekben fedjék egymást és pedig anélkül, hogy a képek pontjainak megfelelőknek kellene lenniök, a függőleges és vízszintes horopter (Vertical- und Horizontalhoropter), vagyis azon vonalak számára, melyek mindkét látómezőben az ideghártya-horizonokra merőlegesek vagy velök párhuzamosak, másodrendű felületeket nyert. Ezeket a «Physiologische Optik»-ban szigorúan mathematikai alakban tárgyalja, és pedig úgy, hogy az ideghártyákat asymetrikusaknak tekinti s identikus helyeik definitióját is némileg módosítja. Így meg nem czáfolható mathematikai-physikai okoskodások alapján az a meggyőződés érlelődik benne, hogy miután a látás aktusában két különböző érzet, anélkül, hogy egymással összeolvadna, egyidejűleg tudatunkba jut és ekként a testek világának egyszerű szemléleti képévé csakis a tudatnak a tapasztalaton alapuló ténykedése folytán olvad össze: egyáltalában lehetetlen szemléleteink ama részét, mely a közvetlen érzéshez tartozik, elkülöníteni attól, mely csak tapasztalás útján

* Ueber den Horopter. 1862—1864.

szereztetett és hogy csakis a tér és idő, s ennélfogva a belőlük leszármaztatott számviszonyok, vagyis tisztán csak a mathematikai vonatkozás lehet közös a külső és a belső világ között és így csakis ebben lehet a képzetek s az elképzelt dolgok között teljes megegyezésre törekedni. És most már egész természetszerűen az a kérdés állott eléje, melyre az 1868-ban «Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen» czím alatt megjelent dolgozataiban törekszik megfelelni, az t. i., hogy mi az voltaképen, ami a tér- és időbeli képzeteknek a leképelt dolgokkal való megegyezését lehetővé teszi; mi az a prioristikus ezen képzetekben, mi a tapasztalat folyománya, s mi egyáltalában az eredete az egyetemes térszemléletnek?

Helmholtz tiltakozik az ellen, mintha a Kant felfogásával szemben, a ki a tért a szemlélet transcendentalis formájának tekinti, állást foglalna: de az érzéki észrevételek terén tisztába jött avval, hogy pl. a szemünk szerkezetének a következménye, hogy mindazt, amit látunk, csak a színek térbeli eloszlásának tekintsük, és pedig a nélkül, hogy ezen látásbeli észrevétel a színeknek bármiféle idő- vagy térbeli egymásutánját feltételezné és itt már közelről illette őt az a kérdés, vajjon a térszemlélet ezen transcendentális formája szükségképen maga után vonja-e azt a feltevést, hogy határozott térbeli észrevételek mellett vagy után másféle határozott feltevésnek kell-e föllépnie; vagy más szavakkal, hogy nem jár-e ezzel együtt bizonyos axiomák felvétele is. Ama törekvésében, hogy külön válaszsza a geometriában a fogalomfejlődést a tapasztalat eredményeitől, melyek látszólag a gondolkodás követelményeiként lépnek fel, az Euklides-féle geometria összes bizonyításainak alapját a térbeli idomok congruentiájának a bebizonyításában leli meg és ezzel postulatum gyanánt azt a képzetet, hogy ezen alakzatok anélkül, hogy alakjuk és méreteik megváltoznának, egymás irányában eltolhatók, és így szükségképen azon kérdéssel kerül szembe, vajjon a szabad mozoghatóság felvétele, melyet legzsengébb ifjuságunktól kezdve tapasztaltunk, nem rejt-e magában valamilyen, logikailag nem igazolt feltevést, amint ez a kérdésbe való mélyebb behatolása közben mind nagyobb bizonyossággal kiderül.

Vizsgálódásait azzal kezdi Helmholtz, hogy vázlatot készít magának arról a geometriáról, amelyet csak két dimensiót ismerő értelemmel biró lények alkothatnának; olyan lények, melyek valamilyen szilárd test felületén élve, semminemű képességgel nem birnának arra, hogy ezen a felületen kívül bármit is észrevehetnének; itt abból a feltevésből indúl ki, hogy mi, mint három dimensiójú térnek lakói képesek vagyunk magunknak szemlélhetővé tenni azt, hogy milyen mindenféle módon alakíthatnák ki a felületlakó lények az ő térbeli képzeteiket és megrajzolhatjuk magunknak érzéki észrevételeiket is, míg ellenben több mint három kiter-

jedésű terekről szemléletünk nincsen, minthogy érzéki észrevevésünk összes eszközei csakis a három dimensiójú térre vonatkoznak. Mi lesz a mi geometriánk amaz axiomáiból, hogy két pont között csakis egy legrövidebb: az *egyenes* vonal lehetséges; hogy három, nem egyenesben fekvő ponton keresztül oly felület fektethető, melynek bármelyik két pontját összekötő egyenes egészen bele esik a felületbe, mely felület síknak neveztetik; hogy végül két egyenes, ha egyazon síkban van és soha sem metszi egymást, párhuzamosnak vétetik s hogy az egyenesen kívül fekvő ponton keresztül az egyeneshez csak egy párhuzamos húzható; és mivé lesznek mindazok az axiomák, melyek a geometriai alakzatok folytonosságára stb. vonatkoznak?

Ama felületlakó lények általában szintén húzhatnak két pont között legrövidebb vonalakat, melyek azonban nem lennének szükségképen egyenesek; Helmholtz *legrövidebb vonalak*nak nevezi őket. De már a legegyszerűbb esetben, t. i. a gömbfelület esetében két-két pólus között számtalan legrövidebb vonal lenne huzható, párhuzamos legrövidebb egyenesek pedig egyáltalában nem lennének szerkeszthetők és a háromszög szögeinek összege mindig külömböznék két derékszögtől. Azok a lények a tért szintén határtalannak, de véges kiterjedésünek találnák és geometriájuk felépítésénél más geometriai axiomáik lennének, mint nekünk, téralakzataikat azonban eltolhatnák a gömbön, anélkül, hogy a méreteik megváltoznának. Minden más test felületén azonban ez a tulajdonság is általában veszendőbe megy, minthogy az olyanféle eltolódás csakis azokon a felületeken lehetséges, amelyek minden pontján a görbület állandóan ugyanaz. Ezek közül az állandó positiv görbületűek hajlítás által, de nyújtás és szakítás nélkül gömbfölületre lefejthetők és sphærikus felületeknek neveztetnek, az állandó negativ görbületűek pedig pseudosphærikusoknak. Ez utóbbi fajtájú görbék analytikai vizsgálatából kiderül, hogy a legrövidebb egyenesek végtelenül meghosszabbíthatók, a nélkül, hogy önmagukba visszafutnának, mint a gömbön és hogy két pont között, épen úgy mint a síkon, csak egy legrövidebb egyenes lehetséges; a párhuzamosak axiomája azonban nem érvényes, minthogy a legrövidebb egyenesen kívül eső ponton keresztül végtelen sok olyan vonal húzható, mely végtelenig meghosszabbítva az előbbit nem metszi és így a fent idézett három axioma szükséges és elegendő, hogy az a felület, a melyre az Euklides-féle geometria vonatkozik, ellentétben minden más két dimensiójú téralakzattal, síknak jellemeztessék.

Lépjünk most a három dimensiójú térbe és hasonlítsuk össze ezt, mint olyan sokaságok tartományát, a melyben minden egyes pont helyzete három méréssel határozható meg, másféle, szintén három kiterjedésű sokaságokkal — a mire példa gyanánt a színek rendszerének térbeli ábrá-

zolása hozható fel — hogy megvizsgáljuk, vajjon megilletik-e még különös ellemző tulajdonságok is a mi terünket?

Tényleg kiderül, hogy bizonyos követelmények még benfoglaltatnak, melyeket a változatlan alakú merev testek teljesen szabad, minden helyre való eltolhatósága és a görbület különös mértéke föltételez. Ez t. i. a tényleg szóban levő térre zérusnak veendő — épen úgy mint az összes felületek közül csupán a síkra és reája lefejthető felületekre nézve zérus értékű — hogy a legrövidebb vonal egyértékűségének és a párhuzamosak Euklides-féle axiomáit kielégíthesse. Ha ugyanis a görbület mértéke a zérustól különböznék, a nagy területű háromszögek szögösszege más volna, mint a kicsinyeké; ámde a geometriai és astronomiai mérések eredménye, mely a háromszög szögeinek összegéül csak közelítőleg, de sohasem egészen pontosan adhat két derékszöget, arra jogosít, hogy terünk görbületének mértékét igen kicsinek tételezzük fel. Azt, hogy a valóságban tényleg elenyésző, nem birjuk bebizonyítani: ez axioma marad.

Helmholtz azonban tovább megy; megmutatja, hogy a sphærikus, a pseudosphærikus világ szemléletét, fogalmilag az imént jellemzett felületek analogiája szerint kifejtve, minden tekintetben lefesthetjük magunknak; hogy tehát a mi geometriánk axiomái egyáltalában nem gyökerezhetnek a mi szemlélőképességünk adott formájában, sőt leképelések szemléltetése révén plausibilissé teszi, hogy — szemünket megfelelő szemüveggel felfegyverezve — a pseudosphærikus világ nem is tűnnék fel előttünk nagyon is idegenszerűnek és hogy csakis az első időben lennénk a messze fekvő tárgyak nagyságának és távolságának lemérésénél csalódásoknak alávetve.

Ezek a vizsgálatok Helmholtznak 1868-ban Heidelbergben tartott előadásaiban bennfoglaltattak és 20 évvel később »Kürzeste Linien im Farbensystem« című dolgozatában ismét visszatér az ő saját, valamint Riemann eredményeire, melyek szerint a mi terünk különös esetének összes tulajdonságai abból vezethetők le, hogy egy merev test két szomszédos pontjának távolsága a coordinátáknak hozzátartozó növekedésével kifejezhető és hogy ekként a merev test két pontjának egymástól való távolsága annak a követelménynek van alávetve, hogy két végpontjának fekvésével tökéletesen megadva legyen s a test bármilyen eltolása és elfordítása közben ugyanaz maradjon. Kiindulva abból, hogy minden külön szín három kellőleg megválasztott alapszín megfelelően lemért mennyiségeinek egyesítése révén előállítható, mely színek a coordinátákat helyettesítik, a két közelálló szín megkülönböztethetőségének fokában két térbeli pont egymástól való távolságának megfelelő mennyiséget lát, és egy analytikailag igen egyszerűen szerkesztett kifejezést állít fel, melyről azt reményli, hogy a színérzetek terén ugyanarra a szerepre jut, mint a minő a vonalelem hosszának a formulájáé a geometriában. Ez a kifejezés az élesség fokát

engedi felismerni az olyan két szomszédos szín megkülömböztetésében, mely egyidejüleg mind a három alapszín mennyiségeiben külömböző, melyek tehát a világosság és qualitás tekintetében is külömböznek ; és egészen a térbeli legrövidebb vonalak analógiája szerint két adott, külömböző qualitású es quantitású határszín közé eső *legrövidebb szinsorozat* gyanánt az átmeneti színek azon sorait definiálja, melyekre nézve az észrevehető külömbségek összege minimum. A színérzetek világának ilyen felfogása «Die erweiterte Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem» czimü dolgozatában oda vezeti, hogy ezt a törvényt, mely állandónak vevén a fény keverékét, csakis a fényerősség változását veszi tekintetbe, több mint egyméretü sokaságokra is kiterjeszti és a világosság változása mellett a színezet és a telitettség még megkülömböztethető fokozatainak nagyságát is számba veszi. Végre még egyik legutolsó dolgozatában («Ueber den Ursprung der richtigen Deutung unserer Sinneseindrücke») ismét visszatérvén a térszemlélet kérdésére, igen szellemes és jelentős philosophiai elmélkedésbe bocsátkozik.

Valamely test stereometriai formájának elképzelése előtte az érzéki szemléleti képek egész nagy sorából összetett fogalomnak szerepét játszsza, melyet egész függetlenül a geometriai definitiótól csupán csak annak a törvénynek eleven elképzelése tart ébren, a mely szerint a test perspectivikus képei egymásután következnek ; és ebből a nézetből kiindulólag emlékezetünk öntudatlan működésében mindazon fogalomszövődéseknek indító okát látja, melyek eredményei a tudatos gondolkodáséival lényegileg megegyeznek. De akkor az inductio szerinte nem is más, mint az a várakozás, hogy a kezdődésében megfigyelt jelenség eddigi észleleteinknek megfelelő módon fog tovább lefolyni, a hamis inductiók pedig azonosak az érzékcsolódásainkkal; így aztán a mi tudásunk csakis a tárgy ismeretét foglalja szavakba, a melyről velünk született szervezetünknél fogva emlékezetünk öntudatlan működésén alapuló inductio segítségével szemléleti képet nyertünk.

Csak sok idő múlva a geometria axiomáira vonatkozó dolgozatainak közlése után, mindig újra meg újra megragadva attól a ténytől, hogy a mathematika és mechanika szinte végtelen terjedelmök mellett oly kevés és olyannyira szembeszökő axiomára szorúlnak, 1887-ben E. Zellerhez — 50 éves doctori jubileuma alkalmából — intézett iratában a *számlálás és mérés** ismeretelméleti vizsgálatába bocsátkozik. És itt ismét szembeszáll Kant nézetével, mely szerint az arithmetika axiomái a priori adott tételek lennének, melyek az időnek transcendentális szemléletét közelebbről meg-

* Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet. *Wiss. Abh.* III. 356. l.

határozzák, ugyanoly értelemben mint a geometria axiomái a térét és fölveti maga előtt a kérdést, hogy mi voltaképen a jelentősége és jogosultsága az elvont számokkal való számolásnak, s mi adja a lehetőséget arra, hogy ezek physikai mennyiségekre is alkalmaztassanak. Miután a számlálást abból származtatta le, hogy képesek vagyunk a sorrendet, a melyben tudatunk actusai az időben egymásután bekövetkeztek, emlékezetünkben megtartani, a tiszta számokról szóló tan előtte egyszerűen psychologiai tényeken épülő módszerré válik; módszerré egy határtalan kiterjedésű és végnélkül finomítható jelrendszernek, ezen jeleknek különféle, de mindenkor ugyanazon végeredményhez vezető kapcsolási módjainak következetes alkalmazására. Miután ezen nézetéből a positiv egész számok törvényszerű sorozatának definitióját kifejtette és azt, hogy sorrendjük csak egyféleképen értelmezhető, megállapította a tiszta számok összeadásának fogalmát. Egyúttal megmutatja, hogy két számnak egy harmadikkal való egyenlőségére vonatkozó arithmetikai axioma, az összeadás associatio-törvénye s a commutativ elv csak úgy bizonyítható be, ha az eredmények külső, számlálható tárgyakon tényleg elvégzett számlálásból eredőkkel megegyeznek. Hogy azonban a tárgyak számlálhatók legyenek, bizonyos feltételeknek teljesítve kell lenniök; léteznek-e ilyen feltételek, vagy nem, azt csak a tapasztalat döntheti el. Ha már most azon tárgyak, melyek bizonyos tekintetben egymással egyenlők és számláltatnak, a számlálás *egység*eül vétetnek; ha továbbá azok *számossága* (Anzahl) megnevezett szám; az egységek különös faja pedig, melyeket összefoglal, a szám megnevezése: akkor egynevezetű számok két csoportja közötti egyenlőségnek fogalmát ugyanaz a számosság fejezi ki. Ha már most oly tárgyakat, vagy tárgyak attributumait, melyek hozzájuk hasonlókkal egybevetve a fölmerülő különbség *nagyobb*, *egyenlő* vagy *kisebb* szavakkal kifejezhető — mire nézve csakis a hasonlókkal való találkozáskor vagy együttműködéskor tapasztalható physikai viselkedés bizonyos részleteinek empirikus ismerete dönthet — *mennyiségek*nek nevezünk, és ha ezt a mennyiséget *megnevezett szám*mal kifejezhetjük, úgy ezt a számot a mennyiség *értéke*nek mondjuk, s az eljárást, a melylyel ezt a megnevezett számot megtaláltuk, *mérés*nek. Így mérjük pl. az *erőt* az erőt kifejtő rendszer tömegével és mozgásával; vagy pedig a dynamikai mérés esetében annak a rendszernek a tömegével és mozgásaival, a melyre hat; vagy végül az erő statikai mérésekor azáltal, hogy az erőt ismert erőkkel egyensúlyba hozzuk.

Most már csak arra a kérdésre kell megfelelni, mikor fejezhetünk ki mennyiségeket megnevezett számokkal, és mit érünk el vele a tényleges tudás terén? És ebből a czélból a physikára nézve olyannyira érdekes és fontos, a physikai egyenlőségre s a physikai kapcsolatok commutativ- és associativ törvényére vonatkozó megfontolásokba bocsátkozik, mikőzben

az összeadás egynemű mennyiségek között végzendő műveletként van definiálva, olyannak, melynek eredménye az egyes elemeknek egymás között, vagy pedig más egynemű, egyenlő nagyságú mennyiséggel való felcserélése által nem változik. Az irrationális viszonylatok bevezetésénél HELMHOLTZ a physikus álláspontjára helyezkedik, melyhez mint később látni fogjuk, a mechanika és a mathematikai physika elveinek fejtegetése közben mindig ragaszkodik, kijelentvén, hogy a geometriában és a physikában még nem akadtunk olyan nem folytonos függvényekre, melyek kiszámítására azoknak az eléggé szűk határoknak az ismerete, melyek közé az irrationalis értékek esnek, nem lenne elegendő; annyi bizonyos, hogy a mathematikus másnemű függvényeket is ismer, és BOLTZMANN legújabb vizsgálatai arra látszanak utalni, hogy az ilyen analytikai alakzatok még a physikában is létezhetnek.

Midőn most feladatunknak jóval nehezebb részére térünk át, t. i. HELMHOLTZnak az analytikai mechanika terén szerzett érdemeinek elősorolására, hogy feltüntessük, miként alakította át néhány legfényesebb dolgozatával ennek principiumait, szigorúbban kell majd azokat az útakat követnünk, melyek őt bámulatos mathematikai-physikai vizsgálatainak és messze kiható physikai felfedezéseinek fényes során keresztül — melyeket hydrodynamikai, aerodynamikai és elektromossági dolgozatok nagy csoportjaiba fogunk osztályozni — végül a mechanika axiomáinak vizsgálatához elvezették.

Mindenekelőtt itéletet kivánt magának alkotni sok akkori physiologusnak a mechanikai természettudományokkal homlokegyenest ellenkező ama feltevéséről, mely szerint az ú. n. életerő természeti erőket végnélkül létrehozhat. Hogy ezt tehesse, abból a mechanikai törvényekkel beigazolt feltevésből indulva ki, hogy a mozdító erőnek megmért mennyisége bármilyen bonyolult szerkezet esetében is mindenkor csak ugyanazt a mozgásmennyiséget hozhatja létre, «Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen» című dolgozatában az életfolyamatok elméleti felfogására nézve olyannyira fontos kérdéssel: az állati hő eredetével kezd foglalkozni. Ezen vizsgálat, valamint ezzel majdnem egyidejűleg az izommunka közben fejlődő hőre vonatkozó búvárkodásai («Wärmeentwicklung bei der Muskelaction») az erő megmaradásának nagy törvényét erősítették meg előtte, a mint azt a berlini physikai társulat előtt egy 1847-ben tartott előadásban ki is fejtette. Bizonyára érdekes momentuma volt a tudomány történetének, a midőn mintegy 30 évvel ezelőtt századunk egyik legkitűnőbb physikusa, KIRCHHOFF, ugyanerről a helyről * szép, világos beszédében («Ueber das Ziel der Naturwissenschaften») HELMHOLTZ jelenlétében ennek

* A heidelbergi egyetem rectori székéből.

a törvénynek felismerését a legfontosabb vivmánynak mondotta, melyet ez az évszázad a természettudományok terén egyáltalában felmutathat; és még ma, 50 év után is mondja HERTZ «Die Principien der Mechanik» című hátrahagyott munkájában, hogy a physika évszázadunk végén egészen új gondolkodásmódhoz hajlik, és HELMHOLTZnak a physikai energia összegének állandóságára vonatkozó nagy felfedezésének kényszerítő hatása alatt nagy előszeretettel végső czéljául azt kezdi megjelölni, hogy a jelenségeket az energia átalakulásainak törvényeire visszavezesse.

Hogy HELMHOLTZ eme nagy felfedezésének, valamint a mechanika alapelveire vonatkozó későbbi alapvető dolgozatainak megértését előmozdítsam, az elméleti mechanikának fejlődésére kell rövid visszapillantást vetnem.

Az emeltyű, a csiga és a lejtő törvényeire vonatkozó első vizsgálatokból csakhamar kifejlődtek azok az általános nézetek, melyek az egyensúly tanának alapjait megvetették. És megállapíttatván az a definitio, hogy a *munka* az erő nagyságának és az anyagi pontnak az erő irányában mért végtelen kicsi eltolódásából alkotott szorzat, az egész statika alapja gyanánt a *virtuális sebességek elve* tűnt fel. Ezen elv szerint valamely rendszer akkor, és csakis akkor van egyensúlyi állapotban, ha minden *virtuális*, vagyis pontjainak kapcsolatával összeférő végtelen kicsi elmozdulása közben az egész rendszer munkája zérussal egyenlő. Miután GALILEI a *tömegek tehetetlenségét* felismerte és NEWTON a *távolbaható erők* fogalmát bevezette, a mechanika a három híres NEWTON-féle törvény alapján fejlődött. E törvények tudvalevőleg a következők: minden test nyugvó vagy pedig egyenes vonalú egyenletes mozgásának állapotában mindaddig megmarad, míg valami külső erő ezt az állapotát meg nem változtatja; az anyagi pont sebességváltozása a pontra ható erő irányában történik, s a gyorsulás a ható erővel egyenesen, a tömeggel fordítva arányos; végül: két testnek egymásra való hatása mindenkor egyenlő, és ellenkező irányú. Ezen az úton — a rendszer anyagi pontjai között szilárd kapcsolatot tételezve fel — legalább a NEWTON-féle erőkre vonatkozólag az egész dynamikában uralkodó d'ALEMBERT-féle elvhez jutottak. Nyert erőnek azt nevezvén, melyet a rendszer minden egyes pontjára ható erőhöz hozzá kellene adni, hogy elszigetelt állapotban éppen úgy mozogjon, mint ahogy tényleg mozog, úgy d'ALEMBERT elve azt mondja, hogy az összes nyert erők egymást egyensúlyban tartják. És ha meg vannak adva a coordináták analytikailag kifejezhető egyenleteivel a megszorítások, a melyeknek a rendszer pontjainak mozgása alá van vetve, valamint a reájuk ható erők, nemkülömben valamely pillanatra minden egyes pontnak a helyzete és sebessége is: akkor ez az elv módot nyújt a mathematikusnak arra, hogy a pontok helyét bármely időre kiszámítsa.

A mechanikának ezen irányban való továbbfejlődése megkövetelné

tehát a természet összes erőinek, vagyis az anyag minden tulajdonságainak fürkészését, mert hiszen az anyagnak előttünk más ismertető jelei nincsenek, mint azok az erők, melyekkel részeik egymásra hatnak. Felismertetvén az egyensúly és a mozgás tanának ezen két alapelve, az volt a törekvés, hogy a mozgás általános törvényei és tulajdonságai földeríttessenek. Egyike a legfontosabb és következményeiben legtermékenyebb felfedezéseknek volt *az eleven erő megmaradásának* levezetése, melynek érdemében Huygens, továbbá a két Bernoulli (János és Dávid) osztoznak. Ha ugyanis egy anyagi pont tömegének sebessége négyzetével való félszorzatát a pont *eleven erejének* nevezzük, és tetszőleges számú pontból álló anyagi rendszer eleven erejének, vagy pedig a *rendszer kinetikai energiájának* az egyes pontok eleven erejének összegét, megjegyezvén, hogy az egyes pontok szabad mozgásukban korlátozva lehetnek: úgy a d'Alembert-féle elvnek alávetett rendszer eleven erejének növekedése a közben, mialatt egy helyzetből egy másikba átmegy, pontosan egyenlő az erőknek e közben elvégzett munkájával. Ha már most a mozgásközben végzett munka csupán csak a kezdet- és véghelyzettől függ, ebből az következik, hogy ha valamely rendszer mozgása közben eredeti helyzetébe visszatér, kinetikai energiájának értéke is ugyanaz lesz. Ezt a törvényt a kinetikai energia megtartása tételének nevezik s a rendszereket, a melyekre érvényes, conservativ rendszereknek. Ezen tétel egyszerű átalakítása messzemenő következtetésekre vezet; t. i. az a tény, hogy a test egy helyzetből egy másikba való mozgása közben meghatározott mennyiségű munkát végez, semmi egyebet nem fejez ki, mint azt, hogy munkaképessége vagy pedig *potentialis energiája* a kezdeti helyzetében a végzett munkával nagyobb, mint a véghelyzetbeli, úgy hogy a conservativ rendszerekre fent kimondott tétel (a kinetikai energia tétele) az *energia állandóságának törvényébe* megy át, melynek értelmében a conservativ rendszer mozgása közben a *potentiális és a kinetikai energiának összege állandó*, ámde csak azon lényeges kikötés mellett, hogy a mozgásközben végzett munka egészen független a leírt úttól és csupán csak a kezdet- és véghelyzettől függ.

A Newton-féle erőkre és rendszerekre, a melyekre nézve ez a tétel érvényes, a törvény érvényessége nyilván nem mond ki egyebet, mint a perpetuum mobile lehetetlenségét, vagyis azt, hogy a természeti testek semmiféle combinatiójával sem lehetséges mozgató erőt állandóan semmiből teremteni azáltal, hogy az egyik úton nyert munkával szemben egy másik úton, melyen a szerkezetet eredeti állapotába visszavezetnők, végnélküli mechanikai erőt tudnánk létrehozni. Igaz ugyan, hogy ennek a lehetetlenségét — s ezzel együtt az energia állandóságának törvényét is — az akkor ismert erőkre nézve már rég belátták volt, ámde úgy tetszett,

mintha a természetnek nem összes erői lennének ilyen tulajdonságuak s így a mondott törvénynek nem is lennének alávetve. Ha egy rendszer egy pályán először surlódással, s azután surlódás nélkül mozog, úgy az előbbi esetben a kinetikai energia a sebesség csökkenése folytán kisebb lesz, miért is ha az energia állandóságának törvényét egész általánosságban fentartani kívánjuk, a potentiális energia fogalmát, mely eddig a helyzeti energia volt, az energia azon fajára is kell kiterjesztenünk, mely hő vagy más természeti erők alakjában mutatkozik s ennélfogva az itt például felhozott esetben a kinetikai energiában szenvedett veszteséget a surlódás révén keletkezett egyenértékű hőmennyiséggel kell helyettesítenünk. Így R. Mayer, kiindúlva abból a feltevésből, hogy erőt teremteni vagy megsemmisíteni az emberi cselekvésnek és gondolkodásnak nem áll hatalmában, a hő és a mechanikai munka æquivalentiáját a természeti tünemények alaptörvényének mondta. Helmholtz a nélkül, hogy Mayer vizsgálatairól tudomása lett volna, elejétől fogva az összes természeti erőket elmélkedései körébe vonta és érvényesnek véve az energia állandóságának törvényét — melynek helyességét különben kisérletileg is vizsgálhatta és a physikai tünemények hosszú során kimutathatta — a perpetuum mobile lehetetlenségére következtetett még azokban az esetekben is, a mikor hő, fény, elektromosság és chemiai folyamatok is közreműködnek hatók gyanánt. Vagy pedig következtetett egy másik, ezzel teljesen æquivalens tételre, mely szerint bármiféle természeti erők munkája, mialatt támadáspontjaik bizonyos kezdeti állapotból egy bizonyos végállapotba mennek át, csakis ettől a két állapottól függ, nem pedig az átmenet módjától. És midőn ebből még arra következtetett, hogy minden zárt rendszerben az energia növekedésének egyenlő energia fogyasztásnak kell megfelelnie, ahhoz a nagy, egyetemes érvényű igazsághoz jutott, hogy a világ munkaképessége állandó.

Az ő bámulatos szerénységével kiemeli, hogy szándéka nem volt más, mint lehetőleg tökéletesen kiemelni a physikusok előtt az energia állandóságát kifejező törvények elméleti, gyakorlati és heuristikus fontosságát. Véleménye szerint a legközelebbi időben a physikának alkalmasint az lesz a legfőbb feladata, hogy ennek a törvénynek teljes beigazolására törekedjék. És hogy újra meg újra utaljunk Helmholtz természetphilosophiai nézeteire, emeljük ki azt, hogy ellentétben a metaphysikai speculatio hiveivel, a kik az erő megmaradásának törvényét a prioristikusnak törekedtek feltüntetni, azt állítja, hogy ezt a törvényt, éppen úgy mint a való világ jelenségeire vonatkozó ösmereteinket, inductio révén találtuk meg; és ez az inductio nem volt más, mint hogy számos meddő kisérlet után végre is beláttuk, hogy perpetuum mobilet szerkeszteni nem birunk. Azonban ez a nagy törvény, mely az átalakulásoknál szükségképen fenforgó quantitativ viszonyokat szabályozza, eldöntetlenül hagyta azt, vajjon a munka

határtalanul alakítható-e át hőbeli energiává és megfordítva; és nem döntötte el azt, hogy mint áll a dolog a fény, az elektromosság és más természeti erők esetében. Mind oly kérdések, melyekre a feleletet később az energia fogalomnak a mathematikai physikában előtérbe lépő mély és egyetemes jelentőségénél fogva kell majd megadnia.

Miután HELMHOLTZ a mechanika ezen alapelvét physikai szempontból igen sokfelől átvizsgálta, physiologiai vizsgálatok mellett, miként már a «Theorie der Akustik»-re vonatkozó jelentéseiben is említi, igen általános mechanikai problémákhoz, nevezetesen hydrodynamikai vizsgálatokhoz fordul és «Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen» című híres dolgozatában a folyadékok mozgására vonatkozólag egy egészen új felfogásnak veti meg az alapjait, mely később W. THOMSON-nak az örvénylő mozgásokra vonatkozó elméletében, valamint más physikusok dolgozataiban a természettudományok legkülömbözőbb ágaiban termékenynek bizonyult. Azon feltevés mellett, hogy a nyomás az *ideális*, vagyis surlódásmentes folyadékban minden irányban egyenletesen terjed, már EULER-nek és LAGRANGE-nak is sikerült a folyadék sűrűsége és a benne levő nyomás, az idő, egy részecskéjének coordinatái, és egyrészt annak sebességi componensei, másrészt pedig ugyanezen részecskének a mozgás kezdetekor elfoglalt helyzete között analytikai összefüggéseket felállítaniok és még az u. n. continuitási egyenletre következtetniök, mely azt mondja ki, hogy a folyadék egy bizonyos anyagi részecskéjének a tömege az idővel nem változik, hogy tehát a folyadék felületének mindenkor ugyanazon részecskékből összetettnek kell lennie. Mindezek az egyenletek az idealis folyadékok mozgásában a fentebb említett d'ALEMBERT-féle elvnek analogonját adják és a változó mennyiségek meghatározását tiszta mathematikai problémára vezetik vissza, melynek megoldása — KIRCHHOFF szavai szerint kifejezve — a mozgást leírja. Ez a feladat egyes esetekre nézve tényleg megoldatott, a melyekben t. i. minden egyes folyadékrészecske sebességi componensei egy függvénynek az illető irány szerint vett első differentiálquotienseivel egyenlőkké tehetők, mely függvényt HELMHOLTZ *sebességi potentiál*nak nevez, s mely a continuitási egyenlet révén az összenyomhatatlan folyadékokra nézve ugyanolyan tulajdonságokkal bír, mint a gravitáló tömegek potentiálja a tömegen kívül fekvő pontokban. Csakhogy az ilyen sebességi potential nem mindig létezik, és azért HELMHOLTZ a folyadékbeli mozgások igen nehéz problémáját egész általánosságban ragadta meg.

Mindenekelőtt felismeri, hogy a változás, melyet a végtelen kicsi folyadéktérfogat végtelen kicsi időben szenved, három különböző mozgásból tevődik össze: a részecske térbeli eltolódásából, annak három egymásra merőleges iránybeli kiterjedéséből vagy összehuzódásából, és végül egy

időleges tengely körül való elfordulásból; megjegyzendő azonban, hogy az esetre, ha sebességi potential létezik, forgó mozgások ki vannak zárva. Azokat a mozgásokat, melyeknél sebességi potential nem fordul elő, HELMHOLTZ *örvénylő mozgás*oknak nevezi. Arra törekedvén, hogy a forgássebességnek mozgáskőzbeni változását meghatározza, azt találta, hogy azok a folyadékrészecskék, melyeknek forgó mozgásuk még nem volt, azontúl sem tesznek szert forgó mozgásokra. Ha *örvénylő vonal*nak az a vonal neveztetik, melynek iránya mindenütt az ott levő részecske pillanatnyi forgástengelyének irányával egybeesik, az a nevezetes tétel adódik ki, hogy minden egyes örvénylő vonal állandóan ugyanazon részecskékből tevődik össze és a részecskékkel együtt a folyadékban tovább uszik és hogy egy adott folyadékrészecskében az eredő forgássebesség nagysága ugyanolyan arányban változik, mint a részecske távolsága az örvénylő vonalbeli szomszédjaitól. Ha továbbá a folyadéknak örvényvonalakból álló végtelen vékony csőszerű felületével bezárt része *örvényfonál*nak neveztetik, úgy a forgássebességből s a fonál keresztmetszetéből alkotott szorzat a fonál egész hosszán keresztül, még annak továbbmozgása közben is állandó marad, úgy, hogy az örvényfonálnak az egész folyadékban sehol sem szabad megszűnnie, hanem vagy gyűrűszerűen önmagába visszatér a folyadékon belül, vagy pedig annak a határáig terjed. És midőn HELMHOLTZ még annak a feladatnak a megoldásába fogott, hogy az örvénylés sebességéből a mozgássebességeket kiszámítsa, ezekkel a mathematikai szempontból is érdekes vizsgálatokkal a mozgási alakok sorának legalább az elképzelését tette lehetővé, bár a problémák analytikai kifejtése csakis a legegyszerűbb esetekre volt lehetséges. A környezetre és a folyadék természetére vonatkozó némely föltevések mellett az örvényfonalak és örvénylő gyűrűk állandóan ugyanazt a folyadéktömeget tartalmazzák, és elpusztíthatatlanok; két gyűrű, melyeknek közös a tengelyök és forgásuk iránya ugyanaz, egy és ugyanazon irányban haladnak tovább, és pedig úgy, hogy az elül haladó tágul és lassabban halad, a nyomában haladó pedig összehuzódik és gyorsabban halad előre; ha a terjedés-sebességek bizonyos határok közé esnek, megesik végre az, hogy a második gyűrű az elsőt utóléri, átbujik rajta, mire aztán a két gyűrű szerepet cserél. De ne téveszszük szem elől, hogy az örvénylő mozgások ezen jelensége a valóságban a surlódás hatása alatt csakhamar másképp alakul.

Az örvénylő mozgások törvényszerűsége és relativ állandósága W. THOMSON-t arra az érdekes hypothesisre vezette, hogy az atomoknak örvénylő gyűrűk alakját tulajdonította. Ennél az a törekvés vezette, hogy az anyag folytonosságának elméletét az atómelmélettel egy nézetben egyesítse. De a mi még fontosabbá vált, arra is indította, hogy az örvénylő mozgások elméletének eredményeit a szilárd testeknek folyadékokban

való mozgásával kapcsolatba hozza s ezzel együtt előkészítse azokat a fontos vizsgálatokat is, melyek czélja a távolba ható erőket a physikából kiküszöbölni s a melyekre HELMHOLTZ későbbi dolgozatainál még visszatérek.

Azonban HELMHOLTZ eddig tett hydrodynamikai vizsgálatai csakhamar hiányosaknak bizonyultak; a physiologiai optikáról írt, annyira híressé vált kézikönyvének kidolgozása közben arra a meggyőződésre jutott, hogy ha a cseppfolyós testek mozgására vonatkozólag az elmélet és a kisérlet eredményei között csak némileg kielégítő megegyezést akar elérni, a folyadékrészeknek egymáshoz, valamint az edény falaihoz való surlódását figyelmen kívül hagyni nem szabad. Amint mások, BESSEL kisérleteitől indíttatva, már régebben foglalkoztak a folyadékban lengő ingának (fonálon függő gömbnek) mozgásával, ő is — szintén a BESSEL-féle kisérletekből kiindulva — surlódásnak alávetett cseppfolyós tömeg belsejében végbemenő mozgásokra vonatkozó, akkor már ismeretes mozgási egyenletek segítségével egy olyan gömbnek a mozgását kezdte tanulmányozni, mely surlódó folyadékkal van megtöltve és egyik átmérője körül forgó lengéseket végez. Sikerült is neki a problémát mathematikailag kifejtenie, a folyadék hullámzó mozgását a surlódás, számbavételével jellemeznie, és ez úton a surlódási együtthatók kisérleti úton nyert értékeit elméleti számítással ellenőriznie.

Még két, az elmélet s a gyakorlat szempontjából egyaránt fontos tételt állított fel. Az első arra az esetre vonatkozik, a midőn surlódásnak alávetett folyadék állandó áramlás esetében, több hengeres csövön keresztül halad s azt mondja, hogy a folyadék az áram egyes ágai között úgy oszlik el, hogy a surlódástól okozott eleven erőbeli veszteség minimum legyen. A második tétel pedig azt mondja, hogy lassú állandó áramlásban levő folyadékban uszó testen egyensúlykor a surlódás a legkisebb értéket veszi fel. Ezt a két tételt felállítván s miután még az elektromos megosztás problémáira vonatkozó általános transformatio módszere őt a mathematikailag olyannyira fontos leképelési problémákra vezette, az 1868-ban közzétett (Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen), rendkívül érdekes függvénytani dolgozatában mélyebben hatol be a folyadékok kiáramlásának és a szabad sugarak képződésének tanába és tárgyalja az örvénylések mozgásának és keletkezésének erre vonatkozólag igen jellemző discontinuitási jelenségeit. HELMHOLTZ abból a megfontolásból indul ki, hogy maga a probléma, mely a szabad folyadéksugarak keletkezésének leírását követeli, olyan természetű, hogy a disconuitást egyenesen feltételezi s ennélfogva kell, hogy a hydrodynamikai alapegyenletek a bennök előforduló mennyiségek disconuitásának lehetőségét megengedjék. Tényleg kiderült, hogy valamely mozgó összenyomhatatlan folyadékban a nyomás, melynek csökkenése a mozgó folyadékrészecskék eleven erejével egyene-

sen arányos, mihelyt ez utóbbi bizonyos nagyságot meghalad, negativvá lesz és a folyadéknak el kell szakadnia; és bebizonyult, hogy minden geometriailag tökéletesen éles ék, a mely mellett a folyadék elfolyik, még a folyadéknak legmérsékeltebb sebessége esetében is elszakítja a folyadékot és válaszfelületet létesít és hogy legömbölyített élű éken ez csak nagyobb sebesség esetében fog bekövetkezni. Ezután a függvénytan módszereinek segítségével a szabad sugár alakjának igen nehéz problémája kerül tárgyalás alá, azzal a feltevéssel, hogy a surlódás elhanyagoltatik, hogy külső erők nem hatnak, hogy a mozgás állandó s a sebességi potential csupán csak két coordinatától függ és az edény s a kifolyató nyilás még egész különleges megszorításoknak vannak alávetve. Végül még azt mutatja ki HELMHOLTZ, hogy az örvénylésekre előbb nyert eredmények még a sugárbeli folyadékrészecskék saját mozgásának leírásában is sikerrel alkalmazhatók.

Hydrodynamikai kutatásaival egy időben — már a kezdetén heidelbergi tartózkodásának — fejlődtek az ő akustikai és aërodynamikai vizsgálatai. A combinatio-hangokról,* továbbá a hangzók hangszínezetéről** szóló dolgozataiban újra visszatér már néhány régebbi, kisebb dolgozatban is kifejtett, más physikusokéval is egyező nézetre, mely szerint minden hang — szabatosabban hangérzet — a melyet valamely rezgő testből kiinduló levegőrezgés ébreszt, több egyszerű hangérzetből tevődik össze; olyan hangérzetekből, melyeket a levegőnek egyszerű (ingaszerű) rezgő mozgása hoz létre, és ezt a hypothesist mathematikailag akként formulázza, hogy kiindulva minden időszakos mozgásnak, mint sinusmozgások összegének FOURIER-féle előállításából, valamely hangnak a magassága gyanánt a benne előforduló legmélyebb hang: az *alaphang* magasságát veszi, a többieket pedig *felhangok*nak nevezi. Tüzetesebb kisérleti vizsgálat arra az eredményre vezeti, hogy a zenei hangszínezet csupán csak a hangban előforduló felhangok számától és relativ erősségétől függ, de teljesen független a phasiskülömbségeiktől; hogy a hallásunkra ható hangtömegek egyszerű alkotó elemeikre felbonthatók s ezekből ismét összetehetők, és hogy a hangzók a hangszerekkel adható egyéb hangoktól csak annyiban külömböznek, hogy felhangjaik erőssége ezek rendszámától független, de függ az absolut magasságuktól. És itt ismét felismerhető az a törekvése, hogy az érzéki észrevevés minden esetében megállapítsa a lényeges külömbséget az érzetek és az észrevételek között, a mennyiben az érzetek csak testünk, illetőleg idegkészülékeink állapotaként jutnak tudomásunkra (mint pl. a felhangok), az észrevételek révén pedig képzeteket alkotunk

* Ueber Combinationstöne.

** Ueber die Klangfarbe der Vocale.

magunknak a külső tárgyakról, a minő pl. a partialis hangokból összetevődő hang.

Ámde az akustikának minden eddigi tárgyalása azt az igen általános hypothesist tette, hogy a levegőnek és más rugalmas testeknek rezgő mozgásai, melyeket több egyidejűleg ható hangforrás létesít, mindenkor pontosan egyenlők az egyes hangforrásoktól okozott mozgások összegével. Midőn Helmholtz felismerte, hogy ez a törvény egész szigorusággal csakis akkor érvényes, ha a rezgések végtelen kicsinyek, azaz, ha a sűrűségbeli különbségek az egész sűrűséghez képest elenyészők és éppen úgy a rezgő részecskék eltolódásai is elenyésző kicsinyek magukhoz a tömegekhez képest, megtalálta a *combinatio*-hangok magyarázatát. Ezek t. i. akkor jönnek létre, a mikor az említett törvény nem alkalmazható s egyúttal kimutatta, hogy a combinatio-hangok, függetlenül az emberi fültől, objective léteznek; és megkülömbözteti ezektől a combinatio-hangoktól, melyekben a rezgéseknek a külső térben vagy pedig a fül belsejében történő összegezódése zavart szenved, a *lüktetéseket*, a melyek esetében a mozgások a felhozott törvényt követik, de az *érzetek* összegeződése nem történik zavartalanul.

Csakhamar azonban mélyebben belebocsátkozik az akustika elméletébe és az analysis legfinomabb segédeszközeivel vizsgálja a levegőoszlopok mozgását,* és pedig hydrodynamikai vizsgálatainak megfelelő módon, a mennyiben felveti azt a kérdést, hogy mily módon viselkednek egy cső belsejében gerjesztett egyszerű hangnak megfelelő hanghullámok a szabad térbe való átmenetnél, hogy megállapíthassa azt a rezgésalakot, mely véglegesen létrejön, ha a rezgéseket gerjesztő ok állandóan tovább működik. Miután a potentialfüggvényre vonatkozó legfontosabb általános tételeit a hanghullámokról szóló tanra alkalmazhatókká tette, és a további vizsgálatok alapjául azt az érdekes tételt felállította, hogy ha levegővel telt tér egy pontjában hanghullámok gerjesztetnek, ezeknek sebességi potentiálja valamely más pontban ugyanakkora, mint a mekkora az elsőben lenne, ha ez utóbbiban ugyanolyan intenzitású hullámok ébresztetnének, a mivel együtt jár az is, hogy a phasis-különbség a két esetben ugyanaz: sikerült neki — némi megszorításnak vetvén alá a nyilás méreteit — a cső belsejében támasztott sík és a szabad térben szétterjedő félgömbalakú hullámok között bizonyos összefüggést levezetnie, és ezzel a cső nyilt végének a hatását a cső belsejében létrejövő síkhullámokra megvilágítania. A további vizsgálat a rezgési maximumok és minimumok helyeit s ezzel a legerősebb ráhangzású hangoknak tőle függő magasságát adják. Továbbá tárgyalja azt a nehéz kérdést, hogy milyen alakú csövekre lehetséges a nagy hul-

* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (1859).

lámhosszaságú hanghullámoknak nyilásbeli levegőmozgását jellemezni; egy későbbi dolgozatában megmutatta, hogy a számítás eredményei jobban egyeznek a kisérletekkel, ha még a levegő belső surlódása is figyelembe vétetik.

Akustikai vizsgálatainak mindezen eredményei, melyek közől előadásom czéljának megfelelőleg csak a mathematikailag kiválóan érdekeseket hozom fel, az ő híres «Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik» munkájában összefüggően vannak előadva. A műben nagy bősége van a zene történetére és lényegére vonatkozó fontos eredményeknek, melyek közől még csak azt az egy általános érdekűt kivánom kiemelni, hogy ő megmutatta, mi módon kell a zenében egész szabatos mathematikai úton a melódiát, mint a zene alapját különválasztani a harmoniától, mely csak a melódia erősítésére szolgál; és hogy annak a rég ismeretes ténynek, hogy harmonikus hatás csakis az oly hangokkal érhető el, melyek rezgésszámai egyszerű számok szerint viszonylanak egymáshoz, mathematikai magyarázatát is megtalálta, bebizonyitván, hogy az alaphangot kisérő partiális hangok a fülre kellemetlen hatást tesznek, ha az alaphangok rezgésszámainak a viszonya nem fejezhető ki kis számokkal.

Mielőtt Helmholtz-nak jóval későbbi keletű ærodynamikai dolgozatainak rövid megbeszélésébe bocsátkoznék, a mennyiben azok a mathematikus érdeklődését lekötik, egy 1873-ból eredő, a hydrodynamika és az ærodynamika határterületén mozgó dolgozatot* kivánok említeni, melyben a hydrodynamikai egyenleteket arra használja fel, hogy egy folyadékon és bizonyos nagyságú és sebességű készüléken nyert észleleti eredmények egy más folyadéknak geometriailag hasonló tömegére, továbbá más nagyságú és más sebességű készülékre átvitetnek. A cseppfolyós összenyomhatatlan folyadékokra nyert eredményeknek kiterjesztése a gázneműekre az érdekes alkalmazások egész sorára vezet; így Helmholtz többi között azt találja, hogy a madarak nagyságának határa van, ha az izmok abban az irányban tovább nem fejleszthetők, hogy ugyanazon tömeg mellett még több munkát végezhessenek, mint jelenleg és hogy ennélfogva a természet a nagy kondorral valószínűleg már elérte azt a határt, melyet egy olyan teremtmény nagysága elérhet, mely szárnyakon felemelkedni és hosszabb időn keresztül a levegőben magát fentartani képes, s így az embernek alig van kilátása arra, hogy még a legügyesebb, szárnyszerű mechanismussal, melyet saját izomerejével kell mozgatnia, saját sulyát fölemelhesse és hosszabb időn keresztül a magasban lebegve tartsa.

* Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem Luftballons zu lenken.

A fent említett összehasonlítási elvét a léggömbre és a hajóra alkalmazván, ahhoz az érdekes eredményhez jut, hogy ha a ballon mintegy másfélszer annyit nyom, mint a vele emelkedő, dolgozó emberek, a munkaerő és a súly viszonya ugyanaz volna, minőt a hadigőzösön találunk.

Csak jóval később, 1888—90-ben terjeszti ki Helmholtz a folyadékok mozgására vonatkozó vizsgálatait, a melyekben a belső surlodást is tekintetbe vette, a légköri légtömegek mozgására * és megmutatja, hogy állandó erők hatása alatt a levegő tömegében is képződhetnek discontinuitási felületek. Miután a problémának szigorú mathematikai tárgyalásából felismerte, hogy a föld felületén végbemenő surlódásnak a hatása magasabb légrétegekre egész jelentéktelen, hogy eleven erő voltaképen csakis a talajon történő surlódás és az örvénylő mozgásoknál előforduló válaszfelületeken semmisül meg; hogy továbbá hőkicserélődés csakis a földfelülettel érintkező határfelületen, valamint belső discontinuitási felületeken kívül csakis sugárzás és meleg levegőrészek tovavitele folytán mehet végbe, azt a kérdést veti fel maga előtt, vajjon honnét van az, hogy légkörünk keringése nem okoz az ismerteknél jóval hevesebb szeleket? Az okot abban találja, hogy az örvénylések, melyek discontinuitási felületeknek felgombolyodása folytán keletkeznek, a különbözőképen mozgó levegőrétegeket összekeverik, és az eredetileg különvált rétegeket belsejökben mindig számosabb és vékonyabb lapokban egymás körül csavarják; az így óriási módon megnövekedett válaszfelületen keresztül aztán a hőmérsékletök gyorsabban kiegyenlítődik, mozgásuk pedig a surlódás következtében csillapodik. Ámde a surlódás és a hővezetés hatásait jóval fokozottabb mértékben előidézik a légrétegekben előforduló egyensúlyboinlások és keveredések, melyeket a hullámtorlaszoknak a légkörben való szabályos tovaterjedése előidéz, melyek épen úgy mint a vízfelületen, két különböző fajsúlyú rétegnek egymásra helyezkedése folytán keletkeznek. Az ilyen hullámrendszerek a különböző sűrűségű levegőrétegek válaszfelületén csak akkor válnak láthatókká, ha az alsó réteg annyira van telítve vízgőzökkel, hogy a hullámhegyek, a melyekben a nyomás kisebb, ködöt kezdenek alkotni és akkor tűnnek elő a sávos, párhuzamos felhővonulatok, melyek az égboltozat széles mezőin, szabályosan ismétlődve, elterülhetnek. Helmholtz azért is nagyon fontosnak tartja, hogy a két folyadék válaszfelületén keletkező hullámok elmélete megoldassék, de a nagy mathematikai nehézségek miatt egyelőre csakis a legegyszerűbb esetre, t. i. egyenesvonalú hullámvonulatokra szorítkozik, a melyek két különböző sűrűségű, végtelen kiterjedésű folyadék sik elválasztó felületén változatlan alakban.

* «Ueber atmosphaerische Bewegungen» és «Die Energie der Wogen und des Windes».

erők, melyek távolságoktól és sebességektől is függnének, az energia megmaradásáról szóló általános természeti törvénybe ütköznének, mely pedig az elektrodynamikai jelenségek terén is helyesnek bizonyult; de akkor ő WEBER bonyolultabb törvényét, melyben az erők még a gyorsulásoktól is függenek, nem vette tekintetbe és tényleg ki lehetett mutatni, hogy a WEBER-féle törvény nem enged meg egy olyanféle körfolyamatot, mely semmiből munkát teremtene. Ezen WEBER-féle hypothesis mellett egy másik régebbi állott fenn, az a mely E. NEUMANN-tól ered. Ez nem a tömegpont hatását adja egy másik tömegpontra, hanem linearis áramelemnek egy másikra való hatását; ezt pedig HELMHOLTZ a legszerencsésebb és legtermékenyebb gondolatnak tartotta, a melyet az új mathematikai physika egyáltalában felmutathat. Ámde a két áramelem egymásra való hatásának a WEBER-féle hypothesisből leszármaztatott törvénye a NEUMANN-féle potential-törvénytől különbözött és HELMHOLTZ vizsgálódásai közben egyszerre csak azon kérdés előtt látja magát, vajjon WEBER hypothesise egyáltalában megfelel-e a valóságnak és hogy miféle vonatkozásban van a NEUMANN- és a WEBER-féle törvény a később említendő MAXWELL-féle törvényhez?

Felismervén azt, hogy ezen törvények különböző alakjai egy közös formára visszavezethetők, a melyből mindegyikök csupán csak a benne foglalt állandóknak különböző értékeivel kiadódik; és felismervén, hogy az összes jelenségek, melyeket önmagukba visszafutó fémi vezetőkörökben keringő teljesen zárt áramok előidéznek, a különböző hypothesisekből egyformán jól leszármaztathatók, nem teljesen zárt vezetők esetében ellenben lényegesen különböző következtetésekre vezetnek: a kérdést eldöntendő, az inductiónak tőle általánosított törvényéből levezeti az elektromosság mozgástörvényeit a testes (testi kiterjedésű) vezetőkben. Azt talalta, hogy határozatlanúl hagyott állandóknak negativ értéke, a minőt a WEBER-féle felfogás megkövetel, az elektromosság labilis egyensúlyának felel meg és hogy ennélfogva olynemű áramlások támadhatnának, melyek végtelen intenzitásokra és végtelen elektromos sűrűségekre vezetnének; ha ellenben a constans értéke MAXWELL nézetének megfelelőleg zérus, vagy pedig NEUMANN szerint positiv, ez a nehézség nem fog fölmerülni. Ámde ezeket a fejtegetéseket igen sokfelől megtámadták; az ellenfelek elméleti és kisérleti úton be akarták bizonyítani, hogy az E. NEUMANN-tól felállított és HELMHOLTZ-tól kibővített alaptörvénye az elektrodynamikus jelenségeknek a kisérleti tapasztalatokkal nem egyeztethető össze. Tényleg van különbség az E. NEUMANN-tól zárt áramokra vonatkozólag felállított potentialtörvény, ha nem zárt áramok esetére alkalmazásba jő és az inductio törvényének ama formája között, melyet ő már régebben levezetett volt, amennyiben a potentialtörvény csakis a vezetőkben áramló elektromosságnak tulajdonít elektrodynamikus hatásokat és távolba hatásokat, nem

pedig az elektromosan töltött testek mozgása révén mozgó elektromosságnak, holott a kisérletek azt bizonyítják, hogy ez a feltevés a tényekkel ellentmondásban áll.

Csodálatosan éles eszével Helmholtz előre átlátta, hogy mindezen kérdésekben csakis a nem zárt áramokkal teendő, nem éppen könnyű kisérletek fognak dönthetni, bár nem előre gyaníthatta, hogy ez a kérdés voltaképen abban fogja megoldását találni, hogy nem zárt áramok egyáltalában nincsenek, a mennyiben magában a szigetelőben, mely az áram vezetékét megszakítja, az elektromosság megosztást szenved, s ezzel az elektromosságnak látszólag megszakított mozgása zárttá válik.

Faraday, ki a távolbaható erők hypothesisével nem tudott megbarátkozni, mert elképzelhetetlennek tartotta, hogy két, egymástól egészen elkülönített test között bármiféle hatás lehetséges legyen, a nélkül, hogy a közbeeső közegekben valamilyen változás történnék, mindenekelőtt az elektromos és mágneses testek közé eső mediumokban keresett ilyen változásokat. És tényleg sikerült is neki jóformán az összes testekben mágnességet vagy diamágnességet találnia, úgyszintén a szigetelő testekben az elektromos erők hatása alatt változásokat észrevennie, melyeket ő a szigetelők polarisatiójának nevezett el. Ha már most Faraday és Maxwell szerint, a ki ezeket a hypothesiseket mathematikai alakba öntötte, felteszszük azt, hogy a szigetelőkben is támadhatnak elektrodynamikus hatású elektromos mozgások, melyek folytán a szigetelők dielektromosan polarisáltatnak, úgy a teljes elmélet a potentialtörvénynek módosításából fog kiadódni.

Részben régibb keletűek, részben pedig az itt említett, az elektrodynamikára nézve nagy fontosságú dolgozatokkal egy időből valók azok a vizsgálatok, melyek az elektromos áramoknak a vezető anyagból álló testekben való eloszlásának törvényeire s az elektromos határrétegekre vonatkoznak. Ezekben az egy felületnek elektromossággal való beborításáról szóló ismeretes theorema az elektromótoros erőkre vonatkozólag oly értelemben bővíttetik ki, hogy valamely vezető felületén mindenkor megadható az elektromindító erőknek olyan eloszlása, mely minden más hozzáillesztett vezetőben ugyanazokat az elvezetett áramokat adná, mint a vezető belsejében tetszőlegesen elosztott elektromindító erők; és kimutatja továbbá azt is, hogy az eddigi feltevés, mely szerint az elektromosság, ha egy vagy több testen egyensúlyba helyezkedik, a testek belsejét teljesen elhagyja és csakis a felületükön alkot végtelen vékony réteget, csak addig engedhető meg, a míg oly vezetőnek egyszerű határfelületével van dolgunk, mely a szomszédos vezetőket vagy szigetelőket érinti, a nélkül, hogy a potentialfüggvény értékében ugrás volna; az olyan esetekben ellenben, a mikor két test határfelületén a potentialfüggvény értékében ugrás van, ha tehát két vezető a köztük működő galvanikus erőnek hatása alatt érint-

kezik, a határfelület mentén kettős elektromos réteg képződik; HELMHOLTZ kifejti ennek a jelentőségét azon jelenségek szempontjából, melyek nedvesítő folyadékoknak szilárd fal mentén való folyásakor bekövetkeznek.

Közben azonban MAXWELL nézetei, ki — mint már említettük FARADAY-hoz csatlakozva a távolbahatást a közbeeső médium hatásával helyettesítette, döntő hatásuakká lettek HELMHOLTZ dolgozataira; az 1881-ben «Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte» czím alatt megjelent vizsgálatában bebizonyítja, hogy mellőzve minden hypothesist a mágnesileg vagy elektromosan polarisált testek belsejére vonatkozólag, lehetséges azokat a tömegmozdító (ponderomotorikus) erőket megtalálni, melyek az ilyen testek belső részeire hatnak. A kérdés analytikai tárgyalása oly kifejezésekhez juttatja, melyekből a távolbaható erők teljesen eltűnnek és a polarisált közegnek reactiójával vannak helyettesítve; s ezzel a FARADAY-MAXWELL-féle nézetekhez jutott, a kik az æthert a súlyos anyagoktól üres térben is feszültségeket továbbszármaztató közegként tekintik s a vezetőkben végbemenő elektromos mozgásokban nem látnak egyebet, mint a szigetelők polarisatiójának keletkezését és megszünését. Még szorosabban csatlakozik HELMHOLTZ ezekhez a nézetekhez az 1882-ben megjelent «Ueber absolute Maassysteme für elektrische und magnetische Grössen» dolgozatában; ebben a FARADAY-MAXWELL-féle elméletet egész határozottan minden olyan elektrodynamikus elmélet fölé emeli, mely közvetetlen távolbahatást föltételez, mely hatásnak iránya és nagysága két-két elektromos mennyiségnek absolut vagy relativ mozgásától függ, mert ez az elmélet sem az energia végességének és állandóságának elvébe, sem pedig a hatás és visszahatás egyenlőségének elvébe nem ütközik — és hogy az elméletet csak a conservativ folyamatokra felépítse — eleinte kizárja azokat a jelenségeket, melyekben — úgy mint a surlódásnál — hő fejlődik, és elektromos vagy mágnesi energia eltűnik.

Ez a dolgozat, a melyben öt a FARADAY-tól talált tények arra a kérdésre csábítják, vajjon egyáltalában léteznek-e a távolbaható erők s kell-e őket figyelembe venni, már utal a gondolatoknak azon az egészen új láncolatára, mely a csakhamar következő, a mechanika alapelveire nézve oly nagy jelentőségű felfedezéseit benne már előkészítette. Ámde előbb a legkülönbözőbb részletek további átkutatása volt szükséges, hogy a mechanika alapelveinek tárgyalása legyen kifejthető, mely aztán a természet összes jelenségeinek törvényeit magában foglalja s azért is HELMHOLTZ 1882-ben «Ueber die Thermodynamik chemischer Vorgänge» czímű értekezésében az elméleti chemia felé fordul, a midőn a mechanikai hőelmélet alaptételeit a chemiai folyamatokra alkalmazza és máris határozottan engedi

felismerni a mechanikai alapelvek általánosított felfogását, mely itt még teljesen physikai mezben jelenik meg.

Minthogy a surlódásnál elveszö mechanikai energiából hő keletkezik, és a mechanikai energia gyarapodása hőveszteséggel jár; minthogy továbbá az elveszett és nyert energiának a mennyisége arányos a nyert, ill. elveszett hő mennyiségével, a hő az energia egy nemének volt tekinthető, mi aztán ahhoz a feltevéshez vezetett, hogy a meleg test minden egyes részecskéje állandóan és pedig folyvást változó irányban mozog, oly gyorsan, hogy a testben elfoglalt helye csak kevéssé, vagy egyáltalában nem változik. De ha tényleg így áll a dolog, akkor a meleg test energiájának egy része szükségképen a kinetikai energia alakjával bír, és így az energia, minthogy annak minden faja hővé alakítható át, hő alakjában lesz mérhető. Ámde az energia megmaradásának elve nem nyújt felvilágosítást arra nézve, vajjon a munka határ nélkül alakítható-e át hővé és ez utóbbi határ nélkül munkává, és hogy mint áll a dolog a többi tömérdek természeti erő esetében. Mindenekelőtt erre a gyakorlati és elméleti tekintetben egyaránt fontos pontra fordította figyelmét Helmholtz, midőn megvizsgálja, hogy a galvánelemekben végbemenő chemiai folyamatokból fejlődő hőnek hányadrésze adódik vissza áram munkája alakjában, és különböző rangfokozatokba rendezi az energia formáit, a szerint, a mint többé vagy kevésbbé tökéletesen alakíthatók át mechanikai munkává. A chemiai folyamatok munkaértékére vonatkozó eddigi vizsgálatok jóformán kizárólag csakis a vegyületek keletkezése és oldása közben fejlődő vagy eltünő hőmennyiségekre vonatkoztak, holott a legtöbb chemiai átalakulás a testek halmazállapotának és sürüségének változásával jár, és ez utóbbiak is vagy hő, vagy pedig másféle munka alakjában energiát fogyasztanak. Minthogy pedig a legtöbb chemiai folyamat közben az olvadás, párolgás vagy más ilyenféle változás révén a környezettel hőkicserélődés megy végbe, úgy az ezeknek megfelelő munkaegyenérték után is kell fürkészni; és ha továbbá még azt is meggondoljuk, hogy a chemiai erők nemcsak hőt, hanem az energiának más fajait is létrehozhatják, anélkül hogy a hatásban résztvevő testek hőmérsékletében a teljesítmény nagyságának megfelelő változásnak kellene mutatkoznia, szükségesnek látszik, hogy a chemiai folyamatok esetében is meg kell különböztetni a vegyrokonsági erők azon részét, mely a munka más formáivá szabadon átváltozhat attól, mely csakis hővé alakulhat át. Az energiának ezt a két részét Helmholtz szabad és kötött energiának nevével jelöli meg és azt találja, hogy a rendszernek nyugvó állapotában, állandóan egyenletesen tartott hőmérséklet mellett önmaguktól meginduló és külső munkaerő segítsége nélkül továbbhaladó chemiai folyamatok csak oly irányban mehetnek végbe, hogy a szabad energia fogyjon, hogy tehát — feltéve, hogy a mechanikai hőelmélet

tételei korlátlanul érvényesek — a szabad energiának értékei döntenek a felett, hogy mely irányban léphet működésbe a chemiai rokonság, a minél ennek kiszámítása szabály szerint csakis az olyan változásoknál eszközölhető, a melyek a thermodynamika értelmében tökéletesen megfordíthatók. Az a kérdés, hogy a vízbontásnál keletkező gázok lappangó hőjének van-e, s ha van, mily körülmények között van hatása a galvánelemek elektromindító erejére, HELMHOLTZ-ot a szabad chemiai energia fogalmához vezeti; de hogy ezt a fogalmat értékesíthesse, mindenekelőtt a thermodynamikai alaptételek analytikai átalakítására volt szüksége. A potentiális energia fogalmának eddigi alkalmazásában a hőmérsékletnek változása rendszerint nem vétetett tekintetbe, mert vagy az erők, a melyeknek munkaértéke számíttatott, a hőmérséklettől egyáltalában nem függenek, mint pl. a gravitatio; vagy pedig mivel a hőmérséklet a vizsgálat alá vont folyamatok közben állandónak, vagy bizonyos mechanikai változások függvényeként volt tekinthető, a mint pl. a hangterjedés a gáz sűrűségének függvénye gyanánt vehető. De ha pl. az utóbbi esetben a sűrűség függvénye ugyan a hőmérsékletnek, úgy mégis mindegyik potential értékében előforduló tetszőleges állandó minden egyes hőmérsékletre nézve külön meg volt határozandó és az egyik hőmérsékletről a másikra való átmenet nem volt eszközölhető.

HELMHOLTZ már most megmutatta, hogy a thermodynamikai egyenletek előállításához csakis a hőmérséklet függvényeként teljesen meghatározott u. n. *ergal*nak differentialhányadosai szükségek, mely mennyiség — t. i. az ergal — minden állandó hőmérséklet alatt végbemenő átalakulásoknál a potentiális energiának értékét adja, s a melyet ő szabad energiaként jelöl meg, úgy hogy ha az összes energia és az ergal közötti különbség kötött energiának neveztetik, ez utóbbit a hőfokkal osztván, a már előbb bevezetett entropiát nyerjük. Hogy aztán azt, a mit a mechanika eddig eleven erőnek vagy actualis energiának nevezett, világosan megkülömböztesse a hőnek munkaegyenértékeitől — a hőt szintén eleven erő, és pedig a molekulák láthatatlan mozgásának eleven ereje gyanánt fogva fel — az elsőt *rendezett mozgás eleven erejé*nek mondja, rendezett mozgás alatt olyat értvén, melynél a mozgó tömeg sebességi összetevői a térbeli coordinaták differentiálható függvényeinek vehetők; a *nem rendezett mozgás* ellenben olyan, a melynél minden egyes részecske mozgásának (mint pl. a hőbeli mozgásnál) nem kell hasonlónak lennie a szomszédok mozgásához, mely tehát a rendelkezésünkre álló aránylag durva segédeszközökkel a munkának más formájává szabadon át nem alakítható, úgy hogy HELMHOLTZ ez értelemben az entropiának a nagyságát a rendetlenség mértékeül veheti. Ezek a megkülömböztetések HELMHOLTZ további dolgozataira nézve alapvető fontosságuak. Ha már most az állandó entropia

mellett végbemenő állapotváltozás adiabatikusnak neveztetik, úgy az entropia az adiabatikus folyamatnál a szabad energia rovására keletkező hőre vonatkozólag capacitásnak tekinthető; minden olyan állapotváltozásnál, a mely alatt a hőfok állandó, munka csakis a szabad energia rovására végeztetik, a kötött pedig ez alatt a ki- vagy belépő hő rovására változik. Ezen eredmények összefoglalásából kitetszik, hogy minden külső munka a szabad energia rovására végeztetik, minden hőkiadás a kötött rovására, és végül minden hőmérsékletemelkedésnél a rendszerben a szabad energia adott mennyisége kötött energiába megy át és ebből Helmholtz az energiának a vegyületek keletkezésével és bomlásával járó fejlesztésére és kötésére vonatkozólag oly eredményeket vezetett le, melyeket a galván elemeken tett megfigyelések megerősítenek.

Életének utolsó tíz évében, 1884—1894-ben, Helmholtz a mechanikának alapelveire vonatkozó nagy dolgozataihoz fordul; ezekben értékesíti mindazokat az elméleti következtetéseket, a melyeket a physika és a physiologia minden részeire kiterjedő kutatásainak hosszú, fáradalmas útján összegyűjtött.

A mechanika principiumai, a d'Alembert-féle elv, a súlypont mozgásának a törvénye, a felületek elve, az eleven erő megmaradásának elve és a legkisebb hatás elve mind a Newton-féle erők és szilárd kapcsolatok feltételezése mellett bebizonyíttattak. Ámde a megfigyelés később megmutatta azt, hogy az így leszármaztatott tételeknek a természetben jóval általánosabb érvényesség tulajdonítható, mint az a bizonyításból következett, s ez gyanítani engedte azt, hogy a Newton-féle conservativ vonzóerők bizonyos általános tulajdonságai az összes természeti erőket megilletik, másrészt azonban kétségessé vált, hogy pl. a hatás- és visszahatás egyenlőségének elve általánosan jogosult-e, s az olyan megfontolások, a minőkre rámutattunk, ahhoz a feltevéshez vezettek, hogy a távolbahatás egy láthatatlan mediumban folytonosan eloszlott dynamikus hatásoknak tulajdoníttassék, és így egy olyan hatásmód tételeztessék fel, a minőnek analogonját az erőnek rúgó, vagy pedig kötél révén való átvitelében látjuk. De mivel a physikának az a feladata, hogy a természet jelenségeit a mechanika egyszerű törvényeire visszavezesse, mindenekelőtt az a fontos kérdés támadt, hogy mi módon épül maga a mechanika a legegyszerűbben, és melyek — Hertz szavai szerint — az ő végső és legegyszerűbb törvényei, melyeknek minden természetes mozgás hódol, mely kizár minden olyan mozgást, mely a mai tapasztalatunk álláspontjából tekintve a természetben nem fordulhat elő, és a melyekből, mint a mechanika tulajdonképeni principiumaiból — minden további hivatkozás nélkül a tapasztalatra — az egész mechanika tisztán deductiv úton kifejthető.

Helmholtznak az energia megmaradására vonatkozó úttörő vizsgálatáig,

a mechanika, mint már kiemeltük volt, GALILEINEK a tömegek tétlenségére vonatkozó nézete s NEWTON három mozgási törvénye alapján fejlődött; ámde a mikor megkisérlették azt, hogy a mechanikának egész épületét ezen az alapon rendszeresen és szigorúan felépítsék, csakhamar észrevették, hogy a mechanikai fogalmak definitióban homályos pontok vannak, hogy a statika elemi törvényeinek — pl. az erő-parallelogramm tételének, a virtuális sebességek elvének stb. — bizonyítása nem szigorú, nem is említve azt, hogy a távolbaható erők, a molekuláris erők, a chemiai, a mágnes, az elektromos erők egészen kiesnek a közvetlen tapasztalat köréből.

Az energia megmaradásáról szóló elvnek megtalálása lehetővé tette az elméleti mechanika egységes felépítését; az erő fogalma háttérbe szorult, a tömeg és az energia pedig mint adott, megsemmisíthetetlen mennyiségek léptek fel. A létező energia két részből összetettnek mutatkozott, a melyek közől az egyik, a kinetikai energia, minden esetben teljesen egyformán függ a mozgó tömegek sebességeitől; a második, t. i. potentiális energia a tömegek viszonylagos helyzetével van meghatározva, de minden egyes esetben azok különös természetéből külön meghatározandó. Az energia különböző alakjainak, valamint azoknak a föltételeknek a vizsgálása, melyek között egyik formájából a másikba átmegy, az egész physika és chemia tartalmát kitöltötte. Hogy már most a jelenségek lefolyását az idő függvényeként megállapítsa, HELMHOLTZ nem a mozgási egyenleteket veszi alapul, hogy a mechanika általános elveit belőlük levezesse, mint a hogyan eddig tették, mert e végből a ható erőkre s a probléma megszorító feltételeire nézve bizonyos feltevéseket kell tenni, melyek az alapelvekkel előtüntetett mozgásoknak nagy és sokat átölelő kategoriáit kirekesztenék; ellenkezőleg, az alapelvek egyikéből indul ki, s ez lehetővé teszi a lehetséges erők minden fajtája között a vonatkozások egész sorának a levezetését, melyek az előbbi föltételek mellett hianyoztak, holott a természetben megvannak. Ez az elv a *legkisebb hatás elve.*

Ez a tárgy tartalma azoknak a dolgozatoknak, melyeket HELMHOLTZ «Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung» és «Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action» czímek alatt 1886. és 1887. években közzétett, és a melyek HERTZ véleménye szerint mostanában a physika legnagyobb haladását tüntetik elő.

Ha LEIBNITZ szerint a mozgó tömeg tétlenségéből folyó hatásnak quantitativ mértékét úgy definiáljuk, mint a tömeg, az úthossz és a sebesség szorzatát, vagy pedig mint az eleven erőből s az időből alkotott szorzatot: úgy a legkisebb hatás elve azt követeli, hogy az összes hatás adott kezdeti helyzetből adott véghelyzetbe való átmenetelre nézve határérték legyen, miközben a variatio az által jön létre, hogy a testrendszernek az átmenet-

közben elfoglalt egyes helyzeteinek coordinatáit, de ezzel egyidejűleg az időt is variáljuk, és pedig úgy, hogy a rendszer energiájának meglevő összege változást ne szenvedjen. Ez az utóbbi követelmény vagy akként teljesíthető, hogy megköveteljük, hogy az energiának csupán csak a nem variált mozgásban meglevő összege ne változzon, a nélkül, hogy ennek az összegnek nagysága elő volna írva, mely esetleg a normális mozgás folyamán egyébként változást szenvedhet — LAGRANGE és HAMILTON így tárgyalták a problemát —; vagy pedig ha megköveteltetik — a mint ezt JACOBI tette, a ki feltételezte, hogy a potentiális energia az időtől független — hogy az energiának összege egy megszabott értéket megtartson, mely esetben az a vonatkozás felhasználható arra, hogy az idő incrementuma a hatásból kiküszöböltessék. JACOBI megszorító feltétele egy teljesen ismert és magába zárt testrendszerre physikailag mindenkor érvényesnek vehető, míg a LAGRANGE-HAMILTON-féle alak a mozgási egyenletek letárgyalását a nem teljesen zárt rendszerekre nézve is megengedi, a melyekre változó, de a mozgó rendszer visszahatásától függetleneknek tekinthető, külső befolyások hatnak.

HAMILTON, megtartva a LAGRANGE-féle feltételeket, a legkisebb hatás elvének még egy más alakot is adott, a melyet HAMILTON-féle elvnek szokás nevezni; ha ugyanis a HAMILTON-féle alapfüggvényt mint a rendszer potentiális energiájának és eleven erejének különbségét definiáljuk, úgy a HAMILTON-féle elv azt mondja, hogy az alapfüggvénynek egyenlő időelemekre kiszámított negativ középértéke a véghelyzetek közötti normális mozgásnál határértékké válik.

De LAGRANGE, HAMILTON és JACOBI a MAUPERTUIS-től (1744) eredő, de tőle semmiképen meg nem okolt elvet eleinte csak a NEWTON-féle törvények physikai feltételezése mellett bizonyították be és leszármaztatták belőle egy anyagi rendszer pontjainak mozgását, mely rendszerre nézve megszorító feltétel gyanánt csak a pontjainak szilárd kapcsolata vétetett fel, és pedig avval a határozott kikötéssel, hogy az energia állandóságának elve érvényes. Miután azonban HELMHOLTZ azt találta, hogy az energia állandóságának elve általános érvényű, ez utóbbi kikötés már nem volt további megszorítás, ha csak a vizsgálat alá vett folyamatra nézve ismeretesek mindazok az alakok, a melyekben az energia egyenértékei felléphetnek. Így most már csak az a kérdés volt még eldöntendő, vajjon másféle physikai folyamatok, a melyeket nem lehet egyszerűen a mérlegelhető tömegek mozgasára és a NEWTON-féle törvényekre visszavezetni, de a melyekben energia-mennyiségek mégis érvényesülnek, szintén a legkisebb hatás elve alá vonhatók-e, vagy pedig nem.

A mint előbb a hőbeli erőket a közvetlenül észlelhető anyagok rejtett mozgásaira visszavezették, és amint MAXWELL az elektrodynamikus erők-

ben rejtett tömegek mozgásának a hatását felismerte, éppen úgy kívánta HELMHOLTZ az ilyen rejtett tömegek mozgását és energiáját a physikai problémák tárgyalásába általánosan bevezetni, mert a dolgok mögött rejtőző láthatatlan valamiben ismét csak tömeget és mozgást látott, a melyekről csupán csak a mi érzékeink korlátolt volta miatt nem birunk közvetlenül tudomást szerezni. És így az összes mozgás előállítására a HAMILTON-féle elvet választotta, mely megengedi, hogy arra a mechanikai rendszerre, melynek belső erői a rendszer látható coordinatáinak erőfüggvényéből képezett, az időtől független differentialhányadosaival előtüntethetők, még külső, az időtől függő erők is hassanak, melyeknek munkája külön kiszámítható, melyek tehát nem tartoznak a conservativ mozgató erőkhöz, hanem másféle physikai folyamatoktól függnek.

Minthogy pedig a mozgó rendszernek kifelé irányuló erői, mint már LAGRANGE megmutatta, az alapfüggvénynyel kifejezhetők, HELMHOLTZ *kinetikai potentiál*nak nevezi és ekként a legkisebb hatás elvével a minden egyes physikai jelenség lefolyására egyformán érvényes általános tulajdonságot mondatja ki, hogy a kinetikai potentiálnak egyenlő időközökre kiszámított negativ középértéke a rendszer tényleges mozgásának az útján minimum, vagy nagyobb úthosszakra nézve minden más szomszédos úttal összehasonlítva, mely egyenlo idő alatt vezet át a kezdeti helyzetből a véghelyzetbe, mindenesetre határérték. A kinetikai potential a nyugalom esetében a potentiális energia értékébe megy át, és ekkor a HAMILTON-elv azt mutatja, hogy az egyensúly esetére a potentiális energia minimum. A mérlegelhető anyagú rendszerekre nézve ismeretes volt már, hogy az esetben, ha egyes coordináták csak a differentiálhányadosaik révén jutnak az alapfüggvény értékebe, és ha a megfelelő erők zérussal egyenlók, a LAGRANGE-féle kifejezés a többi coordinatákon működő erőkre analytikailag, éppen úgy mint az általános esetben egy transformált alapfüggvény ugyanazon függvényeként tűnik elő, mely a coordináták deriváltjait nem úgy, mint előbb, csak a második dimensióban, hanem az elsőben tartalmazza, úgy tehát, hogy a kinetikai potentialnak olyan alakjai is jelentkezhetnek, a melyekben az energia két formájának különválása nem ismerhető fel, sőt inkább a kinetikai potential az általános coordináták és a megfelelő sebességek valamilyen függvénye lehet. Ez vezette HELMHOLTZ-ot arra a kérdésre, hogy milyen alakot szabad a potentialfüggvénynek felvennie, hogy a LAGRANGE-féle alak a külső erőkre nézve változatlan maradjon; s mindenekelőtt azt találta, hogy ez a követelmény teljesítve van, mihelyt ezt az alapfüggvényt a coordinatákból s az ezek irányában ható, az idő függvényeiként adott külső erőkből képezett szorzatok összegével nagyobbítjuk, minthogy az ilyen alakban kibővített minimum-tétel a variatio alatt az erőkre ismét a LAGRANGE-féle kifejezést adja.

A mozgási egyenletek LAGRANGE-tól eredő alakjának azt a fontos tulajdonságát, hogy azokra az esetekre is alkalmazható, a hol a mérlegelhető tömegek potentialis és actualis energiája mellett még a thermikus, az elektrodynamikus és elektromagnetikus munkaegyenértékek is tekintetbe jönnek, HELMHOLTZ már azzal bizonyította be, hogy a megfordítható hőfolyamatok törvényeit a LAGRANGE-féle mozgási egyenletek, tehát a kinetikai potential minimumtétele alakjában is kifejezte, mely azonban a hőfokot, mint a hőbeli mozgások intenzitásának mértékét nem csak quadratikus alakban tartalmazza, a hogyan a mérlegelhető rendszerek eleven ereje a sebességeket. Ha tehát a legkisebb hatás elvének hódoló rendszerek általános tulajdonságait ismerni akarjuk, úgy azt a feltevést, hogy a sebességek csakis az eleven erő értékében, és pedig másodfokú homogen függvény alakjában fordulnak elő, el kell ejteni és az elvet azzal a feltevésekkel kell fejlegetni, hogy az alapfüggvény a coordináták és a sebességek tetszőleges functiója. Ezekre az általános elmélkedésekre az indító okot a kinetikai potential amaz alakjának megvizsgálása adta HELMHOLTZ-nak, melyet MAXWELL elektrodynamikai elmélete megkövetel és a melyben az elektromosság sebességei egy másodfokú függvényben fordulnak elő, melynek együtthatói nem lesznek állandók, mint pl. a tömegek a mérlegelhető anyagú rendszerek eleven erejének értékében; azonkívül még a sebességek lineáris függvényei is hozzájárulnak, mihelyt permanens mágnesek lépnek működésbe.

Minthogy pedig lényegökben a fény jelenségei is megmagyarázhatók avval a hypothesissel, hogy az æther a rugalmas, szilárd, súlyos anyagokéhoz hasonlo tulajdonságokkal felruházott közeg, és minthogy ezzel együtt a legkisebb hatás elve a fénymozgásra nézve is mindenesetre érvényesnek tekintendő, HELMHOLTZ a legkisebb hatás elvének érvényességi körét már most is messze a súlyos anyagok mechanikájának határán túl kiterjesztve látja és nagyon is valószínűnek tartja, hogy ez az összes megfordítható természeti folyamatok általános törvénye, a mi mellett azonban megfontolandó, hogy az irreversibilitás nem a dolog lényege, hanem azon segédeszközeinek korlatoltságán alapszik, melyek nem teszik nekünk lehetségessé azt, hogy rendezetlen atom-mozgásokat ismét rendezhessünk, hogy pl. az összes, hőmozgásban levő atómok mozgását pontosan visszafelé fordítsuk.

Ámde a legkisebb hatás elvének általános érvényessége lényeges segédeszközt szolgáltat arra, hogy a jelenségek új osztályainak a törvényeit formulázhassuk, a mennyiben az összes, ezekre a jelenségekre nézve lényeges feltételeket egyetlenegy mathematikai kifejezésben összefoglalja: a physikai folyamatok mindazon eseteit, a melyekben a kinetikai potential a sebességekben lineáris tagokat tartalmaz, HELMHOLTZ a rejtett mozgás

eseteinek nevezi. Mindenekelőtt kimutatja, hogy a legkisebb hatás elve a fentebb adott általános alakban az energia állandóságának elvét mindenkor magában foglalja és a kinetikai potential értékéből az energia értékét kiszámítja; minthogy azonban megfordítva nem minden esetben érvényesül a legkisebb hatás elve, a mikor az energia állandósága még megvan, úgy a legkisebb hatás elve többet fejez ki, mint az energia állandóságának elve és a szemügyre vett természeti erőknek még valamilyen különleges tulajdonságait is fogja kifejezni, melyet az ő conservativ erő-jellegök még nem ad meg. A kinetikai potential értékének az energia értékéből való leszármaztatása önkényes mennyiségeket hoz be, melyek a sebességeknek első fokú homogen függvényei, és azért bír jelentőséggel, mert ha teljesen ismeretes az energia függése a coordinatáktól és a sebességektől, most már lehetségessé válik a kinetikai potentiált, és vele a rendszer mozgástörvényeit is megtalálni, és sikerül megtalálni a sebességre nézve lineáris tagokat, melyek a rejtett mozgásoknak felelnek meg.

Helmholtz, kifejtvén néhány általános kölcsönös vonatkozást a rendszernek egyidejűleg több irány felé ható erői, gyorsulásai és sebességei között, a melyek pl. azt a thermodynamikai törvényt szolgáltatják, hogy ha a hőmérséklet emelése valamennyi rendszer nyomását emeli, az összenyomás a hőmérséklet emelkedését vonja maga után — legalább korlátolt számú coordinatáról bebizonyítja, hogy megfordítva a legkisebb hatás elve is mindenkor érvényes, valahányszor az erők között ugyanezen kölcsönös vonatkozások fennállanak. Végül még a Hamilton-féle mozgási egyenleteknek teljes és részletes differentiálhányadosai vezettetnek le a kinetikai potential általánosított alakja részére s ebből ismét egy sorozata a következtetéseknek a rendszer megfordítható mozgásaira, vagyis olyan mozgásokra nézve, a melyekben a helyzeteknek azon sora, mely az előre tartó mozgásoknál befuttatott, a visszafelé tartó mozgásban ugyanaz marad, anélkül, hogy idegen erőknek kellene beavatkozniok és az egyenlő helyek minden párjára nézve az időköz szintén változatlan.

A legkisebb hatás elve Helmholtz-féle általánosításának további alkalmazásaira azonnal rátérünk, és csak azt kivánom megjegyezni, hogy Hertz ezt az elvet egy más, általánosan érvényes törvényre kivánja alapítani, mely minden rendszer mozgását közvetlenül leírja, és a mely azt mondja, hogy ha a rendszer összekötő kapcsolatai egy pillanatra megbonthatók lennének, akkor tömegei egyenes vonalú, egyenletes mozgásokkal szétszóródnának, de minthogy az ilyen felbomlás lehetetlen, ehhez a mozgáshoz, melyre mintegy törekednek, legalább olyan közel maradnak, a mennyire csak lehetséges.

A mozgások tulajdonságainak a legkisebb hatás elvéből való leszármaztatása nagy mathematikai és physikai nehézségekkel járt és »Studien zur

Statik monocyclischer Systeme» (1884), valamint »Principien der Statik monocyclischer Systeme» (1884) értekezéseiben lefektetett vizsgálataihoz vezette. Ezek a vizsgálatok a mechanikai és physikai problemák tárgyalása terén lényeges haladást jelentenek és Boltzmann kezei között az elméleti physikában domináló helyzetre emelkedtek.

Ha a testek valamely rendszerében mozgás megy végbe, rendszerint megváltozik ezen testek helyzete, vagy még az állapota is; de hogy ez nem éppen szükséges, kiderül abból, hogy pl. ha drótokon keresztül hosszú időn keresztül teljesen állandó elektromos áram halad át, úgy ez esetben a közelben levő vastömegek helyzete, hőmérséklete, mágnesi állapota a tér minden egyes pontjában változatlan marad s ennélfogva annak a mozgásnak, melyben mi mindezen jelenségek szülő okát keressük, tökéletesen állandónak (stationär) kell lennie, oly módon, hogy valahányszor egy részecske helyét elhagyja, mindenkor elenyésző kicsi idő alatt egy másik, tökéletesen ugyanolyan alkotású részecskének kell ugyanakkora és megegyező irányú sebességgel a helyére lépnie, úgy, hogy bár a mozgás folytonos, a tér egyetlenegy pontjában sem vehető észre változás. Helmholtz az ilyen mozgást, a minő pl. a forgó pörgettyűnek a mozgása, vagy surlódásmentes folyadéknak az áramlása gyűrűalakú csatornában, *cyclusos*nak nevezi; a cyclusos mozgások gyakran rejtett mozgások lesznek, mert ha csak ilyenek vannak jelen, a tömegeloszlásban változást észrevenni nem lehet; és megfordítva, a rejtett mozgások majdnem mindenkor cyclusos mozgások. Valamely coordinata akkor cyclusos, ha változása közben a rendszer egész állapota nem változik, ha tehát a benne rejlő eleven erő sem szenved változást, és ennélfogva nem függvénye ennek a coordinatának, hanem általában az ő differentialhányadosáé, minthogy az eleven erő általában annál nagyobbá lesz, mennél szaporább a cyclusos mozgás. A cyclusos coordinatákon kívül még másfélék is meghatározhatják a rendszer állapotát, melyeket Helmholtz lassan változó coordinatáknak, vagy parametereknek nevez s a melyeknek oly lassan kell változniok, hogy idő szerint vett differentialhányadosaik elhanyagolhatók; tehát az eleven erő magában foglalja a parametereket, de differentialhányadosaikat nem. Ha a parameterek hosszabb időre állandóknak tekinthetők, úgy a mozgás ez alatt cyclusos lesz, és a rendszer a cyclusos coordináták száma szerint monocyclusos stb., általánosságban polycyclusos rendszernek neveztetik.

Cyclusos rendszer támadásának feltétele teljesítve lehet a megközelítés tetszőleges fokával, mihelyt a rendszernek egyáltalában vannak cyclusos coordinatái, ha az energiának ama részei, a melyek a parameterek változásának sebességeit tartalmazzák, elenyészők azon részekhez képest, a melyek a cyclusos intensitásoktól függnek; vagyis ha a parameterek változásának sebességei elegendő kicsinyeknek, vagy pedig a cyclusos coor-

dinatáké eléggé nagynak vehető. Valamely cyclusos rendszer erői a parameterek irányában a cyclusos rendszer feltevése folytán függetlenek ezen parameterek változásának a sebességétől, a mint ez a LAGRANGE-féle egyenletekből a kinetikai energia révén kiadódik, és épen úgy következik, hogy az esetben, ha a cyclusos rendszer cyclusos coordinatáira semmiféle erők nem hatnak, a rendszernek összes cyclusos, a tömegnek s a sebességnek szorzatával meghatározott momentumai az időben állandók, mely esetben a mozgás adiabatikusnak neveztetik. A HELMHOLTZ-tól jellemzett mozgások tehát lényegökben azzal vannak definiálva, hogy a rendszer potentialis és actualis energiájának függetlennek kell lennie a coordinaták bizonyos számától, melyek arra szükségesek, hogy a rendszer részeinek helyzete tökéletesen meghatároztassék, de ezek csakis az idő szerint vett differentialhányadosaikkal lépnek be az energia értékeibe, a mi még nem szigorúan maradó (stationarius) állapot esetében is bekövetkezik, ha a rendszer állapotában a változásokat oly lassan engedjük végbebenni, hogy a rendszer sohasem mozdul ki észrevehetőleg azokból az állapotokból, a melyekben állandóan kitarthatna. Így a hőmozgás szigorúan véve nem monocyclusos, mert minden atóm valószínűleg folyvást változtatja mozgása módját, és a monocyclusos mozgás mechanikai jellege csakis abból eredhet, hogy az atómok rengeteg sokaságában állandóan a mozgásnak minden lehető stadiuma képviselve van.

HELMHOLTZ már most azt a kérdést veti fel, hogy milyen legáltalánosabb feltételek alatt fordulhatnak elő a mozgások más ismeretes osztályaiban a hőbeli mozgás ismeretes physikai sajátszerűségei, és különösen, hogy lehet-e a mechanikailag megérthető mozgások olyan osztályát felmutatni, a melyben a munkaegyenértékek átalakulása ugyanolyan megszorító feltételeknek lenne alávetve, mint a minők a hőelmélet második főtételénél előfordulnak. A monocyclusos rendszer definitióját akként kibővítve, hogy csak egyetlenegy cyclicus coordinata fordul elő benne, vagy ha több van, akkor valamennyi egyetlenegy másféle mennyiségnek függvényei, mindenekelőtt kiemeli azt a különösen fontos és érdekes esetet, a melyben két monocyclusos rendszer között a végből, hogy a sebességek között szilárd viszonyok létesíttessenek, bizonyos mechanikai kapcsolatok vezettetnek be, a melyeknek semmi befolyásuk nincsen mindaddig, míg a mozgás már magában is úgy megy végbe, a mint az nekik megfelel, de hogy mihelyt eltérések kezdenének támadni, oly erőket állítsanak velők szemben, melyek az eltéréseket meggátolják. HELMHOLTZ az így keletkező rendszert, a minőt pl. két pörgetyű alkot, melyek tengelyei úgy vannak összekötve, hogy megegyező fordulati sebességekre kényszeríttessenek, *összecsatolt rendszer*nek, az állapotot pedig a rendszer *csatolás*ának nevezi és ebben látja az egyetlen eszközt arra, hogy adott monocyclusos rendszer belső mozgá-

sára hatni lehessen, a mint az atómok hőbeli mozgásánál a rendelkezésünkre álló módszerek korlátoltságánál fogva szintén nincsen más lehetőségünk arra, hogy egyes elszigetelt atómokra külön tudjunk hatni, hanem szükségképen valamennyi, közös térbe zárt atómot egyszerre, együttesen és egyformán kell megtámadnunk. Ha már most két, eredetileg egymástól független monocyclusos rendszer a külső erők megfelelő szabályozása révén olyan állapotba helyeztetik, mely a szilárd kapcsolat bizonyos fajával járó feltételeknek van alávetve, úgy ilyen szilárd kapcsolatot tényleg létesíthetünk közöttük, a nélkül, hogy ezzel a meglévő mozgást megzavarnók, s ezentúl — a szilárd kapcsolatot tovább is fentartva — tovább engedhetjük őket mozogni, úgy a mint pl. két egyenlő hőmérsékleten levő test belső mozgásuk megzavarása nélkül vezető érintkezésbe helyezhető, úgy hogy eléggé lassú hőmérsékleti változások alatt egyazon hőmérsékleten maradnak, a mi még nem zárja ki azt, hogy a két rendszer abban a helyzetben, melybe csatolás czéljából hozattak, nyomás, vagy pedig távolba ható erők révén egymásra hassanak.

A hőelméletbeliekkel egészen analog mathematikai elmélkedések segítségével most már egész általánosan megmutatja Helmholtz, hogy ha a monocyclusos rendszerek csakis olyanféle kapcsolatokat engednek meg egymásközt, hogy minden egyes rendszer külső erői csakis a rendszer pillanatnyi állapotától, nem pedig a más rendszerekkel kezdődő vagy megszünő kapcsolatoktól függenek, hogy tehát a csatolás tiszta mozgásbeli csatolás és új monocyclusos rendszert nemz; ha továbbá attól a pillanattól, a melyben a belső mozgások kicserélődésének feltételei két vagy több rendszer között bekövetkeznek, belső mozgásaik egyensúlya attól függ, hogy mindegyikök parametereinek határozott függvénye — a hőtanban a hőmérséklet — ugyanazon értékű, mint a másik rendszer megfelelő függvényeié, akkor a hőnek harmadik, Carnot-féle törvényben kifejezett lényeges tulajdonsága, t. i. a korlátolt átalakuló képesség is érvényes reájuk.

Helmholtz-nak a legkisebb hatás elvével, valamint a monocyclusos rendszerekkel foglalkozó s a mechanika alapelveire vonatkozólag alapvető ezen vizsgálataihoz, részben kiegészítőleg, részben helyreigazítólag három utolsó dolgozata sorakozik, melyek már egészen a Faraday, Maxwell és Hertz alkotta nézetek alapjára helyezkednek, a melyek szerint az elektromos oscillatiók a világteret betöltő ætherben végbemenő fény- és hőrezgésekkel terjedés sebességökben, transversalis rezgés természetökben s az ezzel összefüggő polarizálhatóságban, a törés és visszaverődésben teljesen megegyeznek, és hogy a látszólagos távolba ható erők a hatásnak a közbeeső medium egyik rétegéről [a rákövetkezőre való átvitele révén terjednek tova.

«Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik» (1892) című dolgozatában HELMHOLTZ azt vizsgálja, vajjon az elektrodynamikának tapasztalati úton talált tételei, a mint azok MAXWELL egyenleteiben ki vannak fejezve, nem hozhatók-e minimum-tétel alakjába; megfontolások alapján, a miket előbb megbeszéltünk, kiadódott, hogy az általánosított HAMILTON-féle elvből a tömegmozdító erők a MAXWELL-féle elmélettel tökéletesen megegyezőleg leszármaztathatók, mi közben az energia két részből tevődik össze, melyek egymással szemben ugyanazt a szerepet játszszák, mint a mérlegelhető tömegekre vonatkozó problemákban a potentiális és az actuális energia; az elektromos energia itt a nyugvó tömegek potentiális energiájaként jelenik meg — a mennyiben momentumok nem változnak, vagy elektromos áramok nem hatnak közre — a mágnesi energia pedig mint eleven erő.

Most aztán a fény elektromágnesi elméletébe mélyed, és kiindulva abból, a hogy a fény dispersiója mindig csak olyan terek határán jelentkezik, a melyeket az ætheren kívül még mérlegelhető anyagot is tartalmaznak, egy 1892. évben megjelent dolgozatában a színszórást ezen elmélet segítségével, és pedig tekintettel az ætherbe beágyazott tömegekre törekszik megmagyarázni. Ám MAXWELL mathematikai elmélete bebizonyítja, hogy az æther azon részeiben, a melyeken elektromos oscillatiók vonulnak át, ponderomótoros erőknek is kell működésbe lépniök, mely erők nehéz atómokat, a melyek az ætherben fekszenek, mozgásba hozhatnának; HELMHOLTZ megmutatja, hogy akkor a mérlegelhető részecskéknek valóságos elektromos töltéseket is kell tartalmazniok, úgy, hogy a képezendő mozgási egyenletekben az elektromos momentumok (melyeket eme tartók valódi elektromosságai létrehoznának, minthogy változó nagyságúak és irányúak, és nem elektromos erők, tétlenség, súrlódás, stb. is megtámadhatják) külön választandók a szabad æther momentumaiból, és a hullámzó mozgás külön megvizsgálandó a szabad ætherre s külön a mozogható molekulákkal telt térben, a miből aztán a színszórás törvényei is kipuhatolhatók.

Nagy érdekűek végül az ő általános következtetései MAXWELL-nek a tiszta æther mozgására vonatkozó elméletéből*, mely az æthernek mozgékonyságot tulajdonít s a mérlegelhető anyagtól áthatoltnak képzeli, mely vele együtt mozog; az ilyen keveredések tényleg minden anyagban előfordulnak, mely a vacuummal szemben vagy vezető, vagy pedig fénytörő, avagy dielektrikus és magnetikus állandóknak a vacuuméitől eltérő értékével bír, és a mérlegelhető részek mozgásából az æthernek velők

* Folgerungen aus MAXWELL's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers (1893).

egyező mozgásaira lehet következtetni. Ha azonban a terekben mérlegelhető anyagok nincsenek és csakis ætherrel vannak megtöltve, úgy az a kérdés támad, vajjon a szabad æther teljesen tétlenségmentes állapotban egyáltalában létezhetik-e, vajjon ki kell-e térnie a benne tovamozduló testek elött, vagy hogy keresztül hatol-e rajtok s e közben nyugalomban marad, vagy pedig hogy részben velük mozog s részben kitér elölük. Ama feltevés mellett, hogy az æther mechanikai szempontból surlódásmentes, összenyomhatatlan folyadék tulajdonságaival van felruházva, de e mellett tétlensége egyáltalában nincsen, Helmholtz azt találja, hogy a Maxwell-től felállított, Hertz-től pedig kiegészített törvények tényleg alkalmasak arra, hogy az ætherben végbemenő változásokról és mozgásokról teljes felvilágosítást adjanak, és pedig úgy, hogy az elektrodynamika törvényeinek a legkisebb hatás elve alá való összefoglalásához, úgy mint Helmholtz már elébb megadta volt, már csak az összenyomhatatlanság hypothesisének bevezetésére van még szükség, a mi úgy történhetik, hogy az elektrokinetikai potentiál az összenyomhatatlanság meghatározó egyenletének bal oldalával kiegészíttetik, a miből aztán a nyugvó és a mozgó ætherben támadó és elmuló ponderomótoros erökre fontos következtetések vonhatók.

A befejezetlen «Nachtrag zu dem Aufsatze: Ueber das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik» (1894) című értekezésben Helmholtz még egyszer visszatér a Maxwell-Hertz-féle elektrodynamikai törvényeknek a legkisebb hatás elvének általánosított alakja alá való összefoglalására, hogy eldöntse, vajjon az elektromágnesi folyamatok összes energiájának ismeretes értéke megköveteli-e még egy, a sebességekre nézve lineáris függvénynek hozzáadását, és ha igen, a ponderomótoros eröknek ezen elvből áttekinthető alakban való leszármaztatását veszi tervbe.

S ezzel véget ér a felülmulhatatlan kutató fényes mathematikai és mathematikai-physikai dolgozatainak hosszú sorozata, a mely dolgozatok tartalmáról és jelentőségéről, a mennyire ez az ő mathematikai analysisének finomságaiba való mélyebb behatolás nélkül egyáltalában lehetséges, képet adni törekedtem. Megengedem, hogy a kép tökéletlen. Hogy mi lett volna az 1895-iki bécsi Naturforscher-Versammlung alkalmára «Ueber dauernde Bewegungsformen und scheinbare Substanzen» címen hirdetett előadásának a tartalma, melyből a tudós hagyatékában mindössze néhány irott oldalt találtak, minden időre rejtve marad előttünk; de bizonyára nem alap nélkül gyanítani lehet, hogy azoknak a nagy kutatásoknak philosophiai magvát fejtette volna ki a természettudományi világ előtt, melyeket életének utolsó éveiben a mechanika és a physika alapjainak és elveinek felderítése czéljából végzett. Ford. *B.*

International Journals from Hungary

ANNALES UNIVERSITATIS SCIENTIARUM BUDAPESTINENSIS DE ROLANDO EÖTVÖS NOMINATAE

Sectio: MATHEMATICA
Vols. 1-9 1958-1966 mostly reprinted
unbound per Vol US $ 8,-

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

O. S. Vols. 1-3. 1952-1954 all publ. Partly reprinted
N. S. Vols. 1-9. 1956-1965 all publ.

Unbound set US $ 110,-
Cloth bound set US $ 134,-

Continued as „STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA"

STUDIA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM HUNGARICA

Vols. 1-2, 1966-1967

Unbound, per vol. US $ 12,-

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS ACTA PHYSICA ET CHIMICA

Series I.

„Acta Chimica, Mineralogica et Physica"
Vols. 1-7, 1929-1940 all publ.

Series II.

„Acta Chimica et Physica"
Vols. 1-3 1942-1950 all publ.

Nova Series:

„ACTA PHYSICA et Chimica"
Vols. 1-13, 1955-1967

Price of the three series together unbound US $ 170,-

ACTA PHYSICA et CHIMICA DEBRECINA

Vols. VIII-XII. (N. S. 1-5) 1962-1966
unbound per vol. US $ 6,-

Mathematical and Physical Journals in Hungarian

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

Mostly reprinted

Vols. 1-50, Budapest, 1892-1943, all published, with General Index clothbound US $ 850,-

paperbound, resp. in original issues US $ 750,-

Ample summaries in German since 1920

MATEMATIKAI LAPOK

Vols. 1-18, Budapest, 1950-1957 partly reprinted,

clothbound US $ 196,-

paperbound, resp. in original issues US $ 160,-

Continues and develops the traditions of the former valuable periodical MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK. Published by the Bolyai Mathematical Society in Hungarian, with summaries in congress languages, bringing regularly the bibliography of Hungarian mathematical literature. Editor: Professor P. Turán.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

Vols. 1-17, Budapest, 1950-1967 clothbound US $ 170,-

in original issues US $ 136,-

Publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

Vols. 1-15, 1953-1967 clothbound US $ 136,-

in original issues US $ 102,-

Physical publications of the Mathematical and Physical Section of the Hungarian Academy of Sciences

Prices are valid until December 31, 1969

Single volumes of periodicals quoted are available.
Subscription to forthcoming volumes may be entered.

„KULTURA"

Hungarian Trading Company for Books and Newspapers
Back Issues Department

BUDAPEST 62, P. O. B. 149, Hungary

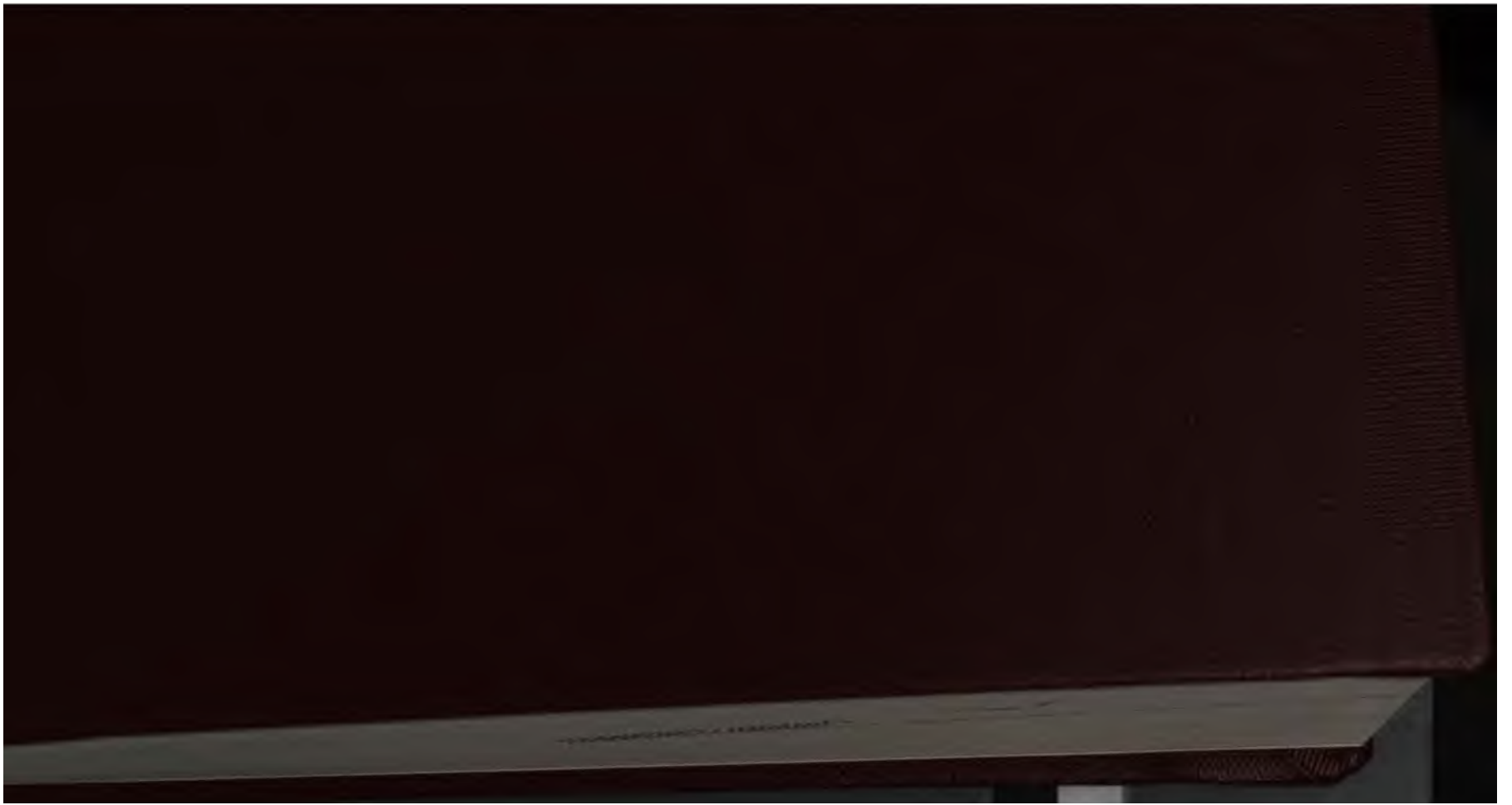
Sets, runs and back volumes of periodicals published in Hungary

REPRINTS

Searching Service for out of stock journals
Xerox copies or microfilms of out of print issues

Please ask for our catalogues „PERIODICA HUNGARICA"

Orders and inquiries should be sent to above address, directly, or through any international scientific bookseller.

DATE DUE			

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004